Zeitschrift: Revue Militaire Suisse

Herausgeber: Association de la Revue Militaire Suisse

Band: 19 (1874)

Heft: (12): Revue des armes spéciales : supplément mensuel de la Revue Militaire Suisse

Artikel: De quelques calculs d'interpolation relatifs aux tables de tir : études de balistique

Autor: Muyden, A. v.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-333764

REVUE DES ARMES SPÉCIALES

Supplément mensuel de la REVUE MILITAIRE SUISSE, n° 12 (1874).

De quelques calculs d'interpolation relatifs aux tables de tir.

Etudes de balistique expérimentale, par P. LEBOULANGÉ, *Journal des armes spéciales et de l'état-major*, 1869. — Etudes de balistique pratique, par NAVEZ, *Revue de Technologie*, tome IV, troisième fascicule. — *Sur l'établissement et l'usage des tables de tir*, par E. JOUFFRET. Paris, 1874. — *Beitrag zur Schiesstheorie*, von eidg. Oberst SIEGFRIED. Frauenfeld, 1872.

Nous nous proposons d'exposer, dans les lignes qui suivent, les procédés d'interpolation servant à établir les hausses d'une table de tir au moyen d'un certain nombre de données expérimentales; puis d'en faire l'application numérique au tir de précision exécuté à Thoune le 1er et le 2 août 1873, au cours pour officiers d'état-major d'artillerie, sous la direction de M. le colonel Bleuler : tir qui avait pour but de fournir aux officiers de l'école les éléments nécessaires pour construire une table de tir complète par les procédés graphiques.

Données: Cours pour officiers d'état-major d'artillerie, 1er et 2 août 1873. — Tir à obus lestés. Pièce n° 41, calibre 8cm,4. Affût d'ordonnance n° 162.

Séries.	Date.	Portées.	Nombre de coups.	Hausse corrigée. En ‰.	Hausse corrigée. En degrés	Durée.	Observations.
N°		Mètres.					
1	1er août	10 (cible)	9	— 5,3	—0°,18		Barom. 757mm; temp. 33°.
2	2 août	500 »	11	+12,9	+0°.44		Barom. 716mm; temp. 29°.
		607 (terr.)	11	17,3	0°,59	1″,72	
3	»	1000 (cible	15	35,3	2°,1		La 1re série est destinée au calcul de l'angle de relèvement initial.
		1046 (terr.)	15	37,6	2°.9	2″,95	
4	»	1500 (cible)	15	60,9	3°,29		
		1526 (terr.)	15 (dont 14)	62,0	3°,93	4″,92	Vitesse initiale moyenne 389m.
5	»	1993 »	20	9 ,7	5°,11	6″,77	
6	»	2485 »	15	124,8	7°,7	8″,81	
7	»	3162 »	20	175,4	9°,57	11″,90	
8	»	3785 »	20 (dont 18)	229,5	12°,55	15 ,34	

Pour établir les hausses d'une table de tir, il est de règle de tirer successivement sous différents angles; et, afin de compenser les erreurs en prenant des moyennes, il n'est point nécessaire de multiplier beaucoup le nombre des angles, il est préférable de les espacer convenablement et de tirer à chacun d'eux un nombre de coups d'autant plus considérable que la distance est plus grande.

Ganss a démontré en effet, par le calcul des probabilités, que le point d'impact moyen, tel qu'il résulte d'un nombre n de coups, était affecté d'une probabilité d'incertitude de $\frac{1}{\sqrt{n}}$; ce qui revient à poser :

$$y = \pm 0{,}845 \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

en appelant : y l'erreur probable du point moyen en plus ou moins à la portée x, et pour un nombre n de coups;

ε l'écart moyen arithmétique rapporté au point d'impact moyen.

0,845 le rapport de l'écart probable (soit l'écart du 50 % des coups) à l'écart moyen.

Cette expression nous montre que la précision d'une moyenne arithmétique est proportionnelle à la racine carrée du nombre des observations qui l'ont fournie.

De plus, deux valeurs égales de y, correspondant à des portées $x_{\prime}$ et $x_{\prime\prime}$, fournissent la proportion :

$$\frac{n_{\prime}}{n_{\prime\prime}} = \frac{\varepsilon_{\prime}^2}{\varepsilon_{\prime\prime}^2}$$

On voit, dès lors, que pour que l'erreur probable des points moyens soit constante, il faut que les nombres de coups ayant servi à les déterminer, soient proportionnels au carré des écarts probables correspondant à leurs portées respectives.

