Zeitschrift: Die Eisenbahn = Le chemin de fer

Herausgeber: A. Waldner

Band: 4/5 (1876)

Heft: 10

Artikel: Absteckung von Korbbögen mit Uebergangscurven

Autor: Barsky, A.

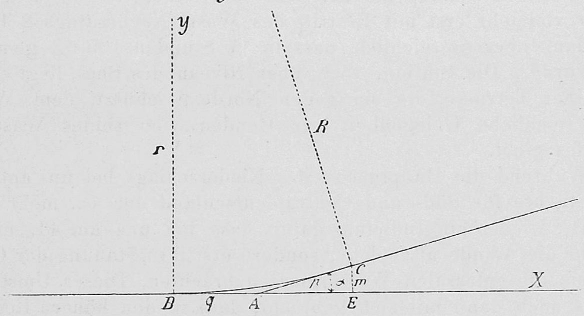
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4902

Absteckung von Korbbögen mit Uebergangscurven.

1. Gleichung der Uebergangscurve.

Die Uebergangscurve von einem Kreisbogen vom Radius r zu einem Kreisbogen vom Radius R ist ein Theil der allgemeinen Uebergangscurve, die den Uebergang von einer Geraden zu einem beliebigen Kreisbogen vermittelt, nämlich der Theil, der an einem Endpunkte den Krümmungsradius r, am andern den Krümmungsradius R hat. Die Gleichung dieser Curve könnte mittelst Transformation der Coordinaten auf die gemeinschaftliche Tangente derselben mit einem der beiden Kreisbögen bezogen werden. Es ist jedoch einfacher diese Gleichung unmittelbar abzuleiten.

Fig. 1.



Sei r der kleinere und R der grössere Radius, BX, Fig. 1, die gemeinschaftliche Tangente des Kreises r und der Uebergangscurve, B ihr Berührungspunkt. Der Krümmungsradius der Curve im Punkte B ist r; in einem beliebigen Punkte D $(x\ y)$ sei derselbe ϱ. Die Ueberhöhung des äussern Schienenstranges im Punkte B ist $\frac{s\,v^2}{g\,r}$, im Punkte D ist sie $\frac{s\,v^2}{g\,\varrho}$ wenn s die Spurweite, $g = 9{,}81^{m}/$ die Beschleunigung der Schwere und v die Fahrgeschwindigkeit pro Secunde bezeichnet (Sarrazin und Oberbeck, Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen, Seite 9). Da $\varrho > r$, so senkt sich der Schienenstrang von B gegen D. Ist die Senkung h und das Gefälle i, so ist

$$h = \frac{x}{i} = \frac{s\,v^2}{g\,r} - \frac{s\,v^2}{g\,\varrho},$$

woraus
$$\varrho = \frac{s\,v^2\,i\,r}{s\,v^2\,i - g\,r\,x} = \frac{P\,r}{P - r\,x}, \tag{1}$$

wenn
$$P = \frac{s\,v^2\,i}{g}$$

Mit einer Annäherung, die der Ableitung der Gleichung der Uebergangscurve überhaupt zu Grunde liegt, kann man setzen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2\,y}{d\,x^2}.$$

Es ist daher

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{P - r\,x}{P\,r},$$

und
$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2\,P\,x - r\,x^2}{2\,P\,r} \tag{2}$$

$$y = \frac{3\,P\,x^2 - r\,x^3}{6\,P\,r}. \tag{3}$$

Aus Gleichung (1) folgt:

$$x = \frac{P}{r\,\varrho}\,(\varrho - r).$$

Es ist daher für den Endpunkt der Curve

$$x = B\,E = l = \frac{P}{r\,R}\,(R - r)$$

$$y = E\,C = m = \frac{2\,R + r}{6\,R\,r}\;l^2 = \frac{P^2\,(2\,R + r)\,(R - r)^2}{6\,r^3\,R^3}.$$

Der Winkel α, den die Endtangente mit der Abscissenaxe bildet, ergibt sich aus Gleichung (2), wenn man in derselben $x = l$ setzt:

$$= \frac{2\,P\,l - r\,l^2}{2\,P\,r} = \frac{P\,(R^2 - r^2)}{2\,r^2\,R^2}. \tag{4}$$

