

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 9/10 (1887)
Heft: 20

Artikel: Beitrag zur Theorie des eigenen Fachwerks
Autor: Müller-Breslau, Heinr.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14376>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks. Von Heiner Müller-Breslau, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Hannover. — Miscellanea: Schweizerisches Eisenbahnwesen. Rollmaterial. Ueber die Entstehung und Entwicklung der Eisenbahnen in Russland. Strassenbahn-Oberbau. Schweizerische Eisenbahnen. Schmalspurbahn von Landquart nach Davos. Schmalspurbahn von Appenzell nach Altstätten.

Schmalspurige Strassenbahnen in der Umgebung von Genf. Schweizerische Bundesfinanzen. Aus der Fachpresse. Natron-Locomotiven. Die Technischen Hochbauten in Deutschland. Nord-Ostsee-Canal. Zollbefreiung für Schienen zur ersten Anlage von Eisenbahnen. Die Einweihung des Sempfer-Denkmal. — Concurrenzen: Façade des Domes von Mailand. — Vereinsnachrichten. Stellenvermittlung.

Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks.

Von Heiner Müller-Breslau, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover.

§ 1. Die vorliegende Abhandlung über das ebene Fachwerk stützt sich auf den bekannten Satz, dass die Bewegung einer starren Figur in einer festen Ebene in jedem Augenblicke auf eine Drehbewegung um einen festen Pol \mathfrak{P} zurückgeführt werden kann. Die Lage dieses Poles ist bestimmt, sobald die augenblicklichen Bewegungsrichtungen AA'' und BB'' zweier Punkte A und B der Figur gegeben sind. Man hat nur nöthig, in jenen Punkten auf deren Bewegungsrichtungen Lothe zu errichten, und findet dann den Pol als den Durchschnittspunkt dieser Lothe. Fig. 1. Bedeutet ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung um \mathfrak{P} , so sind die Geschwindigkeiten irgend welcher Punkte A und B beziehungsweise: $AA'' = \omega \mathfrak{P}A$ und $BB'' = \omega \mathfrak{P}B$. Denkt man sich diese Geschwindigkeiten in gleichem Sinne um einen rechten Winkel gedreht, trägt

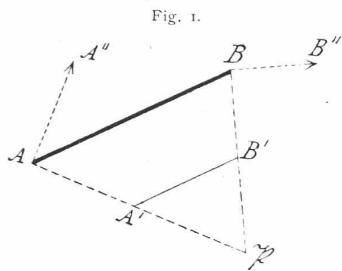


Fig. 1.

also auf den Polstrahlen $A\mathfrak{P}$ und $B\mathfrak{P}$ die Strecken $\overline{AA'} = \overline{AA''}$ und $\overline{BB'} = \overline{BB''}$ auf, so ist $A'B' \parallel AB$, weil sich verhält $\overline{AA'} : \overline{BB'} = \overline{AA''} : \overline{BB''} = \mathfrak{P}A : \mathfrak{P}B$. Die Strecken AA' und BB' heissen die *senkrechten Geschwindigkeiten* der Punkte A und B .

§ 2. Wir betrachten jetzt eine ebene Stabverbindung (F), deren Knotenpunkte die Ziffern 1, 2, 3, ... n tragen sollen, und denken uns irgend eine Figur (F') gezeichnet, bestehend aus geraden Linien, durch welche die den Fachwerksknoten entsprechenden Punkte $1', 2', 3', \dots n'$ mit einander verbunden werden, so zwar dass die Anzahl dieser Geraden mit der Anzahl der Stäbe des Fachwerks übereinstimmt und jedem Stabe mn eine ihm parallele Gerade $m'n'$ der Figur F' entspricht. Werden dann die Strecken mm' und nn' als die augenblicklichen senkrechten Geschwindigkeiten der Knoten m und n aufgefasst, so ist der Durchschnittspunkt \mathfrak{P} der Geraden mm' und nn' der augenblickliche Pol des Stabes mn . Ist es nun möglich, zu der Fachwerksfigur F eine Figur F' zu zeichnen, welche der Figur F nicht ähnlich ist, so ergeben sich verschiedene augenblickliche Drehpunkte, und hieraus folgt, dass die gegenseitige Lage der Stäbe durch (endliche oder unendlich kleine) Drehungen der Stäbe um jene verschiedenen Pole geändert werden kann; das Fachwerk ist mithin kein starres.

