Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 9/10 (1887)
Heft: 12

Artikel: Calcul de la poussée de l'arc élastique à deux pivots
Autor: Röthlisberger, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14359

Calcul de la poussée de l'arc élastique à deux pivots.

Bien que le calcul de l'arc soit devenu très familier aux ingénieurs, nous croyons rendre quelque service, en exposant ici un nouveau procédé de calcul de la poussée de l'arc à deux pivots, qui se distingue de ceux actuellement en usage par son extrême simplicité.

Pour la déduction de nos formules, nous partirons de l'expression bien connue qui donne la déformation horizontale de la corde d'un arc, et qui est établie sous la supposition que les déformations provenant de l'effort tranchant peuvent être négligées.

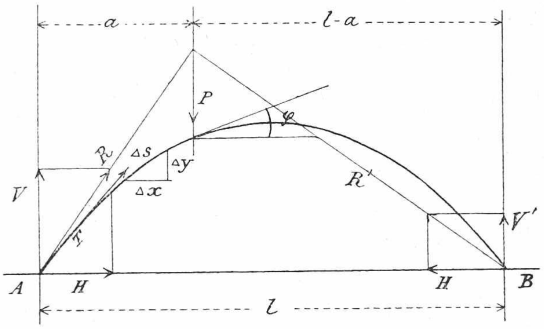
En désignant par h la déformation horizontale de la corde de l'arc, on a

1) $$h = -\sum_o^l \frac{M}{EJ}\, y\, \Delta s + \sum_o^l T \frac{\Delta x}{EF}$$

T étant l'effort tangentiel produit par une force verticale quelconque appliquée à l'arc.

La pratique enseigne que la section des nervures d'un arc varie beaucoup moins que celle d'une poutre continue, et que l'on peut, sans commettre une erreur pratiquement appréciable, la supposer constante, ainsi qu'on le fait toujours pour les poutres continues à hauteur constante.

Fig. 1.



Si nous admettons que la section de la nervure de l'arc, que nous désignerons par $\frac{1}{2}F$, soit concentrée autour de son centre de gravité, et si nous appelons d la demi-distance des centres de gravité des nervures, nous pourrons poser

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}F\right)(2\,d)^2 = Fd^2$$

Introduisant cette valeur dans l'expression 1), et remarquant que E est constant, il vient

2) $$h\,EF = -\sum_o^l M\,.\,y\frac{\Delta s}{d^2} + \sum_o^l T\,.\,\Delta x$$

Soient P une force verticale quelconque, R et R' ses réactions, φ l'angle de la tangente de l'arc avec l'horizontale, et T la composante tangentielle de la force extérieure, nous aurons

$$T = V \sin\varphi + H \cos\varphi$$

ou

$$T = V\frac{\Delta y}{\Delta s} + H\frac{\Delta x}{\Delta s}$$

Remplaçant T par sa valeur dans le second terme du deuxième membre de l'équation 2) il vient

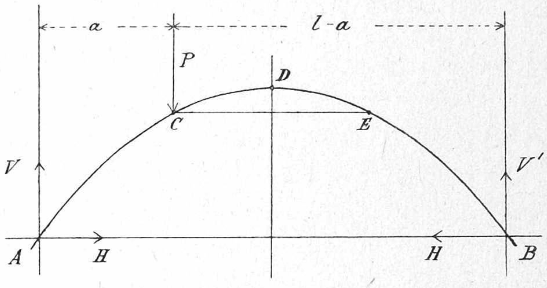
$$\sum_o^l T\Delta x = \sum_o^l V\frac{\Delta x\,.\,\Delta y}{\Delta s} + \sum_o^l H\frac{\Delta x^2}{\Delta s}$$

or

$$\sum_o^l V\frac{\Delta x\,.\,\Delta y}{\Delta s} = \sum_o^a V\frac{\Delta x\,.\,\Delta y}{\Delta s} + \sum_a^l V'\frac{\Delta x\,.\,\Delta y}{\Delta s}$$

Si nous admettons, comme c'est le cas en général, que l'arc soit symétrique, nous voyons immédiatement sur

Fig. 2.