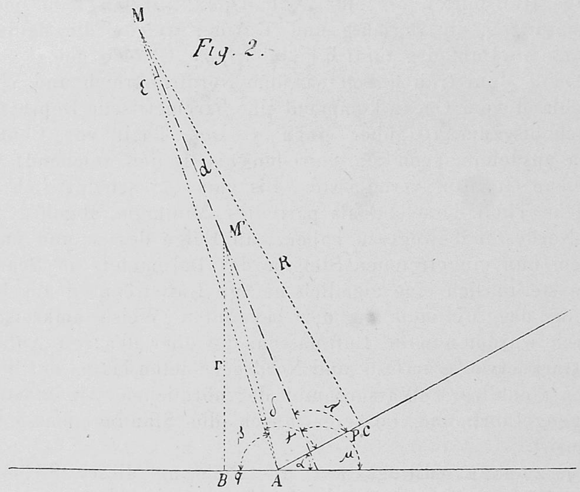
Für die Längen der Endtangenten hat man

$$A\,C = p = \frac{m}{\sin\alpha}, \quad B\,A = q = l - m\cot\alpha.$$

2. Gegenseitige Lage der Kreisbögen und der Uebergangscurve.

Die Lage der beiden Kreise gegeneinander wird bestimmt durch die Entfernung ihrer Mittelpunkte. Seien, Fig. 2, $A\,B = q$

Fig. 2.



und $A\,C = p$ die Endtangenten der Uebergangscurven, M und M' die Mittelpunkte der beiden Kreise. Aus dem Dreieck $A\,B\,M'$ folgt:

$$\tang\beta = \frac{r}{q} \qquad A\,M' = \frac{r}{\sin\beta}. \tag{a}$$

Aus $A\,C\,M$

$$\tang\gamma = \frac{R}{p} \qquad A\,M = \frac{R}{\sin\gamma}. \tag{b}$$

Im Dreieck $M\,A\,M'$ sind daher bekannt die Seiten $A\,M$ $A\,M'$ und der Winkel $M\,A\,M' = \delta = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$.

Die Entfernung der Mittelpunkte ergibt sich daher aus der Gleichung

$$d = \sqrt{\overline{A\,M}^2 + \overline{A\,M'}^2 - 2\,A\,M.\,A\,M'.\cos\delta}. \tag{5}$$

Die Lage der Uebergangscurve zu den Kreisen ist bestimmt durch den Winkel $M'\,M\,A = \varepsilon$, die Länge $M\,A$ und den Winkel γ. Die Grössen $M\,A$ und γ sind schon bekannt, und ε ergibt sich aus der Gleichung

$$\sin\varepsilon = \frac{M'\,A}{d}\,\sin\delta \tag{c}$$

Die Winkel, die die Mittelpunktslinie $M\,M'$ mit den Tangenten p und q bilden, sind:

$$\lambda = \gamma + \varepsilon \tag{6}$$

$$\mu = \lambda + \alpha = \gamma + \varepsilon + \alpha \tag{7}$$

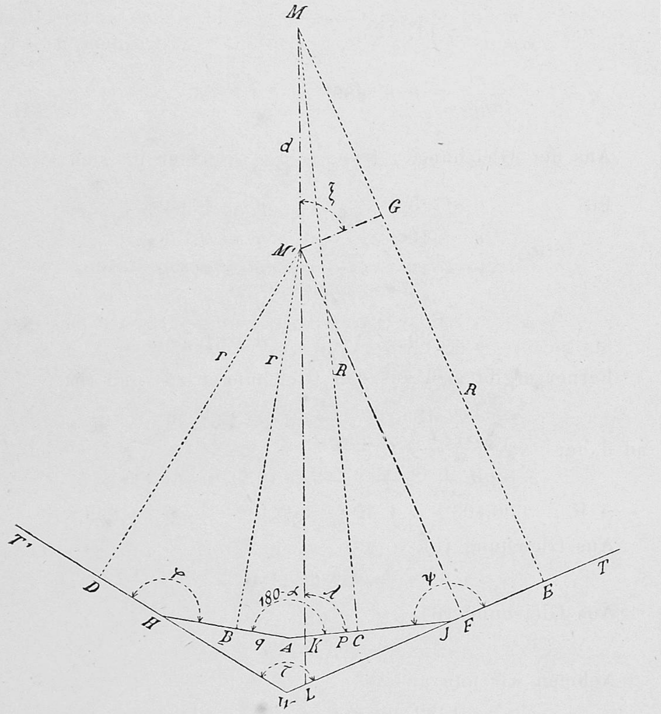
3. Lage des Korbbogens in Bezug auf die Haupttangenten.

