**Zeitschrift:** Die Eisenbahn = Le chemin de fer

**Band:** 12/13 (1880)

**Heft:** 12

## Inhaltsverzeichnis

# Beitrag zur Bogentheorie.

Von Dr. *J. B. Gœbel*, Ingenieur der hessischen Ludwigs-Eisenbahn in Mainz.

In der Theorie des elastischen Bogens ist die Zusammensetzung der unendlich kleinen Drehungen, welche die einzelnen Bogenquerschnitte bei eintretender Biegung erleiden, von besonderer Wichtigkeit.

Wirkt in der „Bogenebene“ nur ein Kräftepaar auf den betrachteten Querschnitt, so dreht sich derselbe um seine (horizontale) Schwerpunktaxe; wirkt eine Kraft senkrecht zum Querschnitt, so dreht sich derselbe — nach Culmann's Bezeichnungsweise — um die Antipolare des Angriffspunktes der betreffenden Kraft in Bezug auf die Trägheitsellipse des Querschnittes u. s. w. Es sehen nun aber die meisten Schriftsteller von der wirklichen Zusammensetzung dieser unendlich kleinen Rotationen gänzlich ab, und ermitteln die am Bogen vorkommenden Widerlagerreactionen mit Hülfe analytischer Beziehungen.

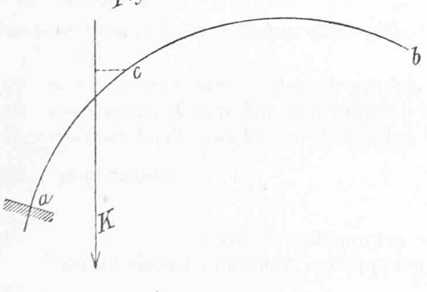
Im Folgenden soll ein Beispiel der Anwendung der Lehre vom Gleichgewicht der unendlich kleinen Rotationen auf die Statik des elastischen Bogens gegeben werden.

Wir stellen uns zur Aufgabe, für einen symmetrischen Bogen, ohne Gelenk, von sonst beliebiger Form und von „constantem $J \cos \varphi$“ ($J =$ Trägheitsmoment, $\varphi =$ Neigungswinkel irgend eines Bogenquerschnittes gegen die Verticale) die Widerlagerreactionen zu bestimmen.

Von den am Bogen vorkommenden Formänderungen sollen hier nur diejenigen berücksichtigt werden, welche von den *Momenten* der äusseren Kräfte herrühren.

1. Es sei (Fig. 1) durch das **Curvenstück** $a\,c\,b$ die Schwerpunktsaxe irgend eines Bogens gegeben. Wir denken uns, wie bei Ableitung der Gleichungen der Formänderungen gebräuchlich, etwa das linke Bogenende „fest aufsitzend“, das andere frei beweglich. Wird nun durch eine beliebige Kraft $K$, die man sich etwa durch eine starre Linie — mit einem gewissen Punkt $c$ der Bogenaxe fest verbunden denken mag, die Elasticität des Bogenstücks $a\,c$ in Anspruch genommen, so dreht sich, wie erwähnt, jeder Querschnitt — in Folge des ihn betreffenden Momenteneinflusses — um seine horizontale Schwerpunktsaxe. Es handelt sich also um die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen von parallelen Axen, die in ihrer Aufeinanderfolge einen (zur Bogenebene senkrechten) cylindrischen Flächenstreifen von der Leitlinie $a\,c$ bilden. Die einzelnen Punkte des Bogenstückes $a\,c$ sind demnach als „Momentancentra“ für die Bewegung der in der Bogenebene liegenden, mit dem betreffenden Bogenquerschnitt fest verbunden gedachten Punkte aufzufassen.

Fig. 1.




Bezeichnet $d\,s$ das Bogenelement, $J$ das Trägheitselement, $\varepsilon$ den Elasticitätsmodul und $P$ das Moment der Kraft $K$ bezüglich irgend eines Querschnittes, so ergibt sich bekanntlich die Amplitude $d\,\varDelta\delta$ der Rotation (d. h. der unendlich kleine Drehungswinkel in Theilen eines Kreisbogens vom Radius Eins gemessen) jenes Querschnittes aus der Formel

$$(1) \qquad d\,\varDelta\,\delta = \frac{P\,d\,s}{\varepsilon\,J}\ {}^{1)}$$

Durch Zusammensetzung der sämmtlichen durch Einwirkung der Kraft $K$ auf das Bogenstück $a\,c$ hervorgerufenen Elementarrotationen erhält man nach Axe und Amplitude die resultirende Rotation $\varrho$, welche für jeden mit dem Querschnitt $c$ fest verbundenen Punkt der Bogenebene, also auch für das bewegliche Bogenende $b$ massgebend ist. Aufgabe der Berechnung ist es nun, eine Kraft, die Widerlagerreaction, zu finden, welche auf den *ganzen* — bei $a$ eingeklemmten — Bogen wirkend, eine der unendlich kleinen Rotation $\varrho$ entgegengesetzt gleiche Rotation hervorruft.

