Zeitschrift: Die Eisenbahn = Le chemin de fer

Herausgeber: A. Waldner

Band: 12/13 (1880)

Heft: 21

Inhaltsverzeichnis

Beitrag zur Bogentheorie.[1]

Von Dr. *J. B. Goebel*, Ing. der Süddeutschen Brückenbau-Actiengesellschaft.

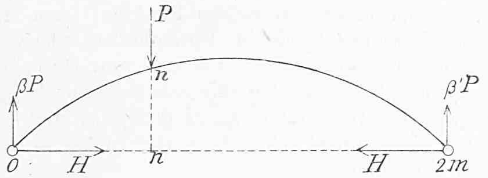
13. Im Anschluss an die *allgemein* gültigen Entwickelungen des vorigen Aufsatzes soll hier zunächst gezeigt werden, wie auch bei Bogen mit Auflagergelenken — unter den früheren Voraussetzungen — die Widerlagerreactionen in sehr einfacher Weise bestimmt werden können.

Die Richtungslinien der letzteren müssen in diesem Falle durch die Auflagerpunkte gehen.

Bei *Vertical*actionen kann man sich die Widerlagerreactionen immer zusammengesetzt denken aus verticalen Componenten, welche die nämlichen sind, wie die Auflagerreactionen eines einfachen geraden Balkens von derselben Spannweite und Belastung und aus Componenten (von entgegengesetzten Intensitäten), deren gemeinsame Richtungslinie die Auflagersehne ist.

In unserem Falle — und überhaupt bei *gleicher Höhe* der Auflagerpunkte — sind also die letzteren Componenten die *Horizontal*componenten der Widerlagerreactionen.

Fig. 6



Wirkt (Fig. 6) auf den Bogen im Theilpunkt n eine Verticalkraft P, so entstehen für die beiden Endpunkte 0 und $2m$ Widerlagerreactionen, deren Verticalcomponenten beziehlich gleich $\beta' P$ und βP sind, wenn, wie üblich, die Verhältnisse $\frac{n}{2m}$ und $\frac{2m-n}{2m}$ gleich β und β' resp. gesetzt werden. Die noch unbekannten Horizontalcomponenten sollen mit H bezeichnet werden.

Wir bestimmen nun die Lagenänderung der beiden Bogenenden gegen einander, welche unter dem *alleinigen* Einflusse des Systems der Verticalkräfte erfolgen würde. Beziehen wir die Bewegungen der Endquerschnitte etwa auf den (unbeweglich gedachten) Querschnitt n, so kommen offenbar als Rotationen, welche die Endquerschnitte 0 und $2m$ in die neuen Lagen überzuführen haben, die Rotationen $\beta' P\,(0,n)\,0$ und $\beta P\,(n,2m)\,2m$ resp. in Betracht. Die erste der beiden Rotationen ist von positiver, die zweite von negativer Amplitude. Soll, wie früher, die Bewegung des Endquerschnitts $2m$ auf den Endquerschnitt 0 bezogen werden, so ist die Rotation $\beta P\,(n,2m)\,2m$ des Endquerschnitts $2m$ mit einer Rotation zusammenzusetzen, welche der (dem Endquerschnitt 0 eigenthümlichen) Rotation $\beta' P\,(0,n)\,0$ *entgegengesetzt* ist: Die letztere soll mit $-\beta' P\,(0,n)\,0$ bezeichnet werden. Es ergibt sich also die Rotation, welche nunmehr die relative Lagenänderung repräsentirt, als Resultirende zweier Drehungen von negativen Amplituden.

Ein analoges Raisonnement gilt hinsichtlich der Horizontalkräfte H. Auch diese bedingen für sich *allein* eine Rotation ϱ des Endquerschnitts $2m$ — bezüglich des unbeweglich gedachten Endquerschnitts 0 —, deren Momentancentrum, auch ohne dass die Intensität der Horizontalkräfte H bekannt ist, als gegeben angesehen werden darf (Gleich. 14).

Schliesslich kommt noch jene Lagenänderung des Endquerschnitts $2m$ — dem Endquerschnitt 0 gegenüber — in Betracht, welche als Folge der um die beiden Gelenkpunkte möglichen Drehungen der Bogenenden erscheint. Das Momentancentrum der Rotation ϱ', welche diese Lagenänderung darstellt, liegt natürlich auf der Auflagersehne.

Die vier Elementarrotationen $-\beta' P\,(0,n)\,0$, $\beta P\,(n,2m)\,2m$ ϱ und ϱ' müssen sich offenbar neutralisiren. Daraus folgt z. B., dass die Summe der Momente der drei ersteren bezüglich der Auflagersehne gleich Null sein muss. Diese Bedingung liefert eine Gleichung zur Bestimmung des Horizontalschubs H.