Exemple : Les tables de tir donnent les chiffres suivants pour l'écart probable de la pièce de 8 centim. 4 :

Portées.	Ecart probable.
1000^m	$\pm 0^m{,}40$
1500^m	$0^m{,}75$
2000^m	$1^m{,}30$
2500^m	$2^m{,}30$
3000^m	$3^m{,}85$

Il suit de ce tableau que pour que les points d'impact moyens obtenus à ces diverses portées soient déterminés avec le même degré d'exactitude, il faut que les nombres de coups tirés soient entre eux dans le rapport des chiffres suivants :

Portées.	Nombre de coups à tirer.
1000^m	8
1500^m	28
2000^m	85
2500^m	265
3000^m	741

Si les essais de tir ne tenaient pas compte en une certaine mesure de cette progression, il en résulterait que les diverses données expérimentales auraient une approximation inégale; et, pour des calculs d'interpolation rigoureux, il faudrait affecter à chacune en particulier un *poids* proportionnel à sa valeur d'incertitude.

En pratique on tient rarement compte des poids, ce qui revient à les supposer égaux entre eux; et, pour rendre cette erreur négligeable, on se contente de varier le nombre de coups à peu près proportionnellement avec la distance. Les points d'impact moyens une fois fixés par les opérations sur le terrain, on rectifie les hausses en leur faisant subir les corrections indiquées par une étude raisonnée des circonstances qui ont accompagné le tir, puis, les erreurs normales éliminées de façon à acquérir la probabilité que les hausses moyennes ne sont plus entachées que d'erreurs accidentelles, on améliorera ces valeurs par voie d'interpolation.

L'interpolation a pour résultat d'opérer sur chaque élément une compensation en vertu de laquelle le système des valeurs moyennes fourni par les expériences est remplacé par un autre qui en diffère le moins possible, mais qui satisfait à la loi de continuité, et jouit par cela même d'une probabilité plus grande.

Pour déterminer la loi des hausses en fonction des portées, la première recherche à faire est celle de la forme analytique ou graphique qu'il convient d'assigner à cette loi.

Le problème est susceptible d'une solution purement graphique et se présente alors sous forme d'un certain nombre de points donnés sur le papier et qu'il faut réunir par une courbe continue; il aura quelque chose d'indéterminé, comme toutes les questions d'interpolation, mais il pourra néanmoins se résoudre avec une certaine approximation si les points se présentent dans de bonnes conditions. Le tracé de la courbe se fait de préférence sur papier quadrillé; il exige beaucoup de tact et d'attention, et l'opérateur aura à voir par une discussion sérieuse quels sont les points dont il faut tendre à rapprocher la courbe eu égard à la plus grande probabilité de leur exactitude.

L'interpolation graphique n'offre pas les ressources de l'analyse et ne peut pas prétendre à la même rigueur mathématique; mais elle lui est un auxiliaire précieux, et elle suffit à l'étude préliminaire du sujet. La courbe une fois tracée (et il est impossible qu'elle échappe à une cause d'erreur toute physique, celle de la main de l'opérateur), on corrige la lecture des hausses par l'observation des différences premières et secondes; de façon à ce que, sans s'écarter sensiblement de la courbe, elle satisfasse à la loi de continuité.

Pour déterminer la forme analytique de la courbe des hausses en fonction des portées, nous remarquerons qu'elle est concave vers l'axe des abscisses, régulière dans son étendue, sans point d'inflexion ni de rebroussement; elle devra en conséquence satisfaire à la formule générale :

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc....}$$

dans laquelle les coefficients *B, C, D,* etc., sont positifs, et le coefficient *A* négatif ou positif suivant qu'il s'agit du tir des pièces ou de celui des armes à feu portatives.

Pour $x = 0$, on doit effectivement avoir : $y = \mp A$; soit l'angle de relèvement ou de dépression initial de l'arme qu'on envisage.