la figure 1. ci-contre, que l'allongement de l'arc produit par V' sur le segment CD est égal au raccourcissement du segment symétrique DE, et comme $AC = BE$, nous aurons

$$\sum_a^l V'\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s} = \sum_o^a V'\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s}$$

d'où

$$\sum_o^l V\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s} = \sum_o^a V\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s} + \sum_o^a V'\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s} =$$

$$= (V + V')\sum_o^a\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s} = P\sum_o^a\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s}$$

Pour une force verticale quelconque, nous voyons (sur la fig. 1) que nous pouvons poser, pour tout point compris entre A et P

$$M = Vx - Hy$$

et pour tout point entre P et B

$$M = V'(l - x) - Hy\,.$$

or

$$V = P\frac{l-a}{l} \quad \text{et} \quad V' = P\,.\,\frac{a}{l}$$

Substituant ces valeurs, ainsi que celle $\sum_o^l T\,.\,\Delta x$ dans la formule 2) il vient

$$hEF = -\left[\sum_o^a P\frac{l-a}{l}x\,.\,y\frac{\Delta s}{d^2} + \sum_a^l P\frac{a}{l}(l-x)\,y\,.\,\frac{\Delta s}{d^2}\right] +$$

$$+ \sum_o^l Hy^2\frac{\Delta s}{d^2} + P\sum_o^a\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s} + \sum_o^l H\frac{\Delta x^2}{\Delta s}$$

Si maintenant nous supposons la corde de l'arc invariable, nous aurons $h = o$ et nous pourrons tirer de l'équation précédente la valeur de la poussée, puisque H est constant pour une seule et même charge.

$$o = P\left\{\frac{l-a}{l}\sum_o^a x\,.\,y\,.\,\frac{\Delta s}{d^2} + \frac{a}{l}\sum_a^l(l-x)\,y\,.\,\frac{\Delta s}{d^2} - \sum_o^a\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s}\right\} +$$

$$+ H\left(\sum_o^l y^2\frac{\Delta s}{d^2} + \sum_o^l\frac{\Delta x^2}{\Delta s}\right)$$

d'où l'on a

3) $$H = P\,\frac{\dfrac{l-a}{l}\sum_o^a x\,.\,y\dfrac{\Delta s}{d^2} + \dfrac{a}{l}\sum_a^l(l-x)\,y\,.\,\dfrac{\Delta s}{d^2} - \sum_o^a\dfrac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s}}{\sum_o^l y^2\dfrac{\Delta s}{d^2} + \sum_o^l\dfrac{\Delta x^2}{\Delta s}}$$

L'on se rend compte pratiquement que le terme $\sum_o^a\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{\Delta s}$ est très-petit vis-à-vis des deux autres membres du numérateur de H, on peut donc le négliger.

Pour compenser la petite augmentation que nous faisons subir au numérateur de H, nous supposerons que le rapport

$\frac{\varDelta x}{\varDelta s}$ soit constamment égal à sa valeur maximum, c'est à dire à l'unité. Nous aurons alors

$$\sum_o^l \frac{\varDelta x^2}{\varDelta s} = \frac{\varDelta x}{\varDelta s} \sum_o^l \varDelta x = 1 \, . \, l$$

et en introduisant ces modifications dans la formule 3) il vient

$$4) \qquad H = P \frac{\frac{l-a}{l} \sum_o^a x \, . \, y \frac{\varDelta s}{d^2} + \frac{a}{l} \sum_a^l (l-x) \, y \, . \frac{\varDelta s}{d^2}}{\sum_o^l y^2 \, . \frac{\varDelta s}{d^2} + l}$$

posons

$$y \, . \frac{\varDelta s}{d^2} = A$$

et introduisons cette valeur dans 4), on a

$$5) \qquad H = P \frac{\frac{l-a}{l} \sum_o^a A x + \frac{a}{l} \sum_a^l (l-x) A}{\sum_o^l A y^2 + l}$$

Si nous supposons que l'arc, dont il s'agit de trouver les réactions, soit divisé en un certain nombre de segments tels que pour chacun de ceux-ci on puisse admettre que le terme $y \frac{\varDelta s}{d^2}$ soit constant, nous voyons que le numérateur de H n'est rien autre que l'expression du moment statique des forces A appliquées à l'arc, à des abscisses égales à celles des points milieux des segments suivant lesquels nous avons divisé l'arc.

