Zeitschrift: Die Eisenbahn = Le chemin de fer
Herausgeber: A. Waldner
Band: 14/15 (1881)
Heft: 7

Artikel: Versuche der Umkehrung des graphischen Potenzirens
Autor: Smreker, Oscar
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9345

Versuche der Umkehrung des graphischen Potenzirens.

Von *Oscar Smreker*, Ingenieur, in Prag.

(Schluss.)

Da nun die Curve hinsichtlich des Doppelpunktes und der Asymptoten hinlänglich untersucht ist, kann man zu weitern Eigenschaften derselben schreiten.

Zunächst ist es selbstverständlich, dass die Curve keinen Rückkehrpunkt haben kann; denn sie besitzt ja einen Doppelpunkt und ist, wie ihre Gleichung angibt, nur von der dritten Ordnung.

Im Allgemeinen hat eine Curve dritter Ordnung neun Wendepunkte, welche je zu drei auf einer Geraden liegen; da aber der Doppelpunkt die Stelle von sechs Wendepunkten einnimmt, so können demgemäss nur mehr noch drei Wendepunkte vorhanden sein; diese drei Wendepunkte werden mittelst der zu der vorliegenden Curve gehörigen Hesse'schen Curve bestimmt, welche die Eigenschaft besitzt, aus der Curve sämmtliche Wende- und Doppelpunkte herauszuschneiden. Um die Gleichung der Hesse'schen Curve aufstellen zu können, muss die Gleichung III zunächst in homogenen Coordinaten dargestellt werden, was jedoch sofort aus Gleichung II abgeleitet werden kann, indem man dort

$$n = 3$$

einsetzt; darnach schreibt sich Gleichung III in homogenen Coordinaten wie folgt:

$$C = x_2^3 + x_1^2\, x_2 - c\, x_1\, x_2\, x_3 - u\, x_1^2\, x_3 = 0 \qquad \text{IV}$$

Bezeichnet man allgemein die zweite Ableitung dieser Function nach zweien der drei Variablen mit:

$$C_{i\,k} = \frac{d^2\, C}{dx_i\; dx_k}$$

wobei i und k Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3 sind, so erhält man die Gleichung der Hesse'schen Curve in homogenen Coordinaten in folgender Determinantenform gegeben:

$$H = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Diese Determinante ist stets symmetrisch, da bekanntlich die Relation allgemein gilt:

$$\frac{d^2\, C}{d\, x_i\; dx_k} = \frac{d^2\, C}{d\, x_k\; d\, x_i}$$

Bildet man nun diese Determinante in Bezug auf die Gleichung IV, so erhält man:

$$H = \begin{vmatrix} 6\, x_2 & , (2\, x_1 - c\, x_3) & , \quad - c\, x_1 \\ (2\, x_1 - c\, x_3), & (2\, x_2 - 2\, u\, x_3) & , (- c\, x_2 - 2\, u\, x_1) \\ - c\, x_1 & , (- c x_2 - 2\, u\, x_1), & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Daraus folgt durch Ausrechnung als Gleichung der Hesse'schen Curve:

$$H = 3\, c^2\, x_2^3 + 12\, u\, c\, x_1\, x_2^2 + (12\, u^2 + c^2)\, x_1^2\, x_2 - 4\, u\, c\, x_1^3 + \\ + u\, c^2\, x_1^2\, x_3 + c^3\, x_1\, x_2\, x_3 = 0. \qquad \text{V}$$

Sucht man die unendlich fernen Punkte dieser Curve dritter Ordnung, indem man ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden aufsucht, so sieht man, dass diese Curve mit der ihr zu Grunde gelegten keine Punkte im Unendlichen gemeinsam hat; folglich müssen die drei noch zu bestimmenden Wendepunkte im Endlichen liegen. Aus der nähern Betrachtung der Construction und der Gleichung der besprochenen Curve geht es unzweifelhaft hervor, dass dieselbe von einer Geraden nur dann in drei reellen endlichen Punkten geschnitten werden kann, wenn diese Gerade die Schleife des Doppelpunktes schneidet. Da aber auf der Schleife kein Wendepunkt liegen kann, die drei Wendepunkte jedoch auf einer Geraden liegen müssen, so folgt hieraus, dass nur ein einziger Wendepunkt reell vorhanden sein kann; die nähere Bestimmung desselben, die ohne jede Schwierigkeit vorgenommen werden kann, hat jedoch kein allgemeines Interesse.

