Zeitschrift: Revue de Théologie et de Philosophie

Herausgeber: Revue de Théologie et de Philosophie

Band: 26 (1938)

Heft: 107

Artikel: Études critiques : qu'est-ce que la logique? [Henri-L. Miéville] : Étude des rapports de l'axiomatique et de la logique

Autor: Gagnebin, Samuel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-380336

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

QU'EST-CE QUE LA LOGIQUE ?

ÉTUDE DES RAPPORTS DE L'AXIOMATIQUE ET DE LA LOGIQUE

Le principe de toute certitude est la foi de la pensée en elle-même.

H.-L. MIÉVILLE (1).

QU'EST-CE QUE L'AXIOMATIQUE ?

LES MATHÉMATICIENS S'EMPARENT DE LA LOGIQUE. Pour rendre compte de l'ouvrage que M. Ferdinand Gonseth, professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique fédérale, a publié en 1937, il faudrait suivre pas à pas la démonstration qui s'y trouve clairement et simplement exposée (2). Je ne puis espérer le faire en moins de mots que l'auteur, aussi me contenterai-je de situer le problème et d'indiquer quelques résultats, suivant ainsi l'exemple de ces agences de voyages qui prétendent vous faire visiter un pays en touchant seulement quelques points de son territoire.

Et d'abord une question. Comment un professeur de mathématiques, chargé de l'écrasante fonction de faire connaître à de futurs ingénieurs les bases de leur science, prend-il la liberté de s'occuper de philosophie ? Sans doute, il arrive à tout le monde de réfléchir sur la vie et sur l'activité que l'on a, puis le loisir venant de jeter sur le papier quelques pensées élevées, utiles ou profondes. Mais ce n'est pas ainsi que l'entend M. Gonseth. Il a une tout autre ambition. Il s'agit d'apprendre aux mathématiciens, comme aux philosophes eux-mêmes, le sens véritable d'une discipline qui appartenait jusqu'ici au domaine de ces derniers. Comment se légitiment et cette liberté et cette prétention ?

La génération à laquelle j'appartiens apprit la logique dans l'excellent manuel de Louis Liard. Dès la seconde page, nous y lisions que la logique est la science des formes de la pensée ; qu'elle s'occupe d'abord de ces formes en ce qu'elles ont de général et de commun, ensuite de la forme de chaque science particulière. Nous nous représentions donc la logique comme une

(1) Henri-L. MIÉVILLE, *Vers une philosophie de l'esprit ou de la totalité*, Lausanne, 1937, p. 29. — (2) F. GONSETH, *Qu'est-ce que la logique?* Collection des Actualités scientifiques et industrielles, n° 524. Paris, Hermann, 1937.

étude établie sur la distinction aristotélicienne de la forme et de la matière, et qui, par sa nature même, précédait et dominait les autres sciences. L'idée de forme ou du « formel » reste, sans doute, essentielle à la logique. Mais, au cours de ces cinquante dernières années, une véritable révolution s'est produite dans les rapports de la logique avec les autres sciences. Les mathématiciens se sont aperçus que la logique appartient en propre à leur domaine : qu'ils sont obligés de s'en occuper, en tant que mathématiciens, s'ils veulent résoudre les problèmes que pose le développement de la géométrie et de l'arithmétique.

Ces problèmes ont fait l'objet de deux ouvrages de M. Gonseth qui ont pour titres : *Les fondements des mathématiques* et *Les mathématiques et la réalité* (1). Le dernier sera analysé dans cette *Revue* par M. Reymond. Nous ne nous servirons donc qu'accidentellement de cet ouvrage ; cependant, pour faire comprendre la véritable portée de l'étude de M. Gonseth sur la logique, nous nous voyons obligé de consacrer plus de temps à introduire le sujet qu'à l'exposer.

La question que pose la découverte des géométries non-euclidiennes. Dans la première des conférences qu'il fit, sous les auspices de la Faculté des sciences de l'Université de Genève, le célèbre mathématicien E.-L.-J. Brouwer constatait l'unanimité qui régnait parmi les géomètres, au temps de Kant, sur l'objet de leur étude : les mathématiques étaient la science du temps et de l'espace. Mais, dès la première moitié du XIXe siècle, la découverte des géométries non-euclidiennes vint jeter le trouble parmi eux. S'il est possible de construire des géométries cohérentes en dehors de celle d'Euclide et de remplacer par d'autres propositions le postulat d'Euclide concernant l'existence d'une seule non-sécante (la parallèle) d'une droite donnée, menée par un point pris en dehors de cette droite, on peut se demander, tout d'abord, quelle valeur de vérité il faut accorder à cette science qui avait paru jusqu'alors la plus certaine, et ce fut le problème qui occupa les géomètres de Gauss à Poincaré. Mais on peut aussi, en second lieu, se poser des questions de logique : Quelle est la nature des postulats ? Celui d'Euclide, ou ceux qui le remplacent, sont indépendants les uns des autres, puisqu'on peut développer des sciences cohérentes à partir de chacun d'eux. Les autres postulats de la géométrie sont-ils aussi indépendants ? Si les axiomes sont indépendants les uns des autres, comment se fait-il que, pris ensemble, ils n'engendrent pas de contradictions ? Peut-on démontrer l'impossibilité de contradictions à l'intérieur d'une science ainsi fondée ? Ces questions, qui paraissent très théoriques, se sont montrées plus utiles qu'on ne pouvait le penser et ce sont elles qui ont fait progresser les géomètres dans le troublant problème de la

(1) *Les fondements des mathématiques*. Préface de M. J. Hadamard. Paris, Blanchard, 1926. *Les mathématiques et la réalité*. Essai sur la méthode axiomatique. Paris, Alcan, 1936.

vérité de leur science. Et M. Brouwer esquissait l'histoire des diverses écoles qui s'opposent et se succèdent dans l'effort commun pour résoudre ces questions.

