Zeitschrift: Revue de Théologie et de Philosophie

Herausgeber: Revue de Théologie et de Philosophie

Band: 13 (1925)

Artikel: À propos du principe du tiers exclu : empirisme et idéalisme dans les mathématiques

Autor: Rivier, Willy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-380102

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 31.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

A PROPOS DU PRINCIPE DU TIERS EXCLU

EMPIRISME ET IDÉALISME DANS LES MATHÉMATIQUES (1)

Quelques mathématiciens ont été conduits par l'étude de certaines questions d'ordre très général à s'occuper de logique formelle. Ils ont été en particulier amenés à se demander si le principe du tiers exclu, en vertu duquel une chose ne saurait échapper à l'alternative d'être ou de ne pas être, était bien applicable partout dans leur domaine. Ils ont abouti à une conclusion négative. Lorsqu'il s'agit de collections infinies (telle la suite naturelle des nombres entiers, ou l'ensemble des nombres premiers, ou encore celui des nombres rationnels, c'est-à-dire entiers et fractionnaires), le principe du tiers exclu ne jouerait plus. Par exemple, on aurait tort de poser l'alternative suivante : ou telle propriété donnée appartient à tous les nombres entiers, ou il en existe un qui ne la possède pas. Car il se pourrait qu'on ait réussi à établir a priori qu'il est absurde de regarder cette propriété comme appartenant à tous les nombres entiers, et qu'on ne soit pas parvenu cependant à fournir un exemple de nombre entier dépourvu de cette propriété, ni même à apercevoir un moyen d'obtenir un tel nombre. Rien ne nous garantirait alors, font remarquer ces mathématiciens, qu'il fût possible de jamais y parvenir. Force est donc, concluent-ils, d'envisager l'éventualité du cas où il faudrait à la fois nier que cette propriété appartînt à tous les entiers et nier qu'elle pût faire défaut à l'un d'entre eux en particulier. Prenons un autre exemple plus précis. Supposons la question : se trouve-t-il quelque part dans le développement décimal de $\sqrt{2}$ une série de dix chiffres 3 consécutifs ? Si l'on admet que la recherche ne puisse se faire qu'en examinant un à un tous les chiffres de ce dévelop-

(1) Cet article est le texte d'une conférence donnée dans l'hiver 1924-1925 à la Société romande de philosophie, à propos de l'important article de M. Rolin Wavre : *Y a-t-il une crise des mathématiques ?*, Revue de métaphysique et de morale, 1924, p. 435-470.

pement, ou si l'on admet tout au moins, ce qui est plus exact, qu'il soit contestable qu'on puisse procéder à cette recherche d'une autre manière, on sera tenté de se contenter ,à défaut d'une chance inouïe, de la réponse suivante : ou il se trouve dans le développement envisagé une série de dix chiffres 3 consécutifs, et on est en mesure de le reconnaître en poussant la recherche assez loin ; ou une telle série ne s'y trouve pas et peut-être alors n'existe-t-il aucun moyen de nous en convaincre jamais. Or, d'après ces mathématiciens, ces deux possibilités ne constituent pas une alternative. Car il se pourrait encore, selon eux, qu'une telle série ne fût susceptible d'être mise en évidence par aucun moyen imaginable et qu'on ne pût néanmoins nier l'existence de cette série sans être conduit à une contradiction. On voit ainsi par ces exemples comment ces mathématiciens en sont arrivés à imaginer l'éventualité de cas où il serait également faux de dire d'une chose qu'elle est et qu'elle n'est pas. Or ces savants prétendent, et ceci est essentiel, que la nécessité d'envisager de tels cas, loin de tenir, comme on pourrait le croire au premier abord, à la faiblesse des moyens dont dispose l'esprit humain, tient au contraire à la nature même des choses. Cette opinion accuse, si l'on y réfléchit, une tendance marquée à considérer les êtres mathématiques comme revêtant une existence indépendante de l'esprit qui les conçoit. De cette tendance découle la méthode en quelque sorte expérimentale que préconisent ces mathématiciens dans leur science et qui leur a valu le nom d'empiristes sous lequel on les désigne ordinairement.

