

Zeitschrift: Die Eisenbahn = Le chemin de fer
Herausgeber: A. Waldner
Band: 12/13 (1880)
Heft: 12

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Beitrag zur Bogen Theorie. Von Dr. J. B. Gæbel, Ingenieur der hessischen Ludwigs-Eisenbahn in Mainz. — Statistik des Betriebsmaterials der schweizerischen Eisenbahnen am 1. Januar 1880. Von Controlingenieur R. Abt in Bern. — Bericht über die Arbeiten an der Gotthardbahn im Juli 1880. — Revue: Nouveau mode de construction des chaudières; Festigkeit des Eisens. — Miscellanea: Arlbergbahn; Waggon mit Reservoirs; künstlicher Marmor; Eisenbahn-Unfall auf der Midland-Eisenbahn in England; Luftheizung für Eisenbahnfahrzeuge; Werdenberger Binnengewässer correction; Englische Haartreibriemen. (Correspondenz.) — Necrologie. — Vereinsnachrichten: Stellenvermittlung.

Beitrag zur Bogen Theorie.

Von Dr. J. B. Gæbel, Ingenieur der hessischen Ludwigs-Eisenbahn in Mainz.

In der Theorie des elastischen Bogens ist die Zusammensetzung der unendlich kleinen Drehungen, welche die einzelnen Bogenquerschnitte bei eintretender Biegung erleiden, von besonderer Wichtigkeit.

Wirkt in der „Bogenebene“ nur ein Kräftepaar auf den betrachteten Querschnitt, so dreht sich derselbe um seine (horizontale) Schwerpunktsaxe; wirkt eine Kraft senkrecht zum Querschnitt, so dreht sich derselbe — nach Culmann's Bezeichnungsweise — um die Antipolare des Angriffspunktes der betreffenden Kraft in Bezug auf die Trägheitsellipse des Querschnittes u. s. w. Es sehen nun aber die meisten Schriftsteller von der wirklichen Zusammensetzung dieser unendlich kleinen Rotationen gänzlich ab, und ermitteln die am Bogen vorkommenden Widerlagerreactionen mit Hilfe analytischer Beziehungen.

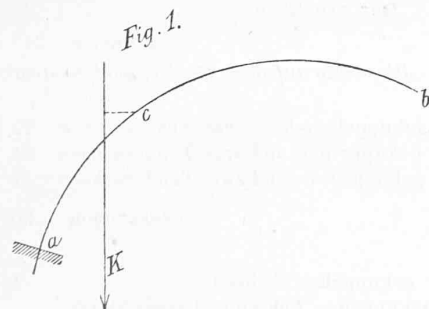
Im Folgenden soll ein Beispiel der Anwendung der Lehre vom Gleichgewicht der unendlich kleinen Rotationen auf die Statik des elastischen Bogens gegeben werden.

Wir stellen uns zur Aufgabe, für einen symmetrischen Bogen, ohne Gelenk, von sonst beliebiger Form und von „constantem $J \cos \varphi$ “ (J = Trägheitsmoment, φ = Neigungswinkel irgend eines Bogenquerschnittes gegen die Verticale) die Widerlagerreactionen zu bestimmen.

Von den am Bogen vorkommenden Formänderungen sollen hier nur diejenigen berücksichtigt werden, welche von den Momenten der äusseren Kräfte herrühren.

1. Es sei (Fig. 1) durch das Curvenstück acb die Schwerpunktsaxe irgend eines Bogens gegeben. Wir denken uns, wie bei Ableitung der Gleichungen der Formänderungen gebräuchlich, etwa das linke Bogenende „fest aufsitzen“, das andere frei beweglich.

Wird nun durch eine beliebige Kraft K , die man sich etwa durch eine starre Linie — mit einem gewissen Punkt c der Bogenaxe fest verbunden denken mag, die Elasticität des Bogenstücks ac in Anspruch genommen, so dreht sich, wie erwähnt, jeder Querschnitt — in Folge des ihn betreffenden Momenteneinflusses — um seine horizontale Schwerpunktsaxe. Es handelt sich also um die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen von parallelen Axen, die in ihrer Aufeinanderfolge einen (zur Bogenebene senkrechten) cylindrischen Flächenstreifen von der Leitlinie ac bilden. Die einzelnen Punkte des Bogenstückes ac sind demnach als „Momentancentra“ für die Bewegung der in der Bogenebene liegenden, mit dem betreffenden Bogenquerschnitt fest verbunden gedachten Punkte aufzufassen.