In den Figuren 2 und 3 sind zwei einfache Beispiele vorgeführt worden. Das erste Beispiel betrifft ein verschiebbares Viereck 1 2 3 4. Die Figur F' ist ebenfalls ein Viereck, dessen Seiten $1'2', 2'3', 3'4', 4'1'$ den Fachwerksstäben 1 2, 2 3, 3 4, 4 1 beziehungsweise parallel sind. Es lassen sich unendlich viele Vierecke $1'2'3'4'$ zeichnen, welche dem Vierecke 1 2 3 4 nicht ähnlich sind. Der Schnittpunkt \mathfrak{P}_1 der Geraden $1 1'$ und $2 2'$ ist (für den durch die Figur F' bestimmten augenblicklichen Bewegungszustand) der augenblickliche Pol des Stabes 1 2; der Schnittpunkt \mathfrak{P}_2 der Geraden $2 2'$ und $3 3'$ ist der augenblickliche Pol des Stabes 2 3 u. s. f.

Die Figur 3 stellt ein starres Viereck vor; hier ist es nicht möglich, eine Figur F' zu zeichnen, welche der Figur F nicht ähnlich ist. Die Geraden $1 1', 2 2', 3 3', 4 4'$

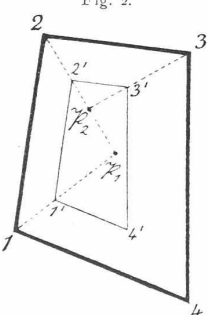


Fig. 2.

schneiden sich in dem gemeinschaftlichen Pole \mathfrak{P} ; eine gleichzeitige Drehung der einzelnen Stäbe um verschiedene Pole ist nicht ausführbar.

Die vorstehenden Betrachtungen sind von Nutzen, wenn die Frage nach der Starrheit eines Fachwerks beantwortet werden soll. Es ist bekannt, dass die Anzahl r der Stäbe eines starren Fachwerks bei n Knotenpunkten mindestens $= 2n - 3$ sein muss, dass aber die Bedingung $r = 2n - 3$ keineswegs eine ausreichende ist. Wir können nun aussprechen:

Ist es möglich, zu der Fachwerksfigur F eine Figur F' zu zeichnen, welche der Figur F nicht ähnlich ist, so ist das Fachwerk kein starres, selbst wenn es $2n - 3$ Stäbe besitzt.

Ein beachtenswerthes Beispiel für die Anwendung dieses Satzes bildet der in der Fig. 4 dargestellte Träger, welcher vor einiger Zeit Gegenstand eines lebhaften Streites war. Die Gleichung $r = 2k - 3$ wird hier erfüllt; trotzdem

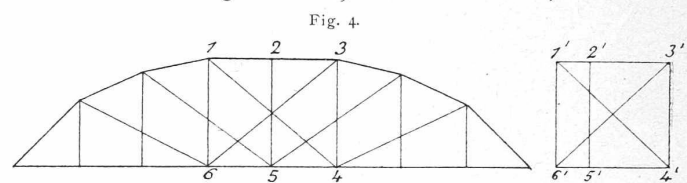


Fig. 4.

ist der Träger kein starrer, weil sich zu dem Sechseck 1 2 3 4 5 6, an welches die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe angeschlossen werden, beliebig viele Figuren $1'2'3'4'5'6'$ zeichnen lassen, welche dem Sechseck nicht ähnlich sind.

§ 3. Die folgende, durch ein Beispiel eingeleitete Untersuchung soll nun zeigen, in welcher Weise die Figur F' auch zur Berechnung der Spannkraft des Fachwerks benützt werden kann.

Wir betrachten ein Fachwerk, welches wir uns auf die folgende Weise entstanden denken. Es seien n Knotenpunkte in der Ebene gegeben; sie seien in beliebiger Reihenfolge mit den Ziffern 1, 2, 3, ... n versehen. Die Knoten 1, 2, 3, 4 seien durch die Stäbe 1 2, 2 3, 3 4, 4 1 verbunden, und an das so entstandene Gelenkviereck seien die übrigen Knoten durch je zwei Stäbe in der Weise angeschlossen, dass 5 verbunden wird mit 4 und 2, 6 mit 5 und 2, 6 mit 3 u. s. w., n mit $n-1$ und $n-3$.

Vergl. Fig. 5, in welcher $n = 8$ ist. Da das Viereck 1 2 3 4, dessen Seite 1 2 wir als festliegend voraussetzen wollen, nicht starr ist, so können die Knotenpunkte 2, 3, 4, ... n gegen einander verschoben werden. Alle diese Punkte sind aber *zwangsläufig*, d. h. sie sind gezwungen, beim Eintreten von Verrückungen,