L'AXIOMATIQUE est la nouvelle science qui sortit de ces débats. Elle se propose d'étudier les principes de la géométrie ou de l'arithmétique en définissant les notions fondamentales, non par leur signification propre, leur essence comme disait Liard à la suite d'Aristote, mais par leurs liaisons les unes avec les autres, à l'intérieur même de la science à laquelle elles servent de fondements. Ainsi un point, une droite, un plan sont des objets qui n'ont d'autre signification aux yeux de l'axiomaticien que celle-ci, par exemple : un point est sur une droite, une droite passe par un point ; un point (ou une droite) est sur un plan, un plan contient un point (une droite), etc. La possibilité de ces liaisons est affirmée ou niée par les axiomes. On examine ainsi toutes les combinaisons possibles. Cette science, inaugurée par David Hilbert, le mathématicien de Gœttingue, a déjà éclairé bien des problèmes. Elle a permis en particulier de répondre à une question qui préoccupait A. Cayley : Comment se fait-il que les géométries non-euclidiennes, qui contiennent la géométrie d'Euclide comme cas particulier, puissent cependant se construire au moyen des seuls matériaux de la géométrie euclidienne ? La réponse est claire : c'est que ces géométries définissent d'autres liaisons entre des objets qui ont d'abord été utilisés dans la géométrie euclidienne. Les diverses géométries se distinguent donc par leur structure logique. Cette conclusion éclaire la nature de la géométrie et fait comprendre comment on peut, d'après une remarque de Poincaré (1), établir une sorte de dictionnaire permettant de faire correspondre à des théorèmes de l'une des géométries, des théorèmes d'une autre.

UN THÉORÈME DE HILBERT ET L'AXIOMATISATION DE L'ARITHMÉTIQUE. M. Hilbert a pu démontrer que la géométrie, fondée axiomatiquement, ne rencontrera jamais de contradictions. Mais cette démonstration suppose qu'il n'existe pas de contradictions entre les axiomes de l'arithmétique. C'est ici que sont nées les difficultés. L'arithmétique introduit en effet la notion de nombre irrationnel, tel que $\sqrt{2}$, et celle-ci est elle-même fondée sur celle d'*ensemble*. Or, la théorie des ensembles donne lieu à certaines antinomies. Afin de surmonter ces difficultés, Zermelo voulut donner pour base à cette théorie sept axiomes qui devaient, à eux seuls, fournir une définition suffisante d'un ensemble. L'un d'eux souleva tout de suite la discussion. C'est l'axiome dit « de libre choix » : on peut toujours former un ensemble en choisissant un unique élément dans chaque ensemble d'un ensemble d'ensembles. Mais le plus grave reproche qu'on puisse faire à cette façon de procéder, c'est qu'elle prétend se passer de toute notion intuitive préalable. De ce fait il devient, en toute rigueur, impossible de reconnaître à quel objet cette définition est applicable.

(1) *La science et l'hypothèse.* Paris, Flammarion, 1902, p. 57.

En suivant une idée de G. Frege, de Jéna[1], dont les conséquences ont été développées par B. Russell, L. Couturat et A.-N. Whitehead au moyen de l'écriture symbolique, inventée par Peano, on est parvenu à cette conséquence que l'arithmétique est une extension, ou un chapitre, de la logique. Mais réciproquement, après ces recherches, la logique se transforme en une sorte d'algèbre dont les principes ont été codifiés par A.-N. Whitehead et B. Russell dans les célèbres *Principia Mathematica*. Ainsi, la logique prend une extension considérable : la logique classique n'en forme plus que quelques chapitres. Il faut sans doute rendre hommage à ceux qui ont entrepris cet énorme travail d'analyse, qui ne cesse d'ailleurs de se poursuivre et dont nul ne songe à contester la valeur. Mais, comme il fallait s'y attendre, l'exposé de la logique, présenté sous cette forme algébrique, comporte un certain nombre d'axiomes qui ne peuvent être considérés comme évidents. Par exemple, « l'axiome of reducibility » qu'on peut énoncer ainsi : « toutes les affirmations portant nominalement sur des classes peuvent se réduire à des affirmations relatives à ce qu'entraîne l'hypothèse d'une chose quelconque possédant la propriété qui définit la classe »[2]. Nous voici donc en présence du même problème qui se posait pour l'arithmétique. Comment établir que les axiomes de notre science logico-mathématique ne peuvent engendrer de contradictions ? Et il n'y a plus maintenant de recours à une science antérieure.