L'interpolation graphique des données énumérées plus haut montre que les hausses (exprimées en $^0/_{00}$ de la longueur de la ligne de mire naturelle) ont leurs deuxièmes différences constantes et sensiblement égales à 0,2 $^0/_{00}$ pour des écarts de 100 mètres en portée. On en conclut qu'une équation du second degré est suffisamment convergente pour rendre l'ensemble des observations. L'angle y sera défini par sa fonction trigonométrique usuelle en balistique, qu'indique la formule du mouvement dans le vide; et nous poserons l'expression parabolique :

$$y = \sin 2\varphi = ax^2 + bx + c.$$

A côté de cette formule, on peut en employer une autre proposée par M. le colonel Siegfried et qui est devenue classique en Suisse comme formule d'interpolation balistique :

$$y = \sin 2\varphi = x \mathrm{A} \mathrm{B}^x + c.$$

Cette expression a l'avantage d'être logarithmique, et répond aussi bien que la première aux exigences du calcul.

La détermination préalable de l'angle de dépression ou de relèvement initial permet de faire disparaître de ces deux formules le terme non affecté de la variable x.

Cet angle varie essentiellement avec la nature d'une bouche à feu, de son affût et de sa charge; avec le mécanisme, les accessoires et la charge d'une arme à feu portative, etc., etc. On détermine le plus souvent par une épreuve directe cette donnée importante; cela fait, les formules d'interpolation se simplifieront en substituant au calcul des hausses celui des élévations effectives; soit l'angle de départ du projectile à l'angle de mire.

La courbe des élévations effectives est parallèle à celle des hausses, est tout entière au dessus de l'axe des x et passe nécessairement par l'origine des coordonnées.

Les deux formules modifiées se définissent :

$$\sin 2(\varphi \pm \varphi_0) = ax^2 + bx.$$
$$\sin 2(\varphi \pm \varphi_0) = x \mathrm{A} \mathrm{B}^x.$$

Le calcul des constantes peut se faire par la méthode des coefficients indéterminés ou par celle des moindres carrés.

1° *La méthode des coefficients indéterminés* offre l'inconvénient de ne faire servir à la détermination de la courbe qu'un nombre de moyennes d'observations limité à celui des constantes. On doit avoir soin de choisir les données avec discernement et de se rendre compte, par un tracé graphique préalable, de celles qui doivent être écartées comme anormales. Autant que faire se peut on donne la préférence aux points extrêmes et à un point moyen : une formule d'interpolation n'étant applicable qu'entre les limites des données qui ont servi à l'établir.

Quoi qu'il en soit, la nature de cette courbe approximative est essentiellement indéterminée; et l'on peut s'en convaincre facilement en calculant les constantes successivement au moyen de deux groupes différents d'équations.

1er *exemple. Soient à déterminer les valeurs probables des constantes* a, b *et* c *de la formule parabolique :*

$$\sin 2\varphi = ax^2 + bx + c$$

au moyen des 3 premières séries de notre tableau des données.

La distance x étant exprimée en hectomètres nous posons :

$$\begin{aligned}
\sin 2\varphi_{0,10} &= 0{,}01 \,.\, a + 0{,}1 \,.\, b + c = -\,0{,}01050 \\
\sin 2\varphi_{5} &= 25 \,.\, a + 5 \,.\, b + c = +\,0{,}02560 \\
\sin 2\varphi_{10} &= 100 \,.\, a + 10 \,.\, b + c = +\,0{,}07033
\end{aligned}$$

La résolution de ces trois équations de condition à 3 inconnues donne les valeurs suivantes, applicables entre 0 m. et 1000 m. de portée.

$$\begin{aligned}
a &= +\,0{,}0001582 \\
b &= +\,0{,}006573 \\
c &= -\,0{,}011222
\end{aligned}$$

Et le relèvement initial s'obtient en faisant dans la formule $x = 0$, et posant :

$$\sin 2\varphi = c$$

d'où : $\varphi_0 = -\,0^{\circ}\,19'\,10''$, soit $-\,5{,}53\ ^0/_{00}$

2me *exemple. Soient à déterminer les valeurs probables des constantes A et B de la formule logarithmique :*

$$\sin 2(\varphi + \varphi_0) = x\,\mathrm{A}\,.\,\mathrm{B}^{x}.$$

La première inconnue à dégager de la formule est φ_0, et le calcul se fait directement au moyen de la 1re série, tirée à 10 m. de la bouche (voir le tableau des données).

La vitesse initiale de 389 m. (valeur légèrement inférieure à celle que donne la table de tir officielle) permet de poser, sans erreur sensible, la durée :

$$t = \frac{10^{\mathrm{m}}}{389^{\mathrm{m}}}$$

pour l'espace de 10 m. parcouru par le projectile.

