Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 9/10 (1887)

Heft: 22

Inhaltsverzeichnis

Beitrag zur Theorie der ebenen Träger.

Von *Heinr. Müller-Breslau*, Prof. an der Technischen Hochschule in Hannover.

In Nr. 20, Seite 121 des vorliegenden Jahrganges dieser Zeitschrift, theilte ich ein neues Verfahren zur Berechnung statisch bestimmter Fachwerke mit, welches darin besteht, den Träger durch Beseitigung des Stabes s_{kr}, dessen Spannkraft S_{kr} gesucht wird, in eine zwangläufige kinematische Kette zu verwandeln, den Gliedern dieser Kette verschwindend kleine Verrückungen zu ertheilen und nach Ermittelung der senkrechten Geschwindigkeiten der Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma P_m c_m = o$ aufzustellen, in welcher c_m den Abstand der Kraft P_m vom Endpunkte m' der senkrechten Geschwindigkeit mm' ihres Angriffspunktes m bedeutet. Die in k und r angreifenden Spannkräfte S_{kr} werden hierbei zu den äusseren Kräften gerechnet, und es enthält dann, wenn bei der angenommenen Bewegung der Kette die Auflagerbedingungen erfüllt werden, jene Gleichung nur die *eine* Unbekannte S_{kr}. Um die nach einer bestimmten Richtung wirkende Seitenkraft eines Stützenwiderstandes zu finden, wird die Umwandlung des starren Fachwerks in eine zwangläufige Kette durch Beseitigung einer Auflagerbedingung bewirkt, und ebenso leuchtet ein, dass man auch Biegungsmomente, Querkräfte u. s. w. auf kinematischem Wege herzuleiten vermag. Beispielsweise wird behufs Berechnung eines Momentes die Umwandlung des Trägers in eine Kette durch Anbringung eines Gelenkes erreicht.

Zu den Vorzügen dieses Verfahrens gehört, dass man auf dem angegebenen Wege nicht nur zu den unbekannten inneren und äusseren Kräften gelangt, sondern auch zu einer übersichtlichen Darstellung des gegenseitigen Einflusses der Verrückungen, und es ist nun der Zweck der folgenden Zeilen, die Aufmerksamkeit auf eine für die Werthschätzung neuer Arten statisch bestimmter Träger wichtige Aufgabe zu lenken, nämlich:

> Zu untersuchen, ob die durch Nachgeben der Widerlager hervorgerufenen Verrückungen der Stützpunkte etwa unzulässige Formänderungen des Trägers verursachen,

eine Aufgabe, welche sich stets in Verbindung mit derjenigen lösen lässt:

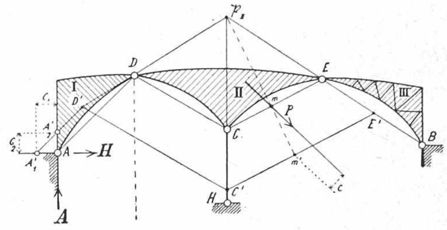
> Die Grösse der Stützenwiderstände zu bestimmen.

Die folgenden Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

1. Aufgabe. Der in Fig. 1 dargestellte, im allgemeinen starre und statisch bestimmte Bogenträger besteht aus drei starren, durch Gelenke mit einander verbundenen Scheiben I, II, III, welche vollwandig oder gegliedert (wie z. B. III) sein können. Bei A und B sind feste Auflagergelenke angeordnet. Bei C erfolgt die Stützung mittels einer Pendelsäule. Gesucht seien diejenigen Verrückungen, welche die Punkte des Trägers erfahren, wenn das Widerlager bei A nachgiebt, während die Stützpunkte B und H ruhen. Gleichzeitig sollen die durch irgend eine beliebig gerichtete, gegebene Last P bei A erzeugten Stützenwiderstände A (senkrecht) und H (wagerecht) bestimmt werden.