Le problème posé par D. Hilbert reste donc en définitive sans solution. C'est ce qui fut reconnu avec une parfaite clarté par M. A. Frænkel, de Jérusalem, dans une communication au Congrès Descartes à Paris (août 1937). Pour négative qu'elle soit, cette conclusion n'en a pas moins une portée considérable. On peut l'énoncer ainsi : Il est impossible de démontrer par le formel que le formel n'engendre pas contradiction. Le but de la méthode axiomatique peut alors être précisé : « Cette méthode consiste simplement », dit M. H. Weyl, « à rassembler tous les concepts et les faits fondamentaux, à partir desquels tous les autres concepts et tous les autres faits d'une science peuvent être ou définis ou déduits »[3]. Et ceci nous amène à cette remarque de M. Gonseth, point de départ de la méthode et de toute l'analyse que nous avons à résumer : L'axiomatique suppose que les concepts fondamentaux sont déjà constitués et qu'on sait déjà quelles sortes de relations on peut établir entre eux[4] ; ou encore, pour emprunter les termes mêmes de la préface de son ouvrage, l'axiomatique suppose une doctrine préalable des vérités élémentaires[5].

(1) Le point de vue de Frege est exposé très simplement dans l'ouvrage de B. Russell, traduit par Ph. Devaux sous le titre : *Méthode scientifique en philosophie*. Paris, Vrin, 1929, p. 160 s. Pour un exposé plus complet du sujet et pour la bibliographie, voir Arn. Reymond, *Les principes de la logique et la critique contemporaine*. Paris, Boivin, 1932. — (2) B. Russell, *ouvr. cité*, p. 166. — (3) Cité par M. Gonseth, *Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles et sur la logique des relations*. Commentarii mathematici helvetici, Vol. 5, p. 109. Zurich, 1932. — (4) *Ibid.*, p. 110. — (5) *Qu'est-ce que la logique ?* p. 5.

DOCTRINE PRÉALABLE DES VÉRITÉS ÉLÉMENTAIRES CONCERNANT LA GÉOMÉTRIE

La valeur toujours actuelle de la Critique kantienne. M. Gonseth commence son livre par un rapide exposé de la *Logique de Port-Royal*, puis de la logique telle qu'elle est développée dans les *Principia Mathematica*, enfin de la logique telle que la conçoit le Cercle de Vienne dont le but est de constituer une « syntaxe de la science ». Il note un caractère commun à tous ces exposés qui est de considérer la sensation, ou la connaissance commune, comme une *donnée* véritable et d'être ainsi toutes *pré-critiques*.

Sans doute, la découverte des géométries non-euclidiennes montre que l'espace n'est pas une forme pure a priori de notre sensibilité, comme le croyait Kant. La théorie de la relativité conduit aussi à penser que le temps n'est pas non plus cette forme pure a priori qui permettait à Kant d'exposer l'arithmétique comme une science nécessaire. Mais il reste que Kant a mis en évidence, mieux que personne, la structure propre de l'esprit humain et montré que cette structure détermine notre science et définit le genre de vérité qu'elle peut espérer atteindre : « L'entendement ne reçoit pas ses lois de la nature, mais il les prescrit à celle-ci » (1).

On sait que Poincaré était resté partiellement fidèle au kantisme. Il reconnaissait un véritable jugement synthétique a priori dans cette proposition : si un théorème est vrai pour le nombre 1, et si l'on démontre qu'il est vrai pour le nombre $n + 1$ pourvu qu'il soit vrai du nombre n, il sera vrai pour tous les nombres entiers (2). Il renonçait au contraire à suivre Kant en ce qui concerne la géométrie ; les axiomes de cette science n'étaient à ses yeux que des définitions déguisées (3). Devant l'impossibilité où Poincaré se trouve de maintenir la doctrine kantienne de la nécessité de la science « et n'envisageant aucune concession quant à l'infaillibilité des énoncés mathématiques authentiques, il accueille la solution en quelque sorte opposée : celle du libre-arbitre ». Ce qui conduit l'esprit aux axiomes de la géométrie, c'est le principe de moindre effort. « Mais n'est-ce pas servir deux maîtres que d'invoquer la nécessité a priori tant qu'il s'agit de logique et de nombres, et le moindre effort dès qu'il s'agit d'espace. Si la nécessité cède sur un point, pourquoi ne pas l'abandonner partout ? On serait ainsi conduit au point de vue d'E. Mach. » (4)

M. F. Enriques indique heureusement un moyen de rétablir les bases de l'unité des sciences mathématiques ainsi compromise. « Dans chaque domaine », déclare le mathématicien de Rome, « je me suis attaché essentiellement à reconnaître la fonction propre de l'esprit qui crée la science ; c'est dans l'unité

(1) *Prolegomena*, § 36, cité par M. Gonseth, p. 42. — (2) *La valeur de la science*. Paris, Flammarion, 1905, p. 21. — (3) *La science et l'hypothèse*, p. 66. — (4) *Qu'est-ce que la logique?*, p. 51. —

de cette fonction qu'on découvrira l'unité du savoir et le lien des problèmes que pose notre critique » (1). M. Gonseth suivra la même voie, et cela à partir des sensations qui nous paraissent les plus immédiates.

Schéma et forme intuitive. Dans son exposé, M. Gonseth se sert de deux notions dont il précise le sens. Voici d'abord les caractères distinctifs d'un schéma, le plan d'une ville par exemple. Il est sommaire, il renonce à tout indiquer et simplifie les lignes. Il est symbolique, les rues, les lignes de tramways, les monuments sont indiqués par des signes conventionnels. Il est inachevé, rien n'empêche de le compléter à volonté. De plus, il a une signification extérieure, il représente telle ville ; mais il possède encore une structure intrinsèque, c'est-à-dire que nous pouvons, laissant provisoirement de côté sa signification extérieure, être attentifs à ses caractères propres, sa forme géométrique, sa commodité, sa valeur esthétique, etc.