Mit Hülfe der Plücker'schen Formeln können die übrigen Singularitäten der Curve leicht bestimmt werden, was der Vollständigkeit halber hier auch durchgeführt werden soll.

Bezeichnet:

m die Ordnung der Curve; diese ist im vorliegenden Falle, wie die Gleichung III lehrt, gleich 3, also:

$$m = 3$$

n die Classe der Curve;

d die Anzahl der Doppelpunkte; nach dem Vorhergehenden hier gleich 1, also:

$$d = 1$$

t die Anzahl der Doppeltangenten;

r die Anzahl der Rückkehrpunkte oder Spitzen; da keine solchen hier vorhanden sind, so folgt:

$$r = 0$$

i die Anzahl der Wendepunkte oder Inflexionstangenten; da die Curve drei Wendepunkte, wie nachgewiesen, besitzt, so ist:

$$i = 3.$$

Die Classe der Curve ergibt sich aus der folgenden Relation:

$$n = m\,(m - 1) - 2\, d - 3\, r$$

ausgerechnet, ergibt dies

$$n = 4$$

Die Anzahl der Doppeltangenten f bestimmt sich nach der Formel:

$$t = \frac{n\,(n - 1) - m - 3\, i}{2}$$

woraus folgt:

$$t = 0$$

Zur vollständigen Untersuchung der Curve gehört noch die Bestimmung ihrer Maxima und Minima, die nun im Folgenden noch erfolgen soll.

Die Gleichung der Curve schreibt sich nach III wie folgt:

$$y^3 + y\,[x^2 - c\, x] - u\, x^2 = 0$$

Diese implicite Function nach x differentiirt, ergibt wie früher:

$$\frac{d\, y}{d\, x}\,(3\, y^2 + x^2 - c\, x) + y\,(2\, x - c) - 2\, u\, x = 0$$

Als Bedingung für den Eintritt von Maxima oder Minima besteht die Erfüllung der Relation:

$$\frac{d\, y}{d\, x} = 0$$

d. h. in unserem Falle:

$$\frac{d\, y}{d\, x} = \frac{2\, u\, x - 2\, x\, y + c\, y}{3\, y^2 + x^2 - c\, x} = 0$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden für jene Punkte der Curve, deren Coordinaten x und y die Gleichung

$$2\, x\, y - 2\, u\, x - c\, y = 0 \qquad \text{VI}$$

erfüllen. Wie man sofort übersieht, ist der durch diese Gleichung dargestellte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, deren einfachste Construction im Folgenden speciell abgeleitet werden soll, da von derselben später noch einmal Gebrauch gemacht werden wird.

7. Ist eine reelle Grösse a gegeben, so ist es stets möglich, auf unendlich mannigfache Weise zwei reelle Werthe p und q so zu bestimmen, dass

$$p\, q = 4\, a$$

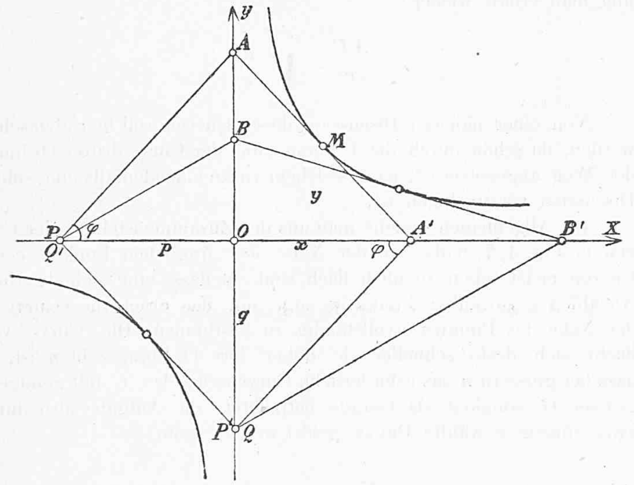
ist. Wird a positiv angenommen, so werden p und q stets das gleiche Vorzeichen haben, also entweder werden beide gleichzeitig positiv oder beide gleichzeitig negativ sein.