Zunächst handle es sich um den Einfluss einer wagerechten Verrückung des Stützpunktes A. Das feste Auflagergelenk A wird ersetzt durch ein auf wagerechter Bahn geführtes, und in Folge dessen geht der starre Träger in eine zwangläufige Kette über, deren Scheiben III und II sich beziehungsweise um die Pole B und $\mathfrak{P}_{II}$ drehen, wobei $\mathfrak{P}_{II}$ den Schnittpunkt der Geraden BE mit der Pendelsäule bedeutet. Der Pol von I liegt auf der Senkrechten durch A, weil sich Punkt A in einer Wagerechten bewegt. Von den sog. senkrechten Geschwindigkeiten EE', CC', DD', AA_2' der Punkte E, C, D, A nehme man die eine, beispielsweise $AA_2' = c_2$, beliebig an; die übrigen sind dann bestimmt; denn

Fig. 1.



es muss sein: $A_2' D' \parallel A D$; $D' C' \parallel D C$; $C' E' \parallel C E$; auch müssen die Punkte D', C', E' auf den durch die Punkte D, C, E gehenden Polstrahlen liegen.

Bedeuten nun δ_D δ_C δ_E die Verrückungen, welche die Punkte D, C, E erfahren, sobald sich A in wagerechter Richtung um ζ_A verschiebt, so verhalten sich:

$$\text{(I)} \qquad \delta_D : \delta_C : \delta_E : \zeta_A = \overline{DD'} : \overline{CC'} : \overline{EE'} : \overline{AA'_2},$$

und in gleicher Weise findet man, für die Verrückungen δ_D, δ_C, δ_E, welche entstehen, sobald A in senkrechter Richtung um η_A verschoben wird, die Beziehung:

$$\text{(II)} \qquad \delta_D : \delta_C : \delta_E : \eta_A = \overline{DD'} : \overline{CC'} : \overline{EE'} : \overline{AA'_1}.$$

Dabei ist A_1' der Schnittpunkt der Geraden $D' A_2'$ mit der Wagerechten durch A. Die wirklichen Richtungen dieser Verschiebungen erhält man, wenn man die Richtungen AA_1', AA_2', DD' u. s. w. im gleichen Sinne um 90^0 dreht.

Um die durch irgend eine Last P hervorgerufenen Widerstände H und A zu finden, nehme man irgend einen Punkt m in der Richtung von P an, beispielsweise in Fig. 1 den Schnittpunkt der dort zwischen C und E liegenden Last P mit der Geraden CE, bestimme den zugehörigen Punkt m' und fälle von m' auf P das Loth c. Nun setze man zuerst voraus, es bewege sich A auf der Wagerechten, sodann, es werde A auf der Senkrechten verschoben. Im ersten Falle liefert die Bedingung $\Sigma P c = o$ die Gleichung:

$$+ P c - H c_2 = o \qquad \text{voraus } H = \frac{P c}{c_2},$$

und im zweiten Falle erhält man:

$$+ P c - A c_1 = o \qquad \text{also } A = \frac{P c}{c_1}.$$

Für irgend einen Belastungszustand ergiebt sich:

$$\text{(III)} \qquad H = \frac{\Sigma P c}{c_2} \quad ; \quad A = \frac{\Sigma P c}{c_1}.$$

Decken sich die Geraden $\mathfrak{P}_{II} D$ und $D A$, so folgt $c_1 = o$ und $c_2 = o$, und, im Allgemeinen: $H = \infty$, $A = \infty$. Gleichgewicht ist in diesem Falle (der z. B. vorliegt, wenn $C H$ eine Symmetrieachse ist) nur möglich, sobald $\Sigma P c = o$ ist. Dann aber befriedigt jeder Werth von H oder A die Gleichungen III, und der Träger ist statisch unbestimmt und von unendlich kleiner Beweglichkeit. Weichen die Richtungen der Geraden $\mathfrak{P}_{II} D$ und $D A$ nur wenig von einander ab, so ist der Träger ebenfalls unbrauchbar, weil in Wirklichkeit, wie aus den Gleichungen I und II hervorgeht, bereits sehr kleine Verrückungen von A gegen C und B (in Folge der unvermeidlichen Bewegungen der Widerlager) zu schädlichen Formänderungen des Trägers Veranlassung geben können.

In der Fig. 2 ist die Frage nach der Starrheit eines symmetrischen Trägers der eben untersuchten Art mit Hülfe der vom Verfasser auf Seite 121 d. J. eingeführten Figur F' entschieden worden. Die Gestalt der starren Scheiben I, II, III ist gleichgiltig. I und II sind