Les mathématiciens de l'école adverse, que nous appellerons l'école idéaliste, n'ont à vrai dire pas contesté en général l'existence des difficultés que soulève l'application du principe du tiers exclu au cas des collections infinies, mais ils ont pris position dans le débat en proposant, pour obvier à ces difficultés, des moyens diamétralement opposés à ceux auxquels les empiristes se sont arrêtés.

Proposons-nous de caractériser d'une manière plus approfondie les deux écoles en présence.

Les *mathématiciens empiristes*, s'inspirant d'un point de vue comparable à celui du physicien ou du naturaliste, admettent ou tendent à admettre la parfaite objectivité du fait mathématique (comme exemples de faits mathématiques, citons : les 3 dimensions de notre espace, la valeur constamment égale à 180° de la somme des 3 angles d'un triangle en géométrie euclidienne, les propriétés du continu géométrique, celles du continu analytique, la décomposition, en géométrie euclidienne, d'un plan en deux régions distinctes par une droite tracée dans ce plan, etc.). Ils assimilent implicitement, au point de vue de la structure, l'ordre abstrait à l'ordre concret, tendent à les confondre au profit du second. Très prudents, ils tiennent avant tout à s'assurer avec le plus grand soin de l'existence effective des êtres sur lesquels ils raisonnent. Ils admettront difficilement, par exemple, qu'on s'étende sur telle ou telle propriété concernant les nombres sans qu'on ait préalablement construit un exemple de nombre possédant cette propriété.

En soutenant la thèse de l'objectivité du fait mathématique, Pierre Boutroux s'est écarté de la pensée de son maître Henri Poincaré plus qu'un examen superficiel ne saurait le faire supposer. En effet, si l'illustre mathématicien faisait dériver les concepts mathématiques de l'expérience sensible par un travail lent et progressif de l'humanité, du moins le contenu de cette expérience lui paraissait-il chose essentiellement vague, organiquement mal définissable. Aussi pouvait-il conclure que toute formulation de cette expérience sensible, par le fait même qu'elle la précisait, devait l'entacher d'un double caractère de subjectivité et de contingence. A ce titre, nous rattacherions plus volontiers Henri Poincaré à l'école idéaliste qu'à l'école empiriste dont il passe généralement pour un des précurseurs. Le lien que le grand penseur établissait ainsi entre l'ordre de nos représentations abstraites et l'ordre concret, les empiristes semblent l'avoir considérablement resserré en faisant bénéficier l'ordre abstrait du caractère objectif que confère à l'ordre concret sa fixité apparente, et l'ordre concret de la précision que comporte le schématisme de nos représentations abstraites. Cette double tendance se retrouve dans toute la science contemporaine et en explique assez bien, nous semble-t-il, l'orientation.

Le plus éminent des empiristes de l'heure actuelle est peut-être le mathématicien hollandais Brouwer. Pour ce savant, la logique d'Aristote, concernant exclusivement les relations du tout à la partie, est adéquate à la théorie des collections finies. Rien que de fort naturel pour cet auteur, si la logique traditionnelle cesse donc d'être applicable quand on aborde l'étude des collections infinies.

Que cette façon de penser procède d'une attitude foncièrement nominaliste en face de la question : la classe préexiste-t-elle ou non à ses éléments, cela ne fait pas de doute. Car M. Brouwer, et avec lui tous les mathématiciens empiristes, semblent raisonner comme si une collection n'était clairement représentée ou représentable qu'à la condition que tous ses éléments, pris un à un, le soient eux-mêmes. Dans la pensée de ces philosophes donc, l'attribut caractéristique, qui permet, comme l'on sait, de reconnaître si un objet fait partie ou non de la collection, paraît ne jouer qu'un rôle de second plan. Aussi comprend-on que, dans ces conditions, les collections infinies deviennent des objets sur lesquels il sera singulièrement difficile de raisonner. Un mathématicien français qui fait autorité parmi les empiristes, M. René Baire, écrivait fort justement il y a quelque vingt ans : « Dès qu'on parle d'infini, l'assimilation consciente ou inconsciente avec un sac de billes qu'on donne de la main à la main doit complètement disparaître... En particulier, de ce qu'un ensemble (1) est donné, il est faux de conclure que l'on puisse considérer les parties de cet ensemble comme données. A plus forte raison, je refuse d'attacher un sens au fait de concevoir un choix fait dans chaque partie d'un ensemble... En fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini. »