Passons maintenant à l'idée de forme intuitive. Pour comprendre ce qu'elle représente dans la pensée de M. Gonseth, nous nous servirons d'un exemple qu'il traite avec une sorte de prédilection. Posons-nous cette question : Dans quelle mesure notre notion de couleur nous renseigne-t-elle sur le phénomène lumineux tel qu'il est observé par un physicien à l'aide du spectroscope. ? Ce que nous nommons une couleur définie, comme le jaune, correspond-elle à une longueur d'onde, ou peut-être à une région du spectre comprise entre deux longueurs d'onde déterminées ? La réponse est que notre sensation est beaucoup plus complexe. Elle dépend, par exemple, de l'intensité de la lumière, de sorte que la lumière de la lune nous paraît plus bleue que celle du soleil, alors qu'au spectroscope elle serait, au contraire, jugée légèrement plus rouge, la lumière diffusée, celle de la lune, contenant proportionnellement plus de radiations de grande longueur d'onde que celle de la source, le soleil. Elle dépend de l'atmosphère colorée, les couleurs réagissent considérablement les unes sur les autres dans notre sensation. Nous distinguons aussi des couleurs qui ne sont pas dans le spectre ; tel le noir, le gris, le pourpre, le blanc ; et toutes les couleurs nous paraissent simples. Nous nommons un nombre très restreint de couleurs qui nous paraissent des types, les autres sont des nuances plus ou moins dégradées.

Ainsi, notre nomenclature des couleurs doit être considérée comme le résultat d'une analyse *grosso modo* du phénomène lumineux ; « le phénomène y participe, non par tous ses détails, mais par une sorte de caractère global ; l'appareil visuel et toute la partie de notre être mental qui lui est conjuguée y participe également par un mécanisme physiologico-mental » (2) n'ayant pas seulement pour but de nous renseigner sur le phénomène lumineux, mais de sauvegarder « l'unité des abstractions efficaces, telle que l'identité d'un objet avec lui-même à travers les fluctuations de l'éclairage » (3).

(1) *Ibid.*, p. 52. — (2) *Les mathématiques et la réalité*, p. 184. — (3) *Id.* M. Bergson fait des remarques analogues dans son *Essai sur les données immédiates de la conscience.* 5e éd. Paris, Alcan, 1906, p. 37 à 41. Sa conclusion n'est cependant pas tout à fait la même que celle de M. Gonseth : *Matière et mémoire* 3e éd. 1903, p. 101 et 102.

C'est ce mécanisme dans son ensemble que M. Gonseth nomme la *forme intuitive* relative à la couleur. Il est très frappant d'y relever les caractères d'un schéma. La nomenclature des couleurs, qui résulte de cette forme intuitive, est sommaire ; elle est symbolique, le nom d'une couleur groupe pour nous un très grand nombre de nuances, assez mal délimitées. Elle est inachevée, puisque le peintre peut la compléter à son gré par des noms d'objets représentant à ses yeux une couleur définie. La forme intuitive se rapporte au phénomène coloré et cependant elle possède une structure qui la distingue d'un simple appareil d'enregistrement.

La forme intuitive relative a l'espace. Considérons un automate perfectionné, armé de lourds boulets, placé dans une enceinte irrégulière et chargé de lancer son projectile sur quiconque en passerait la frontière. Le mécanisme devrait comporter un schéma de la frontière sur lequel tout l'automate serait réglé. Nous dirons que l'automate possède une représentation intuitive de la frontière qu'il surveille. Il faudrait qu'il possède un appareil de signalisation qui, détectant l'intrus en un point A de la frontière, vienne inscrire son signal en un point A′ correspondant du schéma. Nous dirons que A′ est la perception de A. Il faudrait un appareil de projection capable de viser A, dès que le signal est enregistré en A′. Cela exigerait un dispositif mettant encore une fois le schéma en correspondance avec l'enceinte réelle (1).

Certaines analogies s'imposent entre l'automate et un être vivant qui remplirait la même fonction. En particulier il faudrait que celui-ci possède, comme l'automate, un schéma qui mette sa vision en correspondance avec ses mouvements. Ce schéma, cette représentation intuitive, il la possède dans sa vision propre de l'espace. La représentation du vivant, comme celle de l'automate, est sommaire, symbolique et inachevée. Cette totalité mentale, plus ou moins bien délimitée, capable d'établir toutes les correspondances et toutes les concordances dont nous avons besoin, peut s'appeler la forme intuitive relative à l'espace. Nous ne sommes pas sans quelques renseignements sur son évolution dans notre prime enfance. Mais, à partir d'un certain âge, elle peut être considérée comme fixée, de même que les connaissances qu'elle comporte : dès lors, celles-ci peuvent être déclarées a priori. Cette connaissance a priori n'est, d'ailleurs, qu'un ensemble orienté, ordonné, structuré, de vues sommaires (2).

La géométrie repose sur une base expérimentale, mais elle n'en conserve qu'un schéma. On peut exposer la géométrie comme une science expérimentale. Par exemple, les propriétés de symétrie des figures peuvent fort utilement s'observer au moyen de cartons découpés. Les notions de point, de droite, de plan s'introduisent tout naturellement au moyen d'images, telles que, pour la droite, un fil tendu, ou l'arête d'une règle, ou une ligne de

(1) *Qu'est-ce que la logique?*, p. 66. — (2) *Ibid.*, p. 67.

visée. Mais le mathématicien quitte ce point de vue dès qu'il fait une démonstration. Il utilise alors des notions que seule l'idée de schéma peut faire comprendre et dont les images citées ne sont plus maintenant que des réalisations sommaires. Le physicien lui-même parle de droites dans le monde microscopique où un « rayon visuel » n'a plus de sens (1).