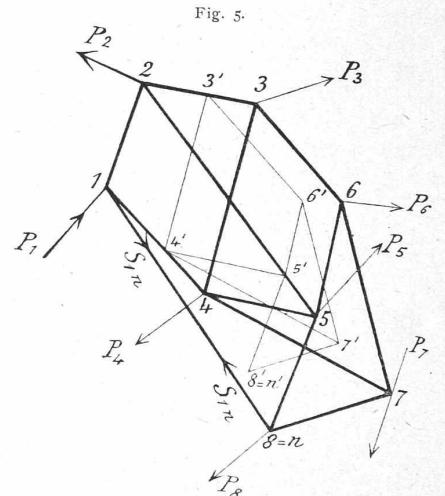
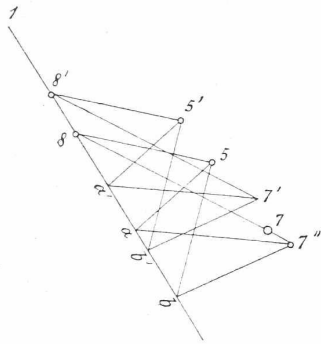


Fig. 5.

die wir in der Folge verschwindend klein annehmen, bestimmte Bahnen zu beschreiben; ihre augenblicklichen Bewegungsrichtungen sind gegeben, sobald ihre senkrechten Geschwindigkeiten bekannt sind. Die Knoten 3, 4, 5 bewegen sich auf Kreisbogen, deren Mittelpunkte beziehungsweise die Punkte 2, 1 und 2 sind. Die senkrechten Geschwindigkeiten dieser Knoten fallen also mit den Stabachsen 3 2, 4 1, 5 2 zusammen; die eine derselben, beispielsweise $v_3 = 3 3'$, darf beliebig gross angenommen werden, die anderen, nämlich $4 4'$ und $5 5'$, ergeben sich durch Ziehen von $3'4' \parallel 3 4$ und $4'5' \parallel 4 5$. Zieht man noch $5'6' \parallel 5 6$ und $3'6' \parallel 3 6$, hierauf $6'7' \parallel 6 7$ und $4'7' \parallel 4 7$ u. s. w., so sind die Strecken $6 6'$, $7 7'$, . . . die senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte 6, 7, . . . und die in 6, 7, . . . auf den zugehörigen senkrechten Geschwindigkeiten errichteten Lothe geben die augenblicklichen Bewegungsrichtungen dieser Punkte an. Werden jetzt die Knoten n und 1 durch einen Stab verbunden, so wird das Fachwerk ein starres, vorausgesetzt, dass nicht etwa der Punkt n' in der Geraden m liegt. Tritt dieser Ausnahmefall ein, so ist das Fachwerk (nach dem im § 2 angeführten Satze) beweglich; seine Verschiebbarkeit ist allerdings im vorliegenden Falle unendlich klein; die zur Geraden mm' senkrechte Bahn des Punktes n hat mit dem um 1 mit dem Halbmesser m beschriebenen Kreisbogen ein Bogentheilchen gemein, innerhalb dessen sich der Punkt n auch nach Hinzufügung des Stabes m bewegen kann.

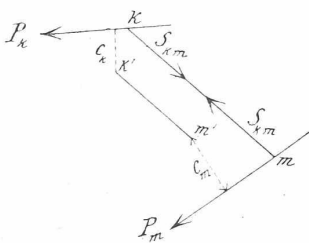
Fig. 6.



Gerade m in demjenigen Punkte 8, welchem ein auf der m liegender Punkt $8'$ entspricht.

Wir setzen nun den allgemeinen Fall voraus, dass n' nicht in die Gerade m fällt und suchen die Spannkraft S_m im Stabe m . In den Fachwerksknoten 1, 2, 3, . . . m , . . . n mögen äussere, mit einander im Gleichgewichte befindliche Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots P_m \dots P_n$ angreifen. Die in irgend einem Knoten m wirkenden äusseren und inneren Kräfte müssen mit einander im Gleichgewichte sein, und es muss deshalb die Summe ihrer Momente, bezogen auf irgend einen Drehpunkt, gleich Null sein. Wählt man nun den Endpunkt m' der senkrechten Geschwindigkeit mm' des Knotens m zum Drehpunkte und bezeichnet mit c_m den Abstand der in m angreifenden äusseren Kraft P_m (Fig. 7) vom Punkte m' , so ergibt sich $P_m c_m + \Sigma_m = 0$, wo Σ_m die Summe der auf m' bezogenen Momente aller im Knoten m angreifenden Spannkräfte bedeutet. Bildet man eine ähnliche Gleichung für jeden Knoten und bezeichnet mit c den Abstand der Spannkraft S_m vom Punkte n' , so erhält man die Gleichung:

Fig. 7.