En face de trois siècles de conquêtes retentissantes qui ont décerné à l'analyse infinitésimale la place la plus importante parmi les sciences de notre époque, on conçoit donc que le point de vue développé par M. Brouwer pourrait paraître d'une étroitesse gênante, si cet auteur ne s'était pas attaché à l'élargir en faisant appel à l'intuition mathématique, faculté qui, selon lui, permet d'atteindre en quelque sorte à un ordre supérieur de connaissances. C'est à titre de données immédiates de l'intuition mathématique qu'il range successivement parmi les concepts auxquels la logique traditionnelle étendra, moyennant certaines précautions, sa juridiction : 1° la suite naturelle des nombres entiers, et par conséquent les ensembles qui s'y ramènent, à savoir les ensembles dénombrables, comme par exemple l'ensemble des nombres rationnels, 2° l'ensemble des nombres réels, comprenant, outre les nombres rationnels, les nombres appelés irrationnels ($\sqrt{2}$, π, etc.), 3° le

(1) Ensemble doit être pris ici dans le sens de collection infinie.

continu analytique. Touchant cette dernière donnée, tenue par M. Brouwer, contrairement à l'opinion généralement admise jusqu'à présent, pour distincte de la précédente, on sait qu'à chaque nombre irrationnel correspond un développement décimal illimité ($\sqrt{2} = 1{,}41421...$; $\pi = 3{,}14159...$; etc.), et que, d'autre part, un tel développement ne peut être donné que par une loi d'engendrement formulée sans ambiguïté, telle, par exemple, la loi indiquant les opérations à effectuer pour extraire, avec une approximation quelconque, la racine carrée de 2. Or M. Brouwer se refuse à admettre que l'ensemble de toutes les lois imaginables de cette nature épuise le continu analytique. En d'autres termes, il considère ce dernier comme constitué par un agrégat de nombres englobant l'ensemble des nombres réels, mais inimaginablement plus vaste que cet ensemble, et dont les éléments ultimes, à de rares exceptions près (les nombres réels), ne se laissent plus isoler. On parvient cependant, selon cet auteur, à une représentation claire du continu analytique en faisant appel à la notion de suite libre. M. Brouwer désigne ainsi une suite indéfinie de chiffres tous choisis arbitrairement, ce qui signifie d'une manière imprévisible, c'est-à-dire sans qu'il soit jamais tenu compte, dans l'un quelconque de ces choix, des choix qui l'ont précédé. Bref, la suite libre est un concept purement négatif écartant toute idée de loi de succession. M. Brouwer ne paraît pas se préoccuper outre mesure des difficultés que soulève un tel concept : il en fait une donnée immédiate de l'intuition mathématique, et parvient de cette manière à une représentation, qu'il juge suffisante, du continu analytique.

C'est ainsi que l'empirisme mathématique cherche dans une voie totalement étrangère à ses origines nominalistes et atomistes l'élargissement qui lui est nécessaire.

Plus disposés à l'optimisme et à la confiance, *les mathématiciens idéalistes* inclinent à penser que la fonction essentielle de l'esprit est d'imaginer et non d'observer, d'inventer et non de découvrir. Ils affirment par le discours et par le fait notre liberté de choix touchant les notions placées à la base de nos théories et les hypothèses qui président à nos recherches ; autrement dit, ils ne croient pas, comme les empiristes y semblent enclins, que ces notions et ces hypothèses préexistent à la pensée, le rôle de cette dernière se bornant à les déceler. Ils étendent parfois à la science toute entière leur manière de voir, et deviennent alors des conventionnalistes à la façon de LeRoy. Insistant sur le côté créateur de l'esprit, ils éprouvent moins l'existence des choses qu'ils ne la leur confèrent, de telle sorte qu'en fin de compte la contradiction seule leur paraît vraiment à redouter. C'est ainsi que Poincaré a pu dire qu'il regardait comme assurée l'existence de tout ce qui n'implique pas contradiction : formule hardie pour ceux-là seulement qui oublient que le sens du mot exister est encore à fixer, ou qui contestent notre liberté de choix en matière de définitions.