La hauteur de chute correspondante a pour expression :

$$h = \frac{1}{2}\,g\,.\,t^2 = \frac{9^{\mathrm{m}},8 \times (10)^2}{2 \times (389)^2} = 3^{\mathrm{mm}},24.$$

La hausse négative moyenne pour 10 m. étant $5{,}3\ ^0/_{00}$, nous aurons en valeur absolue, à cette même distance, un relèvement de :

$$53^{\mathrm{mm}} + 3^{\mathrm{mm}},24 = 56^{\mathrm{mm}},24.$$

Soit un angle de relèvement :

$$\varphi_0 = -5{,}6\,{}^0/_{00} = -0^\circ{}_{/\!/}19'{}_{/\!/}15''.$$

Ceci posé, déterminons les valeurs probables des constantes A et B au moyen des données d'observation à 500 m. et 1993 m.

La distance étant exprimée en hectomètres, nous posons comme équations de condition :

$$\sin 2\,(\varphi_{\prime} + \varphi_0) = x_{\prime}\,.\,\mathrm{A}\,.\,\mathrm{B}^{x_{\prime}}.$$
$$\sin 2\,(\varphi_{\prime\prime} + \varphi_0) = x_{\prime\prime}\,.\,\mathrm{A}\,.\,\mathrm{B}^{x_{\prime\prime}}.$$

Résolvant par rapport à A et B on a :

$$\mathrm{B} = \sqrt[x_{\prime} - x_{\prime\prime}]{\frac{x_{\prime}\,.\,\sin 2\,(\varphi_{\prime\prime} + \varphi_0)}{x_{\prime\prime}\,.\,\sin(\varphi + \varphi_0)}}$$

$$\mathrm{A} = \frac{\sin 2\,(\varphi_{\prime} + \varphi_0)}{x_{\prime}\,.\,\mathrm{B}^{x_{\prime}}}$$

Remplaçant x et φ par leurs valeurs numériques :

$$\log \mathrm{B} = \log \sqrt[19.93-5]{\frac{5 \times \sin 11^\circ{}_{/\!/}0'\,{}^1/_2}{19{,}93 \times \sin 2^\circ{}_{/\!/}6'\,{}^1/_2}} = 0{,}00768$$

$$\log \mathrm{A} = \log \frac{\sin 2^\circ{}_{/\!/}6'\,{}^1/_2}{5\,\mathrm{B}^5} = \bar{3}{,}82834$$

Si nous calculons avec ces coefficients numériques les valeurs $(\varphi_{10} + \varphi_0)$, $(\varphi_{15} + \varphi_0)$, etc., nous remarquerons qu'elles s'écartent sensiblement des données d'observation. L'écart est maximum à la distance de 3162 m. et égal à 40' :

$$2\,(\varphi_{31,62} + \varphi_0) = 10^\circ{}_{/\!/}56'{}_{/\!/}6'' \text{ au lieu de } 10^\circ{}_{/\!/}16'\,{}^1/_4$$

Cet écart est trop considérable ; et il y a lieu, en conséquence, à chercher une autre valeur plus exacte de ces mêmes constantes au moyen d'autres données d'observations ; soit, par exemple, à 3162 m. et 1993 m.

$$\log \mathrm{B} = \log \sqrt[31{,}62-19{,}93]{\frac{19{,}93 \times \sin 20^\circ{}_{/\!/}32'\,{}^1/_2}{31{,}62 \times \sin 11^\circ{}_{/\!/}0'{}_{/\!/}{}^1/_2}} = 0{,}00546$$

$$\log \mathrm{A} = \log \frac{\sin 11^\circ\ 0'\,{}^1/_2}{19{,}93 \times \mathrm{B}^{19{,}93}} = \bar{3}{,}87259$$

Le calcul des élévations effectives au moyen de ces coefficients numériques donne le tableau comparatif suivant :

Portées.	$\varphi + \varphi_0$		Différences.
	Valeurs calculées.	Données d'observat.	
500m	1° 8′ 16″	1° 3′ 1/4	+ 5′ 1″
1000m	2° 25′ 48″	2° 20′ 1/4	+ 5′ 33″
1500m	3° 52′ 59″	3° 48′ 1/4	+ 4′ 34″
1993m	5° 30′ 15	5° 30′ 1/4	0′ 0″
2485m	7° 20′ 9	7° 26′ 1/4	— 6′ 6″
3162m	10° 16′ 15	10° 16′ 1/4	0′ 0″