Sans la forme intuitive relative à l'espace, et qui est elle-même schématique, rien n'aurait assuré le passage des images expérimentales aux notions de la géométrie. Soutenu par cette forme intuitive, notre esprit n'aura aucune peine à concevoir l'existence et le déplacement d'une droite illimitée dans l'espace ; nous pourrons faire comprendre à nos plus jeunes élèves ce que c'est qu'un plan indéfini, tournant autour d'une de ses droites. La constitution de pareilles notions schématiques, M. Gonseth l'appelle une abstraction par axiomatisation. Ce nom s'explique, en effet, si l'on songe que la structure intrinsèque du schéma qu'est la géométrie se manifeste précisément dans les axiomes, définitions et théorèmes qu'on nous enseigne dans les classes. Nous savons construire axiomatiquement ce schéma. Il devient ainsi autonome, et cela sans perdre sa signification extérieure. Il est abstrait par rapport à sa réalisation expérimentale et celle-ci était déjà une abstraction par rapport à ce que nous observons plus directement. Abstrait et concret sont donc des termes purement relatifs et l'on peut parler du « double visage » de l'abstrait, dont l'un est tourné vers du plus concret, tandis que l'autre lui donne sa signification dans la structure autonome prenant la forme axiomatique (2).

Résumé de cette introduction. La conclusion de la première partie de cet article était celle-ci : l'axiomatique, fondée par Hilbert, ne peut s'édifier qu'à partir de notions antérieurement acquises. Nous venons de constater maintenant que ces notions sont le résultat d'une abstraction par schématisation qui constitue une véritable « pré-axiomatisation ». Il y a donc deux étapes à franchir pour atteindre ce formalisme où subsistent seules les liaisons logiques. Une première étape nous fait passer de l'expérimental à la forme intuitive, une seconde nous conduit des formes intuitives à des formes abstraites et à un formalisme du second degré. Le sens véritable de l'axiomatique n'apparaît qu'à celui qui a suivi et la constitution des formes intuitives et le passage de celles-ci au jeu de leurs liaisons logiques. Le lecteur qui aura eu la persévérance de nous accompagner jusqu'ici peut se demander s'il est bien nécessaire d'exposer les fondements de la géométrie pour répondre à la question : qu'est-ce que la logique ? Ce qui va être dit de la logique reposera entièrement sur la comparaison de cette science avec la géométrie, telle que l'expose l'axiomatique. Les principes de la logique sont aussi le résultat du passage par les deux étapes qui viennent d'être indiquées.

Il s'agit de mettre en évidence la première de ces étapes, faute de quoi le véritable sens des principes de la logique nous échappera. Telle est la signification de l'ouvrage de M. Gonseth sur la logique.

(1) P. 64. — (2) P. 65.

LA DOCTRINE PRÉALABLE DES VÉRITÉS ÉLÉMENTAIRES CONCERNANT LA LOGIQUE

L'OBJET ARISTOTÉLICIEN. L'idée d'objet, dans son acception la plus concrète, est sans doute très voisine de l'idée de corps, de corps solide en particulier. Mais l'idée de corps est corrélative de celle d'espace. C'est déjà ce qui est exposé dans la *Physique* d'Aristote où le « lieu » est défini comme « la limite immobile et immédiate de l'enveloppe du corps ». Cela résulte, d'ailleurs, des pénétrantes études de M. Jean Piaget sur le développement de la notion d'espace dans la première enfance. Après ce qui vient d'être dit de la forme intuitive relative à l'espace, nous pouvons prévoir que l'idée d'objet est déjà le résultat d'une longue série d'abstractions, et d'unifications. Pour marquer sa distance à ce que nous donnerait une observation attentive, il suffirait de rappeler que le physicien est très loin de savoir ce qu'est un corps solide ; sa plus petite partie, l'électron ou le proton, ne sont plus localisés avec une précision absolue dans l'espace. Par contre, l'objet « formé d'une certaine quantité de matière toute ramassée dans un morceau d'espace bien délimité est merveilleusement efficace, est admirablement adapté aux nécessités humaines » (1). L'idée d'objet dans sa signification la plus commune est donc une abstraction sommairement juste. Il est le correspondant de l'idée de la droite que nous suggère le fil tendu. Dans les termes que nous avons employés lorsque nous parlions de la droite, nous dirions que l'idée d'objet est le résultat d'une pré-axiomatisation.

Voyons maintenant ce qu'une axiomatisation explicite ferait de cette notion intuitive. C'est la logique qui en fournira le résultat. Tout d'abord la notion d'objet va être étendue et ne se rapportera plus aux corps seulement. L'idée de lieu disparaîtra donc de sa compréhension ainsi que celle de qualité physique. L'objet se rapportera simplement à l'idée d'une présence et à celle d'une permanence, c'est-à-dire à l'idée d'une pure identité existentielle (2). Par exemple, je trace deux fois la même lettre *a* ; pourvu que ce signe soit reconnaissable, le signe sera tenu pour identique. Nous aurons ainsi une « réalisation » de l'identité existentielle que symbolise l'idée d'objet pour le logicien. Nous allons maintenant porter notre attention sur les liaisons logiques, qui imitent les faits saillants dont les notions intuitives contiennent déjà une image sommaire. Ces liaisons seront affirmées ou niées par les axiomes, comme c'est le cas dans l'axiomatique, et nous énoncerons ainsi les trois principes de la logique :

Premier axiome : Tout objet est identique à lui-même.
Second axiome : Tout objet est ou n'est pas.
Troisième axiome : Un objet ne peut pas, à la fois, être ou ne pas être (3).