a. Korbbogen mit zwei Kreisen.

Damit die Absteckung möglich sei, muss man ausser den Berührungspunkten der beiden Kreise mit den Haupttangenten die Winkel kennen, welche die Endtangenten der Uebergangscurve mit den Haupttangenten bilden.

Seien T und T', Fig. 3, die Tangenten, zwischen welchen

Fig. 3.



ein Korbbogen mit den Radien R und r abgesteckt werden soll. Es ist klar, dass auch nach Einschaltung der Uebergangscurve die Aufgabe eine unbestimmte bleibt; denn, betrachtet man den Korbbogen sammt der Uebergangscurve als starres System und bringt einen der Kreise, z. B. den vom Radius r in einem beliebigen Punkte D in Berührung mit der Tangente T', so lässt sich durch Drehung des ganzen Systems um den Mittelpunkt M' der zweite Kreis (R) in Berührung mit der Tangente T in einem Punkte E bringen. Jeder Lage des Punktes D wird eine andere Lage von E entsprechen. Eine der Tangentenlängen kann daher willkürlich angenommen werden. Wir nehmen an $W D = t'$ sei bekannt, und bestimmen $W E = t$.

Ziehen wir $M'F$ senkrecht und $M'G$ parallel zu T. Dann ist:

$$M' F = t' \sin \tau - r \cos \tau,$$

wenn τ der Tangentenwinkel zwischen T und T' ist. Ferner

$$M G = R - M' F$$

$$\sin \xi = \frac{M G}{d}$$

$$F E = M' G = d \cos \xi.$$

Da nun

$$W F = r \sin \tau + t' \cos \tau,$$

so ist

$$t = W F + F E$$

dadurch bestimmt.

Der Winkel ψ zwischen den Tangenten p und T ergibt sich aus dem Dreieck $J K L$.

$$\psi = 180 - \lambda + \xi.$$

Der Winkel φ zwischen den Tangenten t' und s ergibt sich aus dem Viereck $H W J A$

$$\varphi = 180 + \alpha + \tau - \psi = \alpha + \tau + \lambda - \xi.$$

Hiemit sind alle Grössen bestimmt, die zur Absteckung des Korbbogens sammt der Uebergangscurve nöthig sind, und die Absteckung wäre auf folgende Weise vorzunehmen. Mit den Tangentenwinkeln φ und ψ und den Radien r und R bestimme man die Tangentenlängen $H D = H B$ und $J E = J C$, trage von W aus die Längen $W H = t' - H D$ und $W J = t - J E$ auf, stecke $H A$ unter dem Winkel φ mit T' und $J A$ unter dem Winkel ψ mit T ab, trage die Linien $H D$, $H B$, $J C$ und $J E$ auf und stecke dann zwischen den Punkten D und B einen Kreisbogen vom Radius r ab, zwischen E und C einen Kreisbogen vom Radius R und zwischen den Punkten B und C die Uebergangscurve nach den angegebenen Formeln von der Tangente $B A$ aus.