Remarquons que l'angle de relèvement a été trouvé de 19′ 10″ dans le premier cas et de 19′ 15″ dans l'autre : la différence est minime; toutefois, dans le cas particulier, le calcul direct au moyen de la 1re série seule inspire plus de confiance. Il résulte effectivement de la formule de Ganss, donnée au commencement de cette étude, que le *poids* de cette série est très supérieur aux autres. De plus, ce tir à 10 m. de la bouche s'est exécuté dans des conditions de précision spéciales, dans le détail desquelles nous n'entrerons pas, mais qui contribuent à lui assurer une probabilité d'exactitude exceptionnelle.

2° *La méthode des moindres carrés,* dont l'application numérique donne lieu à des développements de calculs longs et minutieux, permet (contrairement à la méthode précédente) de conclure d'un nombre illimité de données d'observations, entachées d'erreurs normales, les valeurs les plus exactes possibles des inconnues.

La méthode des moindres carrés est basée sur ce principe, établi par Laplace dans sa théorie des probabilités, que *les constantes d'un groupe d'équations empiriques, donnant lieu à des erreurs (inconnues) e', e'', e''', etc., sont déterminées avec le moins de chance possible d'erreur, quand on fait en sorte que la somme des carrés de ces quantités, e', e'', e''', etc., soit minimum.*

Ce qui revient à poser : $\Sigma e^2 =$ minimum.

Calculs des constantes a, b et c de la formule parabolique d'interpolation par la méthode des moindres carrés.

Soit *l'équation générale :*

$$(1) \qquad y = ax^2 + bx + c$$

et un nombre n de données expérimentales. Chaque donnée fournit une équation particulière que nous représenterons comme ci-dessous;

et les coefficients à déterminer doivent satisfaire aux *n équations de condition* suivantes :

$$\begin{cases} y_{,} = a x_{,}^{2} + b x_{,} + c \\ y_{,,} = a x_{,,}^{2} + b x_{,,} + c \\ y_{,,,} = a x_{,,,}^{2} + b x_{,,,} + c \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{n} = a x_{n}^{2} + b x_{n} + c \end{cases}$$

Mais les valeurs de $y_{,}, y_{,,}, y_{,,,} \dots . y_n$ et de $x_{,}, x_{,,}, x_{,,,} \dots . x_n$ étant données par l'expérience et l'observation, ces formules forment en réalité un système incompatible, et l'on doit admettre qu'elles sont affectées des erreurs $\Delta_{,}, \Delta_{,,}, \Delta_{,,,} \dots . \Delta_n$ représentant les différences entre les valeurs calculées et celles observées : c'est-à-dire les corrections à faire subir aux observations.

Ces erreurs seront exprimées par le groupe *d'équations aux corrections* ci-dessous :

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta_{,} = a x_{,}^{2} + b x_{,} + c - y_{,} \\ \Delta_{,,} = a x_{,,}^{2} + b x_{,,} + c - y_{,,} \\ \Delta_{,,,} = a x_{,,,}^{2} + b x_{,,,} + c - y_{,,,} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Delta_{n} = a x_{n}^{2} + b x_{n} + c - y_{n} \end{cases}$$

Cela posé, pour obtenir la loi qui se rapproche le plus de toutes les données particulières de l'expérience, il faut, d'après le principe de Laplace, que la somme des carrés des corrections que cette loi fera subir aux données, soit minimum. Condition exprimée par la relation :

$$\Sigma \Delta^{2} = \Delta_{,}^{2} + \Delta_{,,}^{2} + \Delta_{,,,}^{2} + \dots \Delta_{n}^{2} = \text{minimum} ;$$

ou, plus exactement :

$$\Sigma k \Delta^{2} = k_{,}\Delta_{,}^{2} + k_{,,}\Delta_{,,} + k_{,,,}\Delta_{,,,}^{2} + \dots k_{n} \Delta_{n}^{2} = \text{minimum},$$

en faisant entrer dans les calculs les erreurs relatives au lieu des erreurs absolues; ce qui revient à donner à chaque erreur absolue un *poids k* inversément proportionnel au carré de l'erreur probable à craindre sur la donnée correspondante.