Dass die Theorie der Zusammensetzung der *unendlich kleinen* Rotationen ohne Weiteres auf Rotationen von den Amplituden $d\,\varDelta\,\delta$, sowie $\varDelta\,\delta$ angewendet werden kann, folgt daraus, dass bei Bestimmung der Widerlagerreactionen nur die Verhältnisse der Amplituden zu einander benutzt werden, dass also Amplitudenwerthe von beliebiger Kleinheit gedacht werden können. Im Grenzfall wären die — etwa mit dem Zeitelement $d\,t$ multiplicirt zu denkenden — Amplituden $\varDelta\,\delta$ und $d\,\varDelta\,\delta$ als unendlich kleine Grössen erster resp. zweiter Ordnung aufzufassen.

2. Unendlich kleine Rotationen von den Axen $\alpha_1, \alpha_2 \,.\,.\, \alpha_n$ und den Amplituden $\varDelta\,\delta_1, \varDelta\,\delta_2 \,.\,.\, \varDelta\,\delta_n$ werden bekanntlich zusammengesetzt, als ob es Kräfte wären von den Richtungslinien $\alpha_1, \alpha_2 \,.\,.\, \alpha_n$ und den Intensitäten $\varDelta\,\delta_1, \varDelta\,\delta_2 \,.\,.\, \varDelta\,\delta_n$ [2]). Es gelten demnach alle Sätze, welche das Gleichgewicht der Kräfte betreffen, auch für das Gleichgewicht der unendlich kleinen Rotationen: es handelt sich bei diesem Dualismus nur um eine Vertauschung von Worten.

So ist z. B. das „Moment“ der resultirenden Rotation in Bezug auf eine beliebige Axe des Raumes gleich der Summe der „Momente“ der componirenden Rotationen hinsichtlich derselben Axe, wenn unter „Moment“ ein ähnliches, statt der Intensität — die Amplitude enthaltendes Product verstanden wird, wie in der Lehre von den Kräften.

So gelten für ein System von Rotationen paralleler Axen dieselben Sätze, welche bei einem System von Parallelkräften auf den Begriff des Mittelpunktes (Schwerpunktes) eines Punktsystems führen u. s. w.

3. Das bei der „Summation der kleinsten Wirkungen“ zur Verwendung kommende Gesetz:

Die Resultirende mehrerer Bewegungsursachen bringt die Resultirende derjenigen Bewegungseffecte hervor, welche die einzelnen componirenden Bewegungsursachen je für sich allein zur Folge haben würden —

in Verbindung mit der hypothetischen Annahme, dass die Amplitude der unendlich kleinen Rotation, welche durch Einwirkung einer und derselben Kraft auf ein und dasselbe Bogenstück — vermöge des in Betracht kommenden Endquerschnitts

1) Als positiver Drehungssinn soll stets der Drehungssinn des Uhrzeigers gelten.

2) Eine erschöpfende Darstellung der Zusammensetzung der Rotationen, vom rein geometrischen Standpunkte aus, enthält *Schells* „Theorie der Bewegung und der Kräfte“. In sehr allgemeiner Auffassung finden sich auch die erforderlichen Sätze in des Verfassers Schriftchen: „Die wichtigsten Sätze der neueren Statik“ (Meyer & Zeller, Zürich). Mit Hülfe der von *Ball* und *Fiedler* gegebenen Theorien und unter Zugrundelegung des für Gleichgewicht überhaupt bestehenden Princips „Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null“ werden dort gleichzeitig für Kräfte und Bewegungen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet. Die ebendaselbst aus Rücksichten elementarer Behandlungsweise gewählte Form der gleichförmigen Rotationen (von *festen* Axen), die sich also in jedem Moment zu einer Rotation von sich gleich bleibender Axe und Geschwindigkeit vereinigen, ist im Wesen mit der Grundform der unendlich kleinen Rotation identisch. Vergl. auch den zugehörigen Aufsatz „Ueber einige Eigenschaften des Cylinderroids“, Zeitsch. für Math. und Phys. Heft V d. Jahrg.