Trägt man in Fig. 5 vom Coordinatenanfangspunkte O aus die beiden zusammengehörigen Werthe von p und q nach Grösse und Richtung auf die beiden Coordinatenaxen auf, so dass

$$O P = -p$$
$$O Q = -q$$

wird, wobei zu bemerken ist, dass die beiden Grössen lediglich desshalb negativ aufgetragen wurden, um die Figur nicht zu verwirren.

Fig. 5



Betrachtet man nun die beiden so erhaltenen Punkte P und Q als die Scheitel zweier projectivischer Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen einander parallel sind, also:

$$P A \parallel Q A'$$
$$P B \parallel Q B'$$

u. s. w., so wird die Punktreihe $A, B, \ldots$, welche vom Strahlenbüschel $[P, A B \ldots]$ auf der y-Axe herausgeschnitten wird, projectivisch sein zur Punktreihe $A' B' \ldots$, welche vom Strahlenbüschel $[Q, A' B' \ldots]$ auf der x-Axe erzeugt wird. Die Verbindungslinien

$$A A', \; B B' \ldots$$

u. s. w., je zweier entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen umhüllen stets einen Kegelschnitt. Rechnet man den Coordinatenanfangspunkt O zur x-Axe, so entspricht ihm der unendlich ferne Punkt der y-Axe, folglich muss die y-Axe eine Asymptote an den Kegelschnitt sein; das Gleiche gilt von der x-Axe, denn wird der Anfangspunkt O zur y-Axe gerechnet, so entspricht ihm der unendlich ferne Punkt der x-Axe. Der erzeugte Kegelschnitt ist also eine Hyperbel und zwar eine gleichseitige, weil ihre Asymptoten die beiden auf einander senkrecht stehenden Coordinatenaxen sind; die nächste Aufgabe ist es nun, den Zusammenhang der Gleichung dieser Hyperbel mit den beiden Grössen p und q festzustellen.

Sei b die reelle Halbaxe dieser Hyperbel, so stellt sich ihre Gleichung auf die Asymptoten als die Coordinatenaxen bezogen, bekanntlich, wie folgt, dar:

$$x y = \frac{b^2}{2}$$

Betrachtet man einen beliebigen Punkt M dieser Hyperbel, so muss dieser die Länge der Tangente zwischen den beiden Asymptoten halbiren, so dass

$$A M = M A'$$

wird. Bezeichnen x und y ferner die beiden Coordinaten dieses Punktes M, so folgt aus der soeben angeführten Eigenschaft:

$$x = \frac{1}{2} \, O A'$$

$$y = \frac{1}{2} \, O A$$

Diese beiden Grössen $O A$ und $O A'$ können jedoch unmittelbar durch die Grössen p und q ausgedrückt werden, wenn man den Winkel φ einführt, den der Strahl $P A$ und $Q A'$ mit der positiven x-Axe einschliesst; denn es folgt:

Aus Dreieck $O A P$:

$$O A = O P \,.\, tg\,\varphi = p \,.\, tg\,\varphi$$

Aus Dreieck $O A' Q$:

$$O A' = O Q \,.\, cotg\,\varphi = q \,.\, cotg\,\varphi$$

Darauf ergibt sich:

$$x = \frac{1}{2} \,.\, q \,.\, cotg\,\varphi$$

$$y = \frac{1}{2} \, p \,.\, tg\,\varphi$$

Dies in die obige Gleichung

$$x y = \frac{1}{2} \, b^2$$

der gleichseitigen Hyperbel eingesetzt, ergibt:

$$x y = \frac{1}{2} \, b^2 = \frac{1}{4} \, p \,.\, q$$

Berücksichtigt man ferner, dass in der Einleitung die beiden Grössen p und q so bestimmt wurden, dass dieselben die Bedingung erfüllen:

$$p q = 4 a$$

so folgt als Gleichung der auf die oben angegebene Weise erzeugten gleichseitigen Hyperbel:

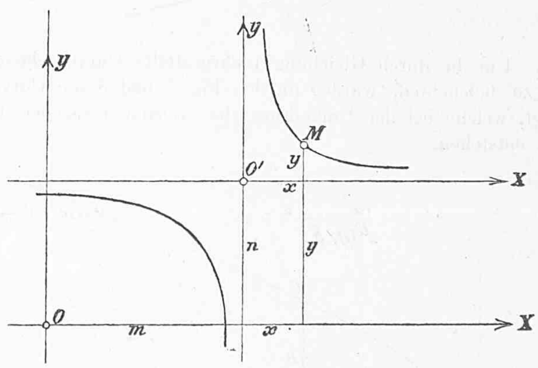
$$x y = a = \frac{b^2}{2}$$

Um diese Gleichung auf die unter VI erscheinende Form zu bringen, ist es nur nöthig eine Transformation des Coordinatensystems vorzunehmen und zwar nur eine Parallelverschiebung, wie sofort nachgewiesen werden wird.