Appelant M_A ce moment, nous pourrons écrire

$$6) \qquad H = P \frac{M_A}{\sum_o^l A \, . \, y + l}$$

Enfin, si la hauteur de l'arc est constante, et si nous divisons l'axe de l'arc en segments $\varDelta s$ d'égale longueur, le terme $\frac{\varDelta s}{d^2}$ sera constant et nous pourrons le sortir du signe Σ: on aura alors en désignant par M_y le moment des ordonnées de l'arc considérées comme forces appliquées à la corde de l'arc

$$7) \qquad H = P \frac{M_y}{\sum_o^l y^2 + l \frac{d^2}{\varDelta s}}$$

Ce que nous pouvons exprimer par le remarquable théorème:

Dans un arc symétrique à deux pivots, la poussée d'une force verticale quelconque est égale à la force, multipliée par le moment statique des ordonnées de l'arc appliquées à sa corde, et divisée par la somme du carré des ordonnées, augmentée de la portée de l'arc multipliée par le rapport $\frac{d^2}{\varDelta s}$.

Si nous négligeons la déformation produite par la force tangentielle, qui est d'autant plus petite que le rapport de la corde de l'arc à sa flèche est plus grand, nous avons

$$8) \qquad H = P \frac{M_y}{\sum_o^l y^2}$$

Donnons à M_y sa valeur, et remplaçons le signe Σ par $\int$, nous aurons

$$H = P \frac{\frac{l-a}{l} \int_0^a y \, . \, x \, . \, dx + \frac{a}{l} \int_a^l y \, (l-x) \, dx}{\int_0^l y^2 \, . \, dx}$$

Pour un arc parabolique on a

$$y = \frac{4f}{l^2} (l x - x^2)$$

En substituant y et en effectuant les intégrales, on a

$$\frac{l-a}{l} \int_0^a y \, . \, x \, . \, dx = \frac{4f}{12 \, l^2} \, . \, \frac{l-a}{l} \, (4 a^3 l - 3 a^4)$$

$$\frac{a}{l} \int_a^l y \, . \, (l-x) \, . \, dx = \frac{4f}{12 \, l^2} \frac{a}{l} \, (l^4 - 6 a^2 l^2 + 8 a^3 l - 3 a^4)$$

$$\int_0^l y^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l$$

et introduisant ces valeurs dans l'expression de H

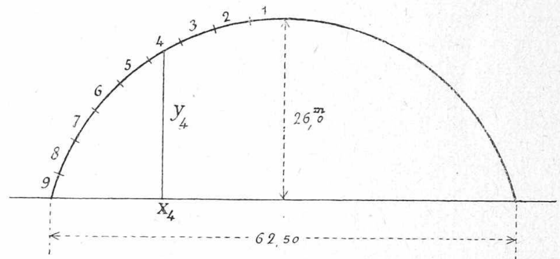
$$H = P \frac{5a}{8 f l^3} (l-a) (l^2 + a l - a^2)$$

Soit la formule déduite par M. le prof. Weyrauch pour les arcs à axe parabolique.

Application des formules précédentes à un cas particulier.

Ayant eu dernièrement l'occasion de construire un pont en arc circulaire, nous y avons appliqué cette méthode de calcul.

Fig. 3.



L'arc en question a une corde de 62,50 m et une flèche de 26,0 m. Nous l'avons divisé en 18 tronçons d'égale longueur pour chacun desquels nous avons relevé sur le dessin l'abcisse et l'ordonnée moyennes. — Comme la hauteur de l'arc est constante, nous appliquons la formule 7). Nous avons

$x_1 = 28{,}42$ m	$y_1 = 25{,}91$ m	$y_1^2 = 671{,}33$
$x_2 = 23{,}62$	$y_2 = 25{,}16$	$y_2^2 = 633{,}03$
$x_3 = 18{,}92$	$y_3 = 23{,}64$	$y_3^2 = 558{,}85$
$x_4 = 14{,}52$	$y_4 = 21{,}40$	$y_4^2 = 457{,}96$
$x_5 = 10{,}52$	$y_5 = 18{,}50$	$y_5^2 = 342{,}25$
$x_6 = 7{,}04$	$y_6 = 15{,}00$	$y_6^2 = 225{,}00$
$y_7 = 4{,}15$	$y_7 = 11{,}00$	$y_7^2 = 121{,}00$
$x_8 = 1{,}92$	$y_8 = 6{,}58$	$y_8^2 = 31{,}13$
$x_9 = 0{,}40$	$y_9 = 1{,}89$	$y_9^2 = 3{,}57$
	total 149,08	total 3044,12