C'est en s'inspirant de ce point de vue si large que l'éminent mathématicien de Gœttingue, M. Hilbert, dont l'œuvre de génie se trouve menacée dans ses fondements par les exigences empiristes, fait évanouir les difficultés que soulève l'application du principe du tiers exclu au cas des collections infinies. Ce résultat est obtenu par une limitation imposée au concept de collection infinie. Cette limitation repose essentiellement sur un axiome formulé pour les besoins de la cause et désigné sous le nom d'*axiome du transfini*. Soit un ensemble quelconque et soit d'autre part un attribut tel qu'on puisse dire de chaque élément de l'ensemble envisagé si cet attribut lui appartient ou non. L'axiome du transfini affirme qu'il existe dans cet ensemble un élément tel que, s'il possède l'attribut considéré, tous les autres éléments de l'ensemble le posséderont également. Cet élément qui, de tous les éléments de l'ensemble, est donc en quelque sorte le moins apte (ou l'un des moins aptes) à posséder l'attribut envisagé, est appelé par M. Hilbert l'*élément distingué* de l'ensemble, relatif à cet attribut. Il permet de ramener la question : est-il vrai ou faux que tous les éléments de l'ensemble possèdent l'attribut envisagé ? à la suivante : l'élément distingué relatif à cet attribut possède-t-il, oui ou non, cet attribut ? M. Hilbert admet qu'une collection infinie ne peut être conçue distinctement qu'à la condition d'être soumise à cet axiome. Il accorde donc à celui-ci un champ d'action en quelque sorte illimité. En revanche, les empiristes ne semblent portés à voir dans un axiome en général qu'un principe restrictif ayant pour effet de répartir les objets auxquels il se rapporte en deux catégories, la catégorie des objets soumis à l'axiome et la catégorie de ceux qui lui échappent. Ecarter de la pensée les objets appartenant à la deuxième catégorie n'équivaut pas pour eux à refuser à ces objets l'existence.

Ces deux conceptions du rôle qu'un axiome est appelé à jouer dans la science procèdent logiquement de deux théories de la connaissance, voire de deux métaphysiques radicalement opposées. Le point de vue de M. Hilbert est donc défendable. Là où ce savant, en revanche, nous paraît plus critiquable, c'est dans son effort pour affermir notre créance dans le raisonnement mathématique, lorsqu'il semble prêter aux concepts en général une fixité qui nous paraît loin d'être assurée. Nous nous demandons au contraire si le simple rapprochement de deux concepts n'a pas souvent pour effet, en déformant les images qu'ils éveillent en nous, de modifier à notre insu ces concepts eux-mêmes, comme cela se produit pour le concept de distance que chaque distinction nouvelle touchant les propriétés du continu transforme insensiblement, au risque de le rendre en fin de compte aussi différent de ce qu'il était pour Riemann que la notion de ligne droite chez les modernes est différente de ce qu'elle était pour les Grecs.

En résumé, le point de vue empiriste est fondé sur la croyance, propice à la recherche scientifique, mais particulière à notre civilisation occidentale qui est une civilisation de géomètres, en un univers auquel les démarches de l'esprit ne sauraient rien ajouter ni retrancher. Orienté vers l'action mécanique, il semble procurer à l'homme un pouvoir de plus en plus étendu sur le monde physique ; mais il n'atteint pas à l'universel.

Le point de vue idéaliste, au contraire, en faisant une large part à l'activité libre de l'esprit, nous paraît l'aboutissement obligé de la pensée quand elle cherche à prendre possession d'elle-même dans un effort vers une plus haute vérité.

Si, dans ce débat, il était nécessaire de prendre parti, ce serait donc au deuxième point de vue qu'il nous semblerait préférable de s'arrêter. Jusqu'à quel point d'ailleurs l'empirisme mathématique peut-il se maintenir dans le cadre étroit de son rigorisme ? Pascal raillait ceux qui s'imaginaient qu'on ne saurait concevoir le vide avant d'en avoir reconnu l'existence. Comment, leur demandait-il, pourrait-on s'assurer de l'existence d'un objet, sans l'avoir préalablement défini ? — Les empiristes, en s'interdisant de faire état d'un être mathématique avant de l'avoir construit, ne risquent-ils pas de tomber dans un défaut semblable, et sont-ils bien sûrs de ne pas refuser à la pensée un droit dont elle ne saurait se passer ?

W. Rivier.