Die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die beiden Asymptoten als Coordinatenaxen, kann stets in folgender Form dargestellt werden:

$$X \,.\, Y = a$$

Fig. 6



Nimmt man nun ein neues Coordinatensystem mit dem Ursprung O an, dessen beide Axen jedoch parallel zu den beiden Asymptoten sind; sind ferner m und n die Coordinaten des Mittelpunktes O' der Hyperbel, bezogen auf das neue System, so bestehen zwischen den Coordinaten X, Y eines Punktes, auf das neue System bezogen, folgende Relationen:

$$X = x - m$$
$$Y = y - n$$

Dies in die Gleichung der Hyperbel eingesetzt, ergibt folgende Form der neuen Gleichung:

$$x y - n x - m y = (a - m n) \qquad \text{VII}$$

Diese Gleichung VII hat eine der Gleichung VI ganz analoge Gestalt. Für die Hyperbel, welche durch Gleichung VI repräsentirt ist, hat man nur zu setzen:

$$n = u$$
$$m = \frac{1}{2}\,c$$

Ferner muss noch sein:

$$a - m\,n = 0$$
$$a = m\,n = \frac{u\,c}{2}$$

daher:

$$p\,q = 4\,a = 2\,u\,c$$

In Fig. 4 wurde diese Hyperbel punktirt eingezeichnet; ihr Mittelpunkt ist O' und hat derselbe in Bezug auf das ursprüngliche Coordinatensystem auch die beiden oben gerechneten Coordinaten m und n. Die beiden Grössen p und q wurden der Einfachheit halber zu

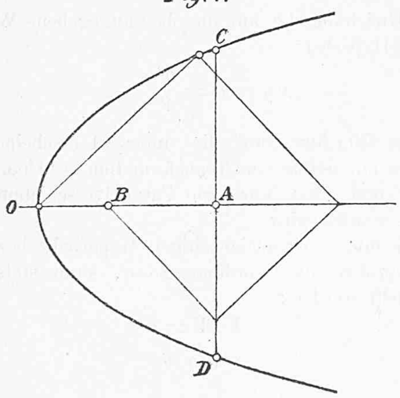
$$p = O'\,P = c$$
$$q = O'\,Q = 2\,u$$

gewählt, womit sie der obigen Bedingung Genüge leisten. Diese so erhaltene Hyperbel schneidet aus der Curve das Maximum M_1 und das Minimum M_2 heraus; ferner hat die Hyperbel die eine Asymptote mit der Curve gemeinsam, denn die einzige reelle Asymptote ist, wie früher nachgewiesen wurde, die Parallele zur x-Axe im Abstande

$$y = u$$

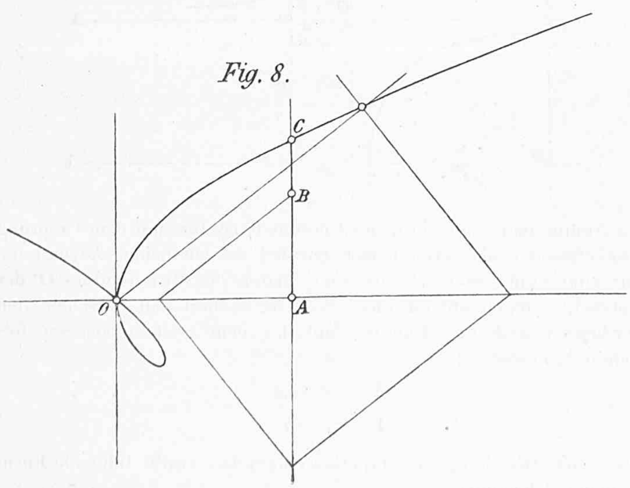
von derselben.

Fig. 7.