(1) P. 69. — (2) P. 70. — (3) P. 71.

Nous pourrons remarquer, en premier lieu, que ces axiomes correspondent bien à des faits habituellement constatés. Ce sont des sortes de lois naturelles. Le terme objet y est entendu dans un sens très abstrait, nous lui donnerons le nom d'objet logique ou d'objet aristotélicien.

Remarquons, en second lieu, que l'objet concret « réalise » l'objet logique comme le fil tendu « réalise » la droite géométrique. Son existence naturelle « réalise » l'idée de l'identité existentielle de la « même façon » que la rectitude grossière du fil « réalise » la rectitude idéale de la droite (1).

Remarquons enfin qu'il n'existe pas plus de réalisations parfaites de l'objet logique qu'il n'en existe une de la droite géométrique. Il n'y a entre abstrait et concret qu'une adéquation schématique.

Pour le rendre plus maniable, nous particularisons l'objet logique et lui donnons une réalisation arbitraire (ce qui conserve symboliquement son degré d'abstraction) en le représentant par une lettre. Nous nous rapprocherons ainsi du langage symbolique introduit dans la logique. Prenons A pour symbole d'un objet dont l'existence ou la non-existence n'est pas encore précisée, nous soulignerons, $\underline{A}$, pour symboliser son existence, nous le surlignerons, $\overline{A}$, pour symboliser sa non-existence. Les axiomes s'exprimeront alors :

Axiome I : La lettre A a partout la même signification.

Axiome II : Toute détermination de A conduira à le souligner ou à le surligner.

Axiome III : Et ces deux cas s'excluent (2).

Si l'on examine les relations de présence ou d'absence de deux objets pris ensemble, on pourra distinguer quatre cas :

a) $\underline{A}$ et $\underline{B}$
b) $\underline{A}$ et $\overline{B}$
c) $\overline{A}$ et $\underline{B}$
d) $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Ces quatre cas permettent de reconnaître des liaisons logiques de deux sortes : deux objets peuvent être tels que les éventualités *a*) et *d*) soient toujours vérifiées. Il en résulte que les éventualités *b*) et *c*) sont exclues (*et*). Ou bien deux objets sont tels que les éventualités *b*) et *c*) sont toujours vérifiées et alors les éventualités *a*) et *b*) sont exclues (*ou*).

On aurait ainsi une traduction dans le domaine de la logique des axiomes que formule Hilbert pour la géométrie. Dans ces axiomes les mots n'ont que leur signification ordinaire, de sorte qu'on peut toujours retrouver la correspondance entre le signe et la représentation intuitive. Nous avons ainsi atteint le même formalisme, jeu de symboles qui transpose dans des règles plus ou moins arbitraires les relations et les lois qui régissent tel ou tel domaine concret ou abstrait(3).

Sans pousser plus loin l'analyse de ce chapitre nous en transcrirons les

(1) P. 71. — (2) P. 72. — (3) P. 73.

conclusions dont l'importance n'échappera pas aux philosophes : « L'analogie que nous avions prise comme guide se révèle efficace jusqu'au bout. Dans le processus qui, partant des propriétés les plus banales et les plus primitives des objets matériels, aboutit aux concepts et aux règles de l'existence pure, nous retrouvons, point par point, le processus qui, à partir de certains aspects plus ou moins superficiels du monde physique, aboutit aux énoncés de la géométrie rationnelle. Dans les deux cas, ce qui se retrouve sous forme abstraite, une fois l'abstraction opérée, a valeur de loi naturelle dans la signification extérieure. Pour la géométrie, la chose ne souffre plus de doute, depuis longtemps ; sous sa forme expérimentale, elle n'est qu'un chapitre de physique expérimentale ; sous sa forme rationnelle, un chapitre correspondant de physique théorique : celui qui s'occupe de la forme et des déplacements des corps supposés rigides. Toute la physique n'a pas encore pris une ordonnance aussi achevée. C'est simplement que ce chapitre est en avance sur les autres. De même, la Théorie rationnelle de l'existence objective, dont nous venons de poser les bases, n'est que la forme axiomatisée d'un des tout premiers chapitres de la physique, si ce n'est du premier : celui qui traite de l'existence, de la présence, et de l'absence des objets de nature quelconque (1). En un mot, Physique de l'objet quelconque et Théorie de l'existence pure sont deux instants d'une même entreprise » (2).