Pour remplir la condition du minimum, il faut dériver cette expression par rapport à ses trois variables indépendantes *a, b* et *c,* et égaler les résultats à zéro.

Nous poserons donc :

$$(3) \qquad \begin{cases} 2 k_{,} \Delta_{,} \dfrac{d \Delta_{,}}{d a} + 2 k_{,,} \Delta_{,,} \dfrac{d \Delta_{,,}}{d a} + \dots\dots 2 k_{n} \Delta_{n} \dfrac{d \Delta_{n}}{d a} = 0 \\ 2 k_{,} \Delta_{,} \dfrac{d \Delta_{,}}{d b} + 2 k_{,,} \Delta_{,,} \dfrac{d \Delta_{,,}}{d b} + \dots\dots 2 k_{n} \Delta_{n} \dfrac{d \Delta_{n}}{d b} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 2 k_{,} \Delta_{,} \dfrac{d \Delta_{,}}{d c} + 2 k_{,,} \Delta_{,,} \dfrac{d \Delta_{,,}}{d c} + \dots\dots 2 k_{n} \Delta_{n} \dfrac{d \Delta_{n}}{d c} = 0 \end{cases}$$

Dérivant et remplaçant $\frac{d\Delta}{da}$ par sa valeur x^2

$\frac{d\Delta}{db}$ » » x

$\frac{d\Delta}{dc}$ » » 1

et substituant à Δ sa valeur, exprimée par le second membre des équations aux corrections, nous aurons :

$$(4)\left\{\begin{array}{l} x_{,}^2 k_{,} (a x_{,}^2 + b x_{,} + c - y_{,}) + x_{,,}^2 k_{,,} (a x_{,,}^2 + b x_{,,} + c - y_{,,}) + \ldots \\ \qquad \ldots\ldots x_n^2 k_n (a x_n + b x_n + c - y_n) = 0 \\ x_{,} k_{,} (a x_{,}^2 + b x_{,} + c - y_{,}) + x_{,,} k_{,,} (a x_{,,}^2 + b x_{,,} + c - y_{,,}) + \ldots \\ \qquad \ldots\ldots x_n k_n (a x_n^2 + b x_n + c - y_n) = 0 \\ k_{,} (a x_{,}^2 + b x_{,} + c - y_{,}) + k_{,,} (a x_{,,} + b x_{,,}^2 + c - y_{,,}) + \ldots \\ \qquad \ldots\ldots k_n (a x_n^2 + b x + c - y_n) = 0 \end{array}\right.$$

Développant ces équations, ordonnant les termes et adoptant la notation de Ganss :

$$[x] = x_{,} + x_{,,} + x_{,,,} + \ldots . x_n$$

Nous aurons enfin les *équations normales :*

$$(5)\left\{\begin{array}{l} [k x^4]\, a + [k x^3]\, b + [k x^2]\, c = [k x^2 y] \\ [k x^3]\, a + [k x^2]\, b + [k x]\, c = [k x y] \\ [k x^2]\, a + [k x]\, b + [k]\, c = [k y] \end{array}\right.$$

Dans le cas particulier de $c = o$; c'est-à-dire celui où la formule d'interpolation se présente sous la forme :

$$y = a x^2 + b x;$$

les équations normales se simplifient, et on en tire directement les valeurs les plus probables de a et b, soit :

$$(6)\left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{[k x^2 y][k x^3] - [k x y][k x^4]}{[k x^3]^2 - [k x^2][k x^4]} \\ \\ a = \dfrac{[k x y] - [k x^2]\, b}{[k x^3]} \end{array}\right.$$

Comme exemple de ce calcul, nous allons traiter dans ses développements principaux l'application numérique des formules (5) *au cas général des hausses* (voir le tableau des données).

L'opération consiste à dresser un tableau synoptique du calcul des coefficients sommatoires et auxiliaires. Puis on substitue ces derniers dans les équations normales et déduit les valeurs les plus probables des inconnues.

Pour simplifier nous négligerons les poids, ce qui revient à poser dans les formules normales : $k = 1$.

y est défini dans ce calcul par sa fonction : *sin 2* φ.