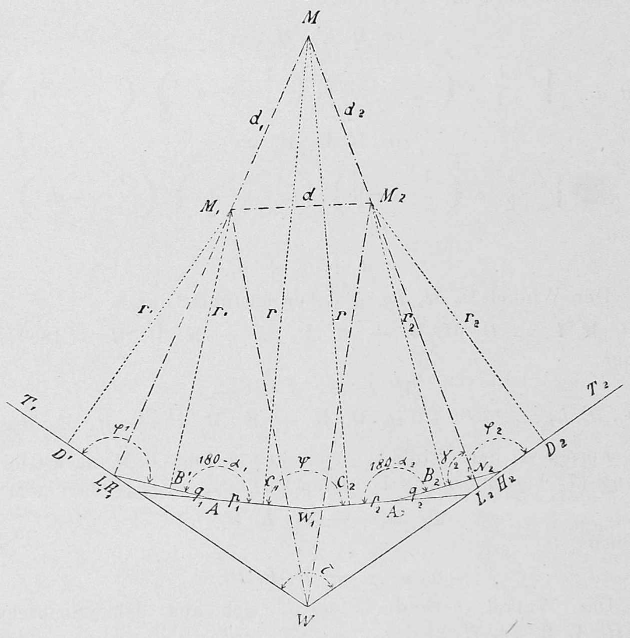
Wegen den Uebergangscurven, welche die Kreisbögen r und R mit den Geraden T' und T verbinden, ist die beschriebene Operation nicht mit den Tangenten T und T' selbst durchzuführen, sondern mit Geraden, die denselben parallel sind und den Radien R und r entsprechende Entfernungen von denselben haben.

Ist die Operation richtig durchgeführt, so müssen sich die Linien $H A$ und $J A$ unter dem Winkel α schneiden und $B A = q$, $C A = p$ sein.

b. Korbbogen mit drei Kreisen.

Seien T_1 und T_2, Fig. 4, die Endtangenten eines Korb-

Fig. 4.



bogens, der aus Kreisbögen mit den Radien r_1, r und r_2 bestehen soll. In diesem Falle können beide Berührungspunkte willkürlich angenommen werden. Denn nimmt man einen D_1 an, so ergibt sich daraus die Lage des Mittelpunktes M_1; der Mittelpunkt M kann dann noch eine beliebige Lage auf dem aus M_1 mit mit dem Radius d_1 beschriebenen Kreise haben, der nach Gl (5) zu bestimmen ist. Wird der Mittelpunkt M auf diesem Kreise angenommen, so ergibt sich die Lage des Mittelpunktes M_2 aus dem Durchschnitt eines aus M mit der entsprechenden Länge d_2 beschriebenen Kreises und einer zu T_2 in der Entfernung r_2 parallelen Geraden. Erst dann ist der Berührungspunkt D_2 bestimmt.

Werden dagegen beide Berührungspunkte D_1 und D_2 angenommen, so ist damit die Lage der Mittelpunkte M_1 und M_2 gegeben. Den Mittelpunkt M erhält man, wenn man aus M_1 einen Kreisbogen mit dem Radius d_1 und aus M_2 einen Kreisbogen mit dem Radius d_2 beschreibt und dieselben zum Durchschnitt bringt.

Der ganze Korbbogen wird aus folgenden fünf Theilen bestehen: dem Kreisbogen D_1 B_1 vom Radius r_1, der Uebergangscurve B_1 C_1, dem Kreisbogen C_1 C_2 vom Radius r, der Uebergangscurve C_2 B_2 und dem Kreisbogen B_2 D_2 vom Radius r_2, abgesehen von den Uebergangscurven, die die Kreisbögen r_1 und r_2 mit den Haupttangenten T_1 und T_2 verbinden. Dem entsprechend kommen folgende sechs Tangenten in Betracht: die Haupttangente T_1, die Tangenten q_1 und p_1 der ersten Uebergangscurve, die Tangenten p_2 und q_2 der zweiten Uebergangscurve und die Haupttangente T_2. Dabei ist angenommen, r sei der grösste der drei Radien.