d'où

$$\sum_0^l y^2 = 2 \times 3044{,}12 = 6088{,}24$$

La valeur de $\varDelta s$, c'est à dire la longueur de l'axe d'un des tronçons de l'arc est de 4,94 m, la demi-hauteur d'arc est de 1,25 m, d'où

$$l \frac{d^2}{\varDelta s} = \frac{\overline{1{,}25}^2}{4{,}94} \, . \, 61{,}70 = 19{,}51$$

le dénominateur de H est donc égal à

$$\sum_0^l y^2 + \frac{d^2}{\varDelta s} l = 6088{,}24 + 19{,}51 = 6107{,}7$$

Si maintenant nous considérons les ordonnées comme des forces appliquées à l'extrémité de leurs abscisses, leur réaction sera égale à la moitié de la somme des y, soit à 149,08 et leurs moments statiques aux points x_1, x_2 . . . x_9 seront

$M_1 = 149,08 \times 28,42 - 1789,0 = 2447,9$
$M_2 = 149,08 \times 23,62 - 1195,9 = 2325,4$
$M_3 = 149,08 \times 18,92 - 737,1 = 2083,5$
$M_4 = 149,08 \times 14,52 - 409,9 = 1754,7$
$M_5 = 149,08 \times 10,52 - 198,0 = 1370,3$
$M_6 = 149,08 \times 7,04 - 78,0 = 971,5$
$M_7 = 149,08 \times 4,15 - 21,8 = 596,9$
$M_8 = 149,08 \times 1,92 - 2,9 = 283,3$
$M_9 = 149,08 \times 0,40 = 59,6$

Enfin en divisant ces moments par 6107,7 nous obtenons les poussées pour la charge de 1 tonne, appliquée successivement au droit de chacune des ordonnées de l'arc.

$H_1 = 0,4008$
$H_2 = 0,3807$
$H_3 = 0,3390$
$H_4 = 0,2873$
$H_5 = 0,2243$
$H_6 = 0,1591$
$H_7 = 0,0977$
$H_8 = 0,0464$
$H_9 = 0,0097$
total 1,9450

Afin d'être à même de nous rendre compte de l'erreur commise par la supposition que les nervures de l'arc étaient constantes, nous avons déterminé les mêmes poussées par le procédé graphique, en basant le calcul sur les véritables moments d'inertie de l'arc, et en opérant sur l'axe de gravité de l'arc et non sur son axe géométrique. Nous donnons ci-dessous les résultats obtenus, ainsi que ceux que nous avons déduits par l'application de la formule du prof. Weyrauch. —

Position de la force	Formule 7)	Procédé graphique	Formule Weyrauch
1	0,4008	0,397	0,3965
2	0,3807	0,377	0,3766
3	0,3390	0,338	0,3379
4	0,2873	0,288	0,2847
5	0,2243	0,224	0,2222
6	0,1591	0,159	0,1578
7	0,0977	0,098	0,0970
8	0,0464	0,046	0,0461
9	0,0097	0,010	0,0097
total	1,9450	1,937	1,9287

En admettant que le calcul de la poussée de l'arc par le procédé graphique soit le plus exact, puisqu'il est basé sur le plus petit nombre de suppositions arbitraires, il résulte du tableau précédent que les résultats donnés par la formule 7) sont aussi approchés que ceux donnés par la formule de Weyrauch.

L'emploi de notre formule ne donne pas dans ce cas particulier un écart supérieur à $^1/_2$ %.

Nous ajouterons que de nombreuses applications, faites dans des conditions différentes, nous ont toujours conduit au même résultat.

Pour donner une idée de l'erreur commise par l'admission $\sum\limits_o^l \frac{\Delta x^2}{\Delta s} = l$, nous avons calculé cette expression, et l'avons trouvée égale à 48,9 tandis que $l = 62,5$; mais comme ce terme multiplié par $\frac{d^2}{\Delta s}$ s'ajoute à $\sum\limits_o^l y^2 = 6088$, l'augmentation subie par le dénominateur de H n'est que de 2 pour mille, et comme nous venons de le voir ne suffit pas encore tout à fait à compenser la diminution que nous avons fait subir à H en supprimant le terme $\sum\limits_o^a \frac{\Delta y . \Delta x}{\Delta s}$ au numérateur.