Théorie élémentaire du jugement vrai. La logique n'est pas seulement une science, elle est aussi un art soumis à des normes. Est-il possible d'appliquer au canon de nos jugements la même méthode d'analyse qu'à l'idée d'existence objective ? M. Gonseth constate tout d'abord qu'aucun de nos jugements particuliers n'est vrai sans conditions, même ceux qui nous paraissent énoncer des vérités inconditionnelles. Seulement, dans l'usage courant, nous négligeons d'énoncer ces conditions ou même d'y penser. Par exemple, les règles de l'arithmétique s'appliquent aux objets discrets à la condition de ne considérer en ces objets que ce qui les fait rentrer dans une même classe. Pour chaque jugement particulier on pourra découvrir telle ou telle circonstance que l'on suppose exclue. « Les circonstances mêmes où notre jugement reste valable ne sont jamais précisées jusque dans leurs ultimes détails. Nous nous satisfaisons ainsi d'une vérité conditionnée, qui, forte dans un certain domaine d'application, s'affaiblit à la limite, d'ailleurs imprécise, de ce domaine et qui perdra même, dans certains cas, toute son efficacité » (3). Cette idée d'une vérité conditionnée est particulièrement bien adaptée à nos

(1) P. 75. — (2) P. 76. Cette conclusion ne me semble pas contredire la logique telle que l'expose Aristote. Preuve en soit les principes de sa *Physique* qui sont directement empruntés à la logique. Ce sont : le sujet et les contraires, à savoir la forme et sa privation. Il faut cependant remarquer qu'Aristote désignerait par le mot « sujet » ce que M. Gonseth nomme « objet », celui-ci étant le sujet de ses attributs. *Cf.* Lalande, *Vocabulaire de philosophie*. Paris, Alcan, 1926, t. II, p. 835. — (3) P. 80.

besoins là où elle s'applique à un ensemble de faits dont la complexité et l'indétermination pourraient nous égarer, ce qui est souvent le cas dans la pratique usuelle. Il existe donc bien une notion intuitive du vrai, « sommaire au même titre que l'idée de la présence de quelque chose appelé objet dans un lieu tout à fait indéterminé » (1).

Mais nous allons engager cette notion dans un processus d'abstraction par axiomatisation. Il nous suffira pour cela, de substituer l'idée de vérité inconditionnelle à celle que nous venons de décrire. Cette nouvelle idée est évidemment schématique ainsi que l'idée d'un jugement idéal, valable absolument. Mais c'est précisément ce schématisme qui va nous permettre de nous élever au formalisme logique. En effet, « pourvu qu'on ne cherche qu'une adéquation schématique de l'idée à son objet », nous pourrons négliger ce *fait* « qu'une possession plus profonde et plus détaillée du réel est de nature à remettre en question tout jugement prononcé d'avance » (2).

En suivant cette voie, nous formulerons les trois axiomes suivants :

Axiome I : La valeur d'un jugement reste identique à elle-même.

Axiome II : Tout jugement est vrai ou faux.

Axiome III : Aucun jugement n'est, à la fois, vrai ou faux.

On pourra encore symboliser ces propositions au moyen de lettres ; puis distinguer quatre cas, comme dans la théorie de l'objet :

a) A est vrai et B est vrai
b) A est vrai et B est faux
c) A est faux et B est vrai
d) A est faux et B est faux.

S'il existe une liaison entre deux jugements de sorte que *a*) et *d*) soient toujours vérifiés, on ne constatera jamais entre eux les liaisons *b*) et *c*) ; et réciproquement.

Nous possédons ainsi un « canon » des jugements et de la vérité inconditionnels (3).

L'identité de structure entre la théorie de l'existence objective et celle du jugement vrai est frappante. Cela tient à ce que l'esprit tend ici et là vers un même idéal. Ni la réalité, ni l'esprit ne réalisent cet idéal. Ni les lois du réel, ni la structure de l'esprit ne sont choses arrêtées. Elles sont en devenir. Leur évolution est liée au développement de toute connaissance et il en sera de même de tous les concepts abstraits par axiomatisation.

La logique comme charte de nos libertés naturelles. Si l'on passe de la logique élémentaire à la logique des classes et des attributs, on peut encore une fois établir une doctrine préalable des notions fondamentales. Ce qui caractérise ce dernier chapitre de la logique, c'est le sens des termes *tout* et *l'un au moins* qui interviennent chaque fois que nous distinguons une

(1) P. 81. — (2) P. 82. — (3) P. 83.

qualité : par exemple, l'attribut « rouge » et la classe des objets qui le possèdent. Ces termes généralisent les liaisons logiques *et*, *ou*. Il est évident que nous retrouverons encore la nécessité d'une abstraction par schématisation et d'une forme intuitive qui seule permettrait de considérer la même « couleur » dans des objets différents. Mais nous allons franchir une étape nouvelle, et c'est par là que l'arithmétique sera essentiellement reliée à la logique. Nous pourrons considérer deux genres de classes : les classes fermées formant des groupes d'objets peu nombreux de telle sorte que nous puissions effectivement nous rendre présents chacun d'eux. Les classes ouvertes (1), où il est simplement convenu d'admettre la possibilité d'énumérer un à un chacun des objets qui font partie de la classe. A ce point de vue, il faut remarquer que les mots « fini » et « infini » ne sont qu'artificiellement distincts, puisqu'une classe très nombreuse, celle des grains de sable actuellement existant sur la terre, par exemple, exige la même convention qu'une classe infinie. La classe ouverte est également due à une simplification schématique et ce qui est ici l'objet du schéma c'est la liberté que nous avons de continuer l'énumération indéfiniment. Nous concevons un mathématicien idéal que rien, pas même la mort, ne pourrait arrêter ; en d'autres termes, nous admettons la possibilité de penser par intention.

Sur cette forme intuitive sont fondés les célèbres axiomes de Peano, qui ont si souvent servi de thème aux logiciens :

1. 0 est un nombre entier.

2. A tout nombre n correspond un autre nombre n', « celui qui vient après nn ».

3. Si s est une classe comprenant le 0 et si le successif d'un nombre quelconque x qui fait partie de s, en fait également partie, s contient tous les nombres.