8. Um die durch Gleichung I dargestellte Curvenschaar noch etwas zu beleuchten, wurden in den Fig. 7 und 8 die Curven gezeichnet, welche bei der Umkehrung der vierten resp. der fünften Potenz entstehen.

Fig. 8.



Es ist in Fig. 7

$$O\,A = c$$
$$A\,B = u$$

aufgetragen und erhält man:

$$\frac{A\,C}{c} = +\sqrt[4]{\frac{u}{c}}$$
$$\frac{A\,D}{c} = -\sqrt[4]{\frac{u}{c}}$$

In Fig. 8 ist ebenfalls:

$$O\,A = c$$
$$A\,B = u$$

und man erhält wieder:

$$\frac{A\,C}{c} = \sqrt[5]{\frac{u}{c}}$$

Von einer näheren Discussion dieser Curven soll hier abgesehen werden, da schon durch die Untersuchung der Curve dritter Ordnung der Weg angegeben ist, nach welchem vorkommendenfalls eine solche Discussion vorzunehmen ist.

Im Allgemeinen ersieht man aus der Zusammenstellung der Curven in Fig. 4, 7, 8 dass in der Nähe des fraglichen Punktes c die Curven meist schon ziemlich flach sind, so dass eine sehr geringe Anzahl gut gewählter Punkte genügt, um das Stück der Curve in der Nähe des Punktes c vollständig zu bestimmen. Die Curve verflacht sich desto schneller, je höher ihre Ordnungszahl n ist, so dass bei grössern n das erforderliche Curvenstück bei C mit genügend grosser Genauigkeit als Gerade betrachtet, die Aufgabe also durch zwei günstig gewählte Punkte gelöst werden kann.

Gotthardbahn.

Laut einem Referate der „N. Z. Z.“ vom 19. Januar hat Herr Heim, Professor der Geologie in Zürich, in der Sitzung der naturforschenden Gesellschaft vom 6. December 1880 über einige Beobachtungen an der Gotthardlinie, deren Nordrampe er im verwichenen Herbst begangen hat, berichtet.

Sonderbarer Weise enthält das Referat ausser einer kurzen Beschreibung von Gletscherschliffen und Erosionskesseln meist nur technische Beschreibungen und eine scharfe Kritik der Bauten, welche uns veranlassen, allzu grosse Ungenauigkeiten zu widerlegen.

Das Referat beginnt mit einer Beschreibung der Druckpartie bei 2800 m im grossen Gotthardtunnel. Daselbst soll das Gestein von allen Seiten derart in den Tunnel hineinwachsen, dass die stärksten Holzsperrungen zerdrückt werden.

Dieser Aussage gegenüber finden wir uns veranlasst, zu erklären, dass, seitdem unter directer Leitung der Gesellschaftsorgane die Reconstruction dieser Tunnelstrecke ausgeführt wird, keine nennenswerthe Beschädigung des Holzeinbaues stattgefunden hat. Wo nicht einmal ein Einbeissen der Stempel in die Kronbarren stattfindet, kann von Zerdrücken der stärksten Holzsperrungen keine Rede sein und, dem Zustand des Einbaues nach zu schliessen, könnte man sich beinahe fragen, ob eigentlich eine Druckpartie existire.

Alsdann liess sich Herr Prof. Heim in eine ziemlich detaillirte Kritik der Bauten an der Nordrampe ein. Er findet, dass in Folge des Sparsystems den Gefahren des Gebirges, wie Felsstürze, Wildbachausbrüche u. s. w., nicht ganz in genügendem Maasse vorgebeugt werde. Um die Tunnelgewölbe so kurz als möglich zu machen, sollen die Portale so tief in die Felswände eingesetzt werden, dass an den Eingängen Felsbrüche drohen; offene, steilwandige Einschnitte werden gesprengt, wo nur Deckengewölbe die Bahn sicher schützen könnten und mit den Wildbächen werde stellenweise verfahren, als ob Niemand deren Wesen kennen würde.

Endlich hebt er speciell hervor, dass der Wattinger Tunnel in ungenügendem Umfange verkleidet werde. Ueberhaupt sei Herr Prof. Heim mit vielen Ingenieuren der Meinung, dass man als Sicherheitsmittel zur gänzlichen Auswölbung der Tunnel schreiten müsse.

Wir denken, einige Erläuterungen über die gerügten Punkte werden für unsere Fachgenossen von Interesse sein.