Poussée due à la température.

En introduisant dans la formule générale la valeur de b, c'est à dire la dilatation de la corde que nous désignerons par $\varepsilon\tau l$ et en supposant l'arc déchargé, il vient

$$\tau \varepsilon l E F = H \left(\sum_o^l y^2 \frac{\Delta s}{d^2} + \sum_o^l \frac{\Delta x^2}{\Delta s} \right)$$

Remplaçant comme précédemment $\sum\limits_o^l \frac{\Delta x^2}{\Delta s}$ par l il vient

$$H_t = \frac{\tau \varepsilon l E F}{\sum\limits_o^l y^2 \frac{\Delta s}{d^2} + l}$$

Si l'arc est de hauteur constante $\frac{\Delta s}{d^2}$ est constant et la formule de la poussée devient

$$H_t = \frac{\tau \varepsilon l E F . \frac{d^2}{\Delta s}}{\sum\limits_o^l y^2 + l \frac{d^2}{\Delta s}}$$

Pour notre cas particulier nous avons

$\tau = 30^0 \quad \varepsilon = 0,000012 \quad l = 62,5$

$E = 18000000\ t \quad F = 0,0512\ m^2 \times 2 = 0,1024$

$\frac{d^2}{\Delta s} = 0,316 \quad \sum\limits_o^l y^2 = 6088,24$

et en substituant

$H_t = 2,23\ t$

Nous avons trouvé par le procédé graphique

$H_t' = 2,28\ t$

et par la formule de Weyrauch

$H_t = 2,124\ t$

Ces trois résultats sont pratiquement égaux.

Si la hauteur de l'arc n'est pas constante, le calcul de la poussée se fait également d'une façon très-rapide; au lieu de calculer le moment des ordonnées de l'arc, il faut multiplier préalablement chacune de celles-ci par le rapport $\frac{\Delta s}{d^2}$ et exécuter les opérations que nous venons de développer.

Par l'application de cette méthode le calcul d'un arc à deux pivots n'est pas plus compliqué que celui d'une poutre reposant librement sur deux appuis.

Turin, Janvier 1887. *J. Röthlisberger*, Ing.

Notiz zur Frage der zulässigen Inanspruchnahme von Eisen und Stahl.

Meine, in Bd. VIII, No. 24 der „Schweiz. Bauzeitung" mitgetheilten, auf Grund der *Wöhler-Bauschinger*'schen Dauerversuche aufgestellten Formeln zur Ermittelung der zulässigen Inanspruchnahme von Eisen und Stahl in Bauconstructionen haben unter anderm auch im „Centralblatt der Bauverwaltung" (1886, No. 52; S. 518) eine Wiedergabe gefunden. Einige hierbei gemachte Bemerkungen veranlassen vorliegende Notiz.

Der Recensent, Hr Z. sagt insbesondere folgendes:

„Uebrigens enthalten auch die Formeln von Prof Tetmajer einen willkürlichen Sicherheitsfactor (3,5); sie schliessen also denselben, schon in No. 17 des Central-Blattes für 1885 (S. 172) gerügten innern Widerspruch ein, wie alle ältern Formeln. Durch die Anwendung jenes Factors werden nämlich die Grenzen, zwischen denen sich die wirklichen Spannungen bewegen, ganz andere, als die bei Ableitung der Formeln benützten. Hiernach dürften die Formeln von Tetmajer kaum von grösserem Werthe sein als diejenigen seiner Vorgänger."

Bezüglich des Vorwurfs der Wahl eines Sicherheitscoefficienten habe ich blos die Bemerkung, dass die Dimensionirung einer Bauconstruction ohne solchen bisher nicht gelungen ist und voraussichtlich auch nicht gelingen dürfte. Jedenfalls wäre ich Hrn. Z. nur zu Dank verpflichtet, wenn er den Weg, der hierbei zu betreten wäre, wenigstens auch nur in grossen Zügen angedeutet hätte. Uebrigens ist mein Sicherheitsfactor keineswegs so willkürlich gewählt, als nach den Aussprüchen des Hrn. Z. anzunehmen ist. Ich wählte diesen vielmehr derart, dass die gewonnenen Formeln zunächst für das Schweissschmiedeisen Zahlenwerthe liefern,