Mittelst der Gleichungen (5) und (6a) leitet man leicht ab, dass die Abscisse (§ 4) des Momentancentrums $(n-1,n)\,0$ aus der Formel erhalten werden kann

$$(24)\qquad x_{(n-1,n)\,0} = \lambda\left[2n - 1 + \frac{1}{6\,(2n-1)}\right].$$

Die Ordinate desselben Momentancentrums berechnet sich hiernach als

$$(25)\qquad y_{(n-1,n)\,0} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{y_n - y_{n-1}}{6\,(2n-1)}.$$

Bei negativ drehender Verticalkraft P haben wir nach Gleichung (5) die Amplitude

$$(26)\qquad \Delta\delta_{P(n-1,n)\,0} = -\frac{\mu\lambda^2 P}{2}(2n-1).$$

Das Moment der Rotation $P\,(n-1,n)\,0$ bezüglich der x-Axe ist also

$$(27)\qquad \mathfrak{M}_{P(n-1,n)\,0} = -\frac{\mu\lambda^2 P}{12}\Big[3\,(2n-1)(y_n + y_{n-1}) + y_n - y_{n-1}\Big].$$

Hieraus ergibt sich das Moment der Rotation $P\,(0,n)\,0$ — bezüglich der x-Axe —

$$(28)\qquad \mathfrak{M}_{P(0,n)\,0} = \sum_{i=1}^{i=n}\mathfrak{M}_{P(i-1,i)\,0} = -\frac{\mu\lambda^2 P}{12}\left[y_n + 3\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)(y_{i-1} + y_i)\right].$$

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir das Moment der Rotation $-\beta' P\,(0,n)\,0$, mit $\mathfrak{M}'$ das Moment der Rotation $\beta P\,(n,2m)\,2m$ — hinsichtlich der x-Axe. Gleichung (28) liefert ohne Weiteres

$$\mathfrak{M} = -\frac{\mu\beta'\lambda^2 P}{12}\left[y_n + 3\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)(y_{i-1} + y_i)\right].$$

und analog, mit Hinsicht auf die Symmetrie des Bogens, ergibt sich

$$\mathfrak{M}' = -\frac{\mu\beta\lambda^2 P}{12}\left[y_n + 3\sum_{i=1}^{i=2m-n}(2i-1)(y_{i-1} + y_i)\right].$$

Wir setzen

$$(29)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)(y_{i-1} + y_i) = b_n \quad\text{und}$$

$$\sum_{i=1}^{i=2m-n}(2i-1)(y_{i-1} + y_i) = b_{2m-n}.$$

Dann wird, da $\beta + \beta' = 1$,

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' = -\frac{\mu\lambda^2 P}{12}\Big[y_n + 3\,(\beta' b_n + \beta\, b_{2m-n})\Big].$$

In Folge der Symmetrie des Bogens existiren zwischen den Zahlen b_n und b_{2m-n} mehrfache Beziehungen. Denken wir b_n als die kleinere der beiden Zahlen — n also kleiner als m — und wird z. B. die Summe

$$(30)\qquad (y_n + y_{n+1}) + (y_{n+1} + y_{n+2}) + \cdots (y_{m-1} + y_m) = z_n$$

gesetzt (n kann höchstens gleich $m-1$ sein), so findet sich

$$b_{2m-n} = b_n + 4\,m z_n$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung, sowie der Relation $n = 2\beta m$ ergibt sich demnach mit Bezug auf eine Belastung P im Punkte n der linken Bogenhälfte

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' = -\frac{\mu\lambda^2 P}{12}\Big[y_n + 3\,(b_n + 2\,n z_n)\Big].$$

Das Moment $\mathfrak{M}''$ der Rotation ϱ bezüglich der x-Axe erhält man (§ 8) aus der Gleichung

$$\mathfrak{M}'' = \frac{\mu\lambda H a}{2}, \text{ wenn hierin}$$

$$(31)\qquad a = \sum_{i=1}^{i=m}\left[(y_{i-1} + y_i)^2 + \frac{1}{3}(y_{i-1} - y_i)^2\right].$$

Die Bedingung $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = 0$ liefert nunmehr die Relation

$$(32)\qquad H = \frac{\lambda P}{6\,a}\Big[y_n + 3\,(b_n + 2\,n z_n)\Big].$$

[1] Als Fortsetzung des in den Nrn. 12—15 erschienenen Aufsatzes.