Tableau des coefficients sommatoires et auxiliaires.

x	x^2	x^3	x^4	2φ	$\sin 2\varphi$	$x \sin 2\varphi$	$x^2 \times \sin 2\varphi$
(Hectom.)							
0,10	0,001	0.001	0,0001	—0°,,36'	—0,0105	—0,0010	—0.0001
5, —	25,—	125,—	625,—	+1°..24'	+0,0244	+0,1220	+0,6100
10,—	100, —	1000,—	10000,—	4°,.2'	0.0703	0,7030	7,030[illegible]
15.—	225,—	3375,—	50625,—	6°. 58'	0,1213	1,8195	27,292[illegible]
19,93	397,2049	7916 29	157771,73	10°,,22'	0,1800	3,5860	71,478
24 85	617,5225	15345 434	381334,04	14°,.14'	0,2459	6 1100	151,83
31,62	999,8244	31614,447	999648,77	19°,,54'	0,3404	10,7630	340,31
106,50	2364,5518	59376,172	1600004,54		0,9718	23,1025	598,5504

D'après ce tableau, les formules normales s'écrivent :

$$16000,045\,.\,a + 593,762\,.\,b + 23,645\,.\,c = 5,985$$

$$5937,617\,.\,a + 236,455\,.\,b + 10,650\,.\,c = 2,310$$

$$2364,552\,.\,a + 106,50\,.\,b + 7\,.\,c = 0,972$$

La résolution de ces 3 équations à 3 inconnues donne les chiffres suivants, que nous mettons en regard de ceux obtenus par la méthode des coefficients indéterminés :

Méthode des moindres carrés.	Méthode des coeff. indéterminés.
$a = + 0,0001308$	$a = + 0,0001582$
$b = + 0,007064$	$b = + 0,006573$
$c = - 0,01281$	$c = - 0,011222$

Faisant $x = o$, dans la formule générale, et donnant à c sa valeur numérique, on trouve :

$$\sin 2\varphi_0 = c = -0,01281$$

et l'angle de relèvement : $\varphi_0 = -22'$, soit $-6,4\,^0/_{00}$.

La loi des hausses est donc dans notre exemple :

$$\sin 2\varphi = 0,0001308\,.\,x^2 + 0,007064\,.\,x - 0,01281$$

En faisant successivement dans cette équation :

$$x = 10^{m},\ 500^{m},\ 1000^{m},\ \text{etc.},$$

nous obtenons la valeur des corrections que cette loi fait subir à nos observations; elles sont renfermées dans le tableau suivant :

Portées.	φ		Différences.
	Données d'observation.	Valeurs calculées.	
10^{m}	$-0°,,18'$	$-0°,,20',,48''$	$-2',,48''$
500^{m}	$+0°,,44'$	$+0°,,44',,29''$	$+0',,29''$
1000^{m}	$2°,,1'$	$2°,,\ 2',,\ 0''$	$+1',,\ 0''$
1500^{m}	$3°,,29'$	$3°,,31',,14''$	$+2',,14''$
1993^{m}	$5°,,11'$	$5°,,10',,28''$	$-0',,32''$
2485^{m}	$7°,,7'$	$7°,,\ 2',,50''$	$-4',,10''$
3162^{m}	$9°,,57'$	$9°,,58',,45''$	$+1',,45''$

Calcul des constantes *a*, *b* et *c* de la formule logarithmique d'interpolation par la méthode des moindres carrés.

Soit *l'équation générale*

$$(1) \qquad y = x \,.\, a\, b^{x} + c$$

Cette expression doit tout d'abord être rendue linéaire. Pour cela, il faut admettre que l'on possède déjà des valeurs suffisamment approchées des constantes pour qu'en les substituant, avec leurs corrections inconnues α, β et γ, dans le second membre de l'équation et développant celui-ci en série convergente, les termes du 2^{d} degré et au-dessus soient négligeables.

Cet artifice de calcul a pour résultat de rendre la formule plus maniable, dans le but spécial que nous avons en vue; soit la recherche des inconnues qui rendent minimum l'expression : $\Sigma k \Delta^{2}$.