Damit die Absteckung möglich sei, müssen die Winkel, welche diese Tangenten miteinander bilden, bekannt sein, nämlich die Winkel φ_1, $180-\alpha_1$, ψ, $180-\alpha_2$ und φ_2; α_1 und α_2 ergeben sich aus Gl. (4). Die Winkel φ_1 und φ_2 bestimmen sich folgendermassen: Aus den Dreiecken $W D_1 M_1$ und $W D_2 M_2$ ergibt sich

$$tang\ M_1 W D_1 = \frac{r_1}{t_1} \qquad W M_1 = \frac{r_1}{sin\ M_1 W D_1}$$

$$tang\ M_2 W D_2 = \frac{r_2}{t_2} \qquad W M_2 = \frac{r_2}{sin\ M_2 W D_2}$$

wenn $W D_1 = t_1$, $W D_2 = t_2$ ist. Aus Dreieck $M_1 W M_2$ ist

$$M_1 M_2 = d =$$

$$\sqrt{\overline{W M_1}^2 + \overline{W M_2}^2 - 2\, W M_1 . W M_2 . cos\ M_1 W M_2}$$

$$sin\ M_2 M_1 W = \frac{W M_2}{d}\ sin\ M_1 W M_2 .$$

Aus Dreieck $M_1 M M_2$ ist

$$sin\ M M_1 M_2 =$$

$$\frac{2}{d\, d_1} \sqrt{\frac{1}{2} s \left(\frac{1}{2} s - d\right) \left(\frac{1}{2} s - d_1\right) \left(\frac{1}{2} s - d_2\right)}$$

$$sin\ M M_2 M_1 =$$

$$\frac{2}{d\, d_2} \sqrt{\frac{1}{2} s \left(\frac{1}{2} s - d\right) \left(\frac{1}{2} s - d_1\right) \left(\frac{1}{2} s - d_2\right)},$$

wenn

$$s = d + d_1 + d_2.$$

Der Winkel $D_2 M_2 L_2$ ist daher bestimmt durch

$$D_2 M_2 L_2 = D_2 M_2 W + W M_2 M_1 + M_1 M_2 M - 180^0;$$

daher

$$M_2 L_2 D_2 = 90^0 -$$

$$D_2 M_2 L_2 = 270^0 - (D_2 M_2 W + W M_2 M_1 + M_1 M_2 M).$$

Ferner ist der Winkel γ_2 zwischen q_2 und $M M_2$ nach Gleichung (7) bestimmt. Es ist daher

$$\varphi_2 = \gamma_2 + M_2 L_2 D_2.$$

Ebenso

$$\varphi_1 = \gamma_1 + M_1 L_1 D_1.$$

Der Winkel ψ endlich ergibt sich aus dem Sechseck $W H_1 A_1 W' A_2 H_2$:

$$\psi = 360^0 + \tau + \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi_1 - \varphi_2$$

Die Absteckung wäre nun auf folgende Weise vorzunehmen. Von D_1 gegen W trage man die dem Tangentenwinkel φ_1 und dem Radius r_1 entsprechende Tangentenlänge $D_1 H_1$ auf, von H_1 aus stecke man unter dem Winkel φ_1 die Tangente $H_1 A_1$ ab und trage auf derselben die Länge $H_1 B_1 = D_1 H_1$ auf. Zwischen D_1 und B_1 ist der Kreisbogen vom Radius r_1 abzustecken. Ferner trage man die Länge $B_1 A_1 = q_1$ auf und stecke die Tangente $A_1 W'$ unter dem Winkel α_1 gegen $A_1 H_1$ ab, trage die Länge $A_1 C_1 = p_1$ auf und stecke zwischen B_1 C_1 die Uebergangscurve ab. Das gleiche Verfahren wende man auf der andern Seite des Korbbogens, von D_2 ausgehend, an, bis man zum Punkte C_2 gelangt ist. Verlängert man die Tangenten $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$ und trägt von C_1 und C_2 aus die dem Radius r und dem Tangentenwinkel ψ entsprechende Tangentenlänge auf beiden auf, so müssen die Endpunkte zusammenfallen in W' und der Winkel $C_1 W' C_2$ muss gleich ψ sein. Zwischen C_1 und C_2 ist dann der Kreisbogen vom Radius r abzustecken.

Auch hier ist die Operation nicht mit den Tangenten T_1 und T_2 selbst durchzuführen, sondern mit Geraden, die denselben parallel sind und den Radien r_1 und r_2 entsprechende Entfernungen von denselben haben.