Bezeichnet ds das Bogenelement, J das Trägheitselement, ϵ den Elasticitätsmodul und P das Moment der Kraft K bezüglich irgend eines Querschnittes, so ergibt sich bekanntlich die Amplitude $d\Delta\delta$ der Rotation (d. h. der unendlich kleine Drehungswinkel in Theilen eines Kreisbogens vom Radius Eins gemessen) jenes Querschnittes aus der Formel

$$(1) \quad d\Delta\delta = \frac{P ds}{\epsilon J} \quad 1)$$

Durch Zusammensetzung der sämtlichen durch Einwirkung der Kraft K auf das Bogenstück ac hervorgerufenen Elementarrotationen erhält man nach Axe und Amplitude die resultierende Rotation φ , welche für jeden mit dem Querschnitt c fest verbundenen Punkt der Bogenebene, also auch für das bewegliche Bogenende b massgebend ist. Aufgabe der Berechnung ist es nun, eine Kraft, die Widerlagerreaction, zu finden, welche auf den ganzen — bei a eingeklemmten — Bogen wirkend, eine der unendlich kleinen Rotation φ entgegengesetzt gleiche Rotation hervorruft.

Dass die Theorie der Zusammensetzung der unendlich kleinen Rotationen ohne Weiteres auf Rotationen von den Amplituden $d\Delta\delta$, sowie $\Delta\delta$ angewendet werden kann, folgt daraus, dass bei Bestimmung der Widerlagerreactionen nur die Verhältnisse der Amplituden zu einander benutzt werden, dass also Amplitudenwerthe von beliebiger Kleinheit gedacht werden können. Im Grenzfall wären die — etwa mit dem Zeitelement dt multiplicirt zu denkenden — Amplituden $\Delta\delta$ und $d\Delta\delta$ als unendlich kleine Grössen erster resp. zweiter Ordnung aufzufassen.

2. Unendlich kleine Rotationen von den Axen $a_1, a_2 \dots a_n$ und den Amplituden $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2 \dots \Delta\delta_n$ werden bekanntlich zusammengesetzt, als ob es Kräfte wären von den Richtungslinien $a_1, a_2 \dots a_n$ und den Intensitäten $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2 \dots \Delta\delta_n$. Es gelten demnach alle Sätze, welche das Gleichgewicht der Kräfte betreffen, auch für das Gleichgewicht der unendlich kleinen Rotationen: es handelt sich bei diesem Dualismus nur um eine Vertauschung von Worten.

So ist z. B. das „Moment“ der resultirenden Rotation in Bezug auf eine beliebige Axe des Raumes gleich der Summe der „Momente“ der componirenden Rotationen hinsichtlich derselben Axe, wenn unter „Moment“ ein ähnliches, statt der Intensität — die Amplitude enthaltendes Product verstanden wird, wie in der Lehre von den Kräften.

So gelten für ein System von Rotationen paralleler Axen dieselben Sätze, welche bei einem System von Parallelkräften auf den Begriff des Mittelpunktes (Schwerpunktes) eines Punktsystems führen u. s. w.

3. Das bei der „Summation der kleinsten Wirkungen“ zur Verwendung kommende Gesetz:

Die Resultirende mehrerer Bewegungsursachen bringt die Resultirende derjenigen Bewegungseffekte hervor, welche die einzelnen componirenden Bewegungsursachen je für sich allein zur Folge haben würden —

in Verbindung mit der hypothetischen Annahme, dass die Amplitude der unendlich kleinen Rotation, welche durch Einwirkung einer und derselben Kraft auf ein und dasselbe Bogenstück — vermöge des in Betracht kommenden Endquerschnitts

1) Als positiver Drehungssinn soll stets der Drehungssinn des Uhrzeigers gelten.

2) Eine erschöpfende Darstellung der Zusammensetzung der Rotationen, vom rein geometrischen Standpunkte aus, enthält Schells „Theorie der Bewegung und der Kräfte“. In sehr allgemeiner Auffassung finden sich auch die erforderlichen Sätze in des Verfassers Schriftchen: „Die wichtigsten Sätze der neueren Statik“ (Meyer & Zeller, Zürich). Mit Hilfe der von Ball und Fiedler gegebenen Theorien und unter Zugrundelegung des für Gleichgewicht überhaupt bestehenden Principes „Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null“ werden dort gleichzeitig für Kräfte und Bewegungen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet. Die ebendasselbst aus Rücksichten elementarer Behandlungsweise gewählte Form der gleichförmigen Rotationen (von festen Axen), die sich also in jedem Moment zu einer Rotation von sich gleich bleibender Axe und Geschwindigkeit vereinigen, ist im Wesen mit der Grundform der unendlich kleinen Rotation identisch. Vergl. auch den zugehörigen Aufsatz „Ueber einige Eigenschaften des Cylinderrohrs“, Zeitsch. für Math. und Phys. Heft V d. Jahrg.