(1) $S_m c + \Sigma P_m c_m + \Sigma (\Sigma_m) = 0$,

deren letztes Glied von den Spannkraften in den Fachwerkstäben, ausgenommen Stab $1 n$, abhängt. Jede dieser Spannkräfte liefert zu dem Gliede $\Sigma (\Sigma_m)$ zwei entgegengesetzt

gleiche Beiträge; denn sind z. B. mm' und kk' (Fig. 7) die senkrechten Geschwindigkeiten der Endpunkte irgend eines Stabes mk , so ist $m'k' \parallel mk$, und es heben sich deshalb die auf m' und k' bezogenen Momente der in m und k angreifenden, entgegengesetzt gleichen Spannkraften S_{km} auf. Hieraus folgt aber, dass das letzte Glied der Gleichung (1) $= 0$ ist, dass diese Gleichung also übergeht in

(2) $S_m c + \Sigma P_m c_m = 0$;

sie liefert $S_m = \frac{\Sigma P_m c_m}{c}$.

Ist nun $c = 0$, d. h. ist das Fachwerk ein solches von unendlich kleiner Verschiebbarkeit, so kann der Gleichung 2 im Allgemeinen nur durch ein unendlich grosses S_m genügt werden. Das Fachwerk ist dann nicht widerstandsfähig, also unbrauchbar. Gleichgewicht ist im Falle $c = 0$ nur möglich, wenn die äusseren Kräfte P der Bedingung $\Sigma P_m c_m = 0$ genügen; dann aber befriedigt jeder endliche Werth von S_m die Gleichung 2, und das Fachwerk ist ein statisch unbestimmtes.

Es leuchtet ohne Weiteres ein, dass man mit Hilfe des durch die Gleichung (2) dargestellten Gesetzes im Stande ist, die Spannkraft in irgend einem Stabe eines Fachwerks zu bestimmen, sobald dieses nach Beseitigung des fraglichen Stabes eine zwangsläufig bewegliche Stabverbindung ist. Von Vortheil ist dieses Verfahren (gegenüber anderen Berechnungsweisen) natürlich nur dann, wenn sich die senkrechten Geschwindigkeiten der Knotenpunkte für irgend welche unendliche kleine Verrückungen bequem bestimmen lassen, was bei den im Brückenbau und Hochbau angewandten Fachwerken stets der Fall ist. Es ist hierbei zwar häufig zweckmässig, jedoch nicht unbedingt nöthig, einen Stab des Fachwerks als ruhend anzusehen; vielmehr lässt sich die folgende allgemeinere Regel aufstellen.

Wird die Spannkraft S_{kr} in dem die Knoten k und r verbindenden Stabe kr gesucht, so beseitigt man diesen Stab und bringe sowohl in k als auch in r die Spannkraft S_{kr} als äussere (Zug-)Kraft an. Nun zeichne man für das bewegliche Fachwerk eine Figur F' , so zwar, dass die Verbindungslinie der Punkte k' und r' nicht parallel zu kr ist und schreibe die Bedingung $\Sigma P c = 0$ an. In diese Summe werden ausser den äusseren Kräften P auch die beiden Kräfte S_{kr} eingeführt. Man erhält eine Gleichung, aus welcher sich S_{kr} berechnen lässt.

Anwendungen dieses Verfahrens findet der Leser in dem (bereits gedruckten) Abschnitte VIII der in wenigen Wochen erscheinenden zweiten Auflage meiner „Graphischen Statik“. Es werden dort auch Träger mit Hilfe der geometrischen Bewegungslehre untersucht, die aus Scheiben und Stäben zusammengesetzt und verschiedenartig unterstützt sind. Sodann wird a. a. O. gezeigt, dass die fraglichen Untersuchungen zuweilen durch Anwendung des bekannten Satzes erleichtert werden können, dass die Pole der relativen Bewegungen dreier in einer festen Ebene bleibenden starren Figuren in ein und derselben Geraden liegen.*) Ein wichtiges Beispiel möge dies erläutern. Macht man das in

Fig. 8.

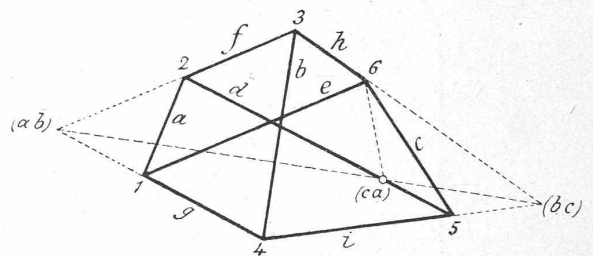


Fig. 8 dargestellte Sechseck, welches im Allgemeinen starr ist, durch Wegnahme des Stabes e beweglich und betrachtet den Stab a als ruhend, so stehen die augenblicklichen Bewegungsrichtungen der Knoten 3 und 4 senkrecht auf den

*) Vergl. die Abhandlung von *Burmester* „Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten“, Civilingenieur, 1880, S. 247.