4. Si les successifs de deux nombres sont égaux, ces nombres le sont aussi.

5. Le successif d'un nombre ne peut être 0.

Le principe d'induction complète, dont Poincaré faisait un jugement synthétique a priori, nous apparaît maintenant comme la forme abstraite, schématique, d'une certaine synthèse des nécessités naturelles de la physique des objets quelconques et d'une certaine liberté pratique que la nature nous concède (2).

M. Gonseth conclut : « Que la fiction de l'arithméticien schématique libéré de certaines entraves propres à notre condition d'hommes soit efficace, c'est ce que la science des nombres démontre avec éclat. Il n'est pas douteux que notre activité mentale y trouve une image conforme à sa nature. Pourtant, cette conformité n'est pas plus adéquation totale que ne l'est la conformité de la droite idéale au fil tendu.

Mais n'est-ce pas là tout ce qu'il faut attendre de la connaissance ?

Un accord schématique entre un Réel inachevé et un Esprit en devenir ? » (3)

(1) P. 87. — (2) P. 88. — (3) P. 89.

Conclusion. Pour être bref, nous résumerons, sous forme de thèses, quelques-unes des conséquences de l'étude de M. Gonseth. Ces thèses sont, soit empruntées littéralement aux ouvrages de l'auteur, soit directement suggérées par eux.

1. Il n'y a pas de sensation qui soit une donnée pure. On peut toujours y déceler un procédé de simplification qui la rend plus ou moins globale. L'empirisme est donc un point de vue simplificateur, d'ailleurs souvent utile.

2. Il n'y a pas non plus d'abstraction autonome. Tout abstrait garde, par la façon même dont il est formé, un lien avec le concret qui lui est relatif.

3. Les notions fondamentales d'objet, d'existence, de qualité, de classe, en même temps que les opérations logiques comme *et*, *ou*, se révèlent comme des schématisations à la fois efficaces et inachevées, suggérées par la réalité et conformes à notre structure mentale, de sorte qu'en s'élevant vers l'abstrait l'esprit ne dément pas ses premières démarches.

4. Même le concept venu le dernier dans la succession des abstraits ne remplace jamais totalement ceux qui l'ont précédé et qui ont été ainsi repoussés vers le concret. Les abstraits précédents conservent une existence sous-jacente, le dernier venu ne peut être évoqué sans qu'en même temps tous ceux qui le précèdent ne répondent à l'appel.

5. Les antinomies qui ont été mises en lumière soit en logique, soit dans la théorie des ensembles, ne se rencontrent pas, en vérité, le long du chemin qui va du plus concret au plus abstrait. Elles naissent au contraire de théories totalitaires qui prétendent suspendre toute la déduction scientifique à des abstraits considérés comme des points de départs par eux-mêmes suffisants.

6. Rien n'est parfaitement achevé dans la science. Rien n'exige non plus que l'idéal d'une vérité absolue soit au bout de notre effort, de sorte qu'il faut, à la fois, affirmer et nier l'autonomie de l'abstrait. La nier dans sa genèse et l'affirmer dans son devenir.

7. Cependant on ne peut pas ne pas être frappé par la merveilleuse réussite que constitue l'édifice mathématique. Il y a en lui quelque chose qui défie, même les découvertes du monde microscopique. Pour se l'expliquer, on peut invoquer le parallélisme qui s'établit entre le mental et le phénoménal, entre l'ordre rationnel et certaines lois profondes du réel.

8. Si le mot réalité ne doit point s'employer comme s'il existait une « chose de ce nom », cela ne va pas jusqu'à nier la pression que ce que nous pouvons continuer à appeler le réel exerce sur tout notre être.

Le résumé que je viens de faire est à la fois sommaire et trop long parce qu'il est resté dans l'abstrait. Ce qu'il ne rend en aucune façon, c'est le talent d'exposition de l'auteur, c'est la vie et le mouvement qui animent ses écrits. Sans doute, plusieurs des idées qu'il propose ne sont pas sans analogie avec celles qu'on trouve ici ou là chez M. Bergson ou dans certains des auteurs que M. Reymond nous a rendus familiers par son livre sur *Les principes de*

la logique (1). Mais on sent dans les ouvrages de M. Gonseth une sorte de triomphe d'avoir retrouvé cette « lumière naturelle » dont parlait si bien Descartes, et qui met en évidence l'unité de la science et de l'esprit humain.

Or, si Descartes a retrouvé l'unité de l'esprit humain, c'est qu'il a considéré la science, ou mieux la géométrie, comme une méthode universelle de résolution et de classification des problèmes. Sa *Géométrie* elle-même est une application et une démonstration d'une « méthode semblable à ces arts mécaniques qui se suffisent à eux-mêmes, c'est-à-dire qui donnent à celui qui les exerce les moyens de fabriquer les instruments dont il a besoin » (2).

La logique est l'un de ces instruments. Le plus utile et le plus général ; sans doute parce qu'il opère à l'aide de représentations sommairement adéquates des réalités les plus primitives (3).

Samuel GAGNEBIN.

(1) Ainsi cette phrase de M. René Poirier : « La connaissance logique, sans être liée à un esprit particulier ni à telle sorte d'algorithme matériel, suppose cependant, unies inséparablement, une certaine structure mentale de l'homme et une certaine structure physique du monde », citée p. 256. — (2) *Règles pour la direction de l'esprit.* R. VIII. Ed. Garnier, p. 328. — (3) *Qu'est-ce que la logique ?* p. 90.