B e i s p i e l. Die Anwendung des Obigen wollen wir an einem Korbbogen mit dem Radius $r = 300$, $R = 600$ erläutern. Wir nehmen an $P = 12\,000$. Dann ist

$$l = \frac{P}{r\, R}\,(R - r) = 20^{m}/$$

$$m = \frac{2\, R + r}{6\, R\, r}\; l^2 = \frac{5}{9} = 0{,}555$$

$$tang\ \alpha = \frac{P\,(R^2 - r^2)}{2\, r^2\, R^2} = 0{,}05 \qquad \alpha = 2^0\ 51'\ 45''$$

$$p = \frac{m}{sin\ \alpha} = 11,\ 125$$

$$q = l - \frac{m}{tang\ \alpha} = 8,\ 889.$$

Aus der Gleichung $y = \dfrac{3\, P - r\, x}{6\, P\, r}\, x^2$ ergibt sich:

für	$x = 5$	$y = 0{,}040$
„	$x = 10$	$y = 0{,}153$
„	$x = 15$	$y = 0{,}328$
„	$x = 18$	$y = 0{,}459$
„	$x = 20$	$y = 0{,}555.$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (a) und (b)

$$\beta = 88^0\ 18'\ 10'' \qquad \gamma\ 88^0\ 56'\ 16''$$

und daher

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma - 180^0 = 0^0\ 6'\ 11''.$$

$$A M = 600{,}103 \qquad A M' = 300{,}132 \qquad d = 299{,}807$$

Aus Gleichung (c):

$$\varepsilon = 0^0\ 6'\ 11''.$$

Aus Gleichung (6):

$$\lambda = 89^0\ 2'\ 27''.$$

Nehmen wir nun an

$$\tau = 138^0\ 36'\ 20'', \qquad t' = 130\ ^{m}/,$$

so wird

$$M' F = 311{,}014 \qquad M G = 288{,}986 \qquad \xi = 74^0\ 33'\ 35''$$

$$F E = 79{,}818, \qquad W F = 100{,}849$$

und daher

$$t = 180{,}667$$

$$\varphi = 155^0\ 56'\ 57'', \qquad \psi = 165^0\ 31'\ 8''.$$

A. Barsky.

* *
*

GESELLSCHAFT

ehemaliger Studirender des eidgenössischen Polytechnikums in ZÜRICH.

Die Generalversammlung in Winterthur wurde von Herrn Präsident W a l d n e r eröffnet und nach schneller Erledigung der rein geschäftlichen Tractanden die B e s p r e c h u n g ü b e r d i e O r g a n i s a t i o n d e s E i d g e n ö s s i s c h e n P o l y t e c h n i k u m s begonnen. Der Vorstand hatte diesen Gegenstand schon in mehreren Sitzungen einlässlich durchberathen und das Resultat seiner Studien dem Vereine in V Thesen vorgelegt, die in der letzten Nr. 9 der „Eisenbahn", Seite 72, zu finden sind.

Herr Oberingenieur J. M e y e r von Lausanne und Herr Stadtbaumeister G e i s e r von Zürich referirten in französischer und deutscher Sprache über die absichtlich allgemein gehaltenen Thesen und berührten dabei auch einzelne Fachschulen. Beide betonten die Nothwendigkeit einer Aenderung in der Organisation der Anstalt. Seit dem nun 22jährigen Bestehen der Schule seien in technischer Beziehung so viele Fortschritte gemacht worden, und die Anforderungen an die Techniker so ausserordentlich gestiegen, dass auch von der Bildungsanstalt derselben erwartet werden müsse, dass die Zöglinge diesen erhöhten Anforderungen entsprechen. Dies könne man nun von der eidgenössischen polytechnischen Schule nicht im vollen Masse sagen. Namentlich werde, wie Herr G e i s e r hervorhob, der practischen Ausbildung eine zu geringe Aufmerksamkeit geschenkt; man überhäufe die Bauschüler z. B. mit Fächern aller Art, während sie in einem der für ihren Beruf allerwichtigsten Fächer, der