Soient A, b et C, les valeurs approchées de a, b et c, calculées par la méthode des coefficients indéterminés, et satisfaisant à la fonction composée :

$$(2) \qquad Y = x \,.\, A\, B^{x} + C = f\,(A,\, B,\, C)$$

Les valeurs calculées de Y présentent avec les données expérimentales y, des différences : $y - Y$; et les corrections à apporter aux constantes, de façon à reconstituer les valeurs les plus probables de y, sont soumises à la condition :

$$(3) \qquad y = x\,(A+\alpha)\,(B+\beta)^{x} + c = f\,[(A+\alpha),\, B+\beta),\, (C+\gamma)]$$

La série de Taylor, appliquée à une fonction quelconque $f(x+k)$ donne le développement :

$$f(x+k) = f(x) + k f'(x + \frac{k^2}{2} f''(x) + \frac{k^3}{2.3} f'''(x) + \text{etc.}$$

Substituant et remarquant que, les corrections étant très petites, leurs carrés et puissances supérieures sont négligeables, nous aurons :

$$(4) \qquad y = Y + \frac{dY}{dA}\alpha + \frac{dY}{dB}\beta + \frac{dY}{dC}\gamma$$

Dérivant et remplaçant $\frac{dY}{dA}$ par sa valeur : $x B^x$

$\frac{dY}{dB}$ » » $x^2 A B^{x-1}$

$\frac{dY}{dC}$ » » 1

il vient :

$$(5) \qquad y - Y = x B^x \alpha + x^2 A B^{x-1} . \beta + \gamma$$

équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$(6) \qquad y - Y = P . \alpha + Q . \beta + \gamma$$

en posant pour simplifier $x B^x = P$
et $x^2 A B^{x-1} = Q$

Cela posé, nous aurons n données expérimentales correspondant à un même nombre *d'équations de condition* particulières et *d'équations aux corrections.*

Traitant ces formules comme nous l'avons fait dans le cas précédent, nous poserons successivement :

$$(7) \qquad \begin{cases} \Delta_{,} = P_{,}\alpha + Q_{,}\beta + \gamma - (y_{,} - Y_{,}) \\ \Delta_{,,} = P_{,,}\alpha + Q_{,,}\beta + \gamma - (y_{,,} - Y_{,,}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_n = P_n\alpha + Q_n\beta + \gamma - (y_n - Y_n) \end{cases}$$

et :

$$\Sigma k \Delta^2 = k_{,} \Delta_{,}^2 + k_{,,} \Delta_{,,}^2 + k_{,,,} \Delta_{,,,}^2 + \text{etc.} = \text{minimum.}$$

Dérivant par rapport à α, β et γ; et égalant les résultats à zéro, il vient :

$$(8)\quad \begin{cases} 2k_{,}[\gamma+P_{,}\alpha+Q_{,}\beta-(y-Y_{,})]+2k_{,,}[\gamma+P_{,,}\alpha+Q_{,,}\beta-(y_{,,}-Y_{,,})] \\ \qquad +\ldots\ldots\ldots 2k_n(\gamma+P_n\alpha+Q_n\beta-(y_n-Y_n)=0 \\ 2k_{,}[\gamma+P_{,}\alpha+Q_{,}\beta-(y_{,}-Y_{,})]P_{,}+2k_{,,}[\gamma+P_{,,}\alpha+Q_{,,}\beta-(y_{,,}-Y_{,,})]P_{,,} \\ \qquad +\ldots\ldots\ldots 2k_n(\gamma+P_n\alpha+Q_n\beta-(y_n-Y_n)P_n=0 \\ 2k_{,}[\gamma+P_{,}\alpha+Q_{,}\beta-(y_{,}-Y_{,})]Q_{,}+2k_{,,}[\gamma+P_{,,}\alpha+Q_{,,}\beta-(y_{,,}-Y_{,,})]Q_{,,} \\ \qquad +\ldots\ldots\ldots 2k_n(\gamma+P_n\alpha+Q_n\beta-(y_n-Y_n)Q_n=0 \end{cases}$$

Développant ces équations et ordonnant les termes :

$$(9)\quad \begin{cases} (k_{,}P_{,}+k_{,,}P_{,,}+k_{,,,}P_{,,,}+\ldots k_nP_n)\alpha+(k_{,}Q_{,}+k_{,,}Q_{,,}+k_{,,,}Q_{,,,}+\ldots \\ \qquad k_nQ_n)\beta+(k_{,}+k_{,,}+k_{,,,}\ldots k_n)\gamma=k_{,}(y_{,}-Y_{,})+k_{,,}(y_{,,}-Y_{,,}) \\ \qquad +k_{,,,}(y_{,,,}-Y_{,,,})+\ldots\ldots k_n(y_n-Y_n) \\ (k_{,}P_{,}^2+k_{,,}P_{,,}^2+k_{,,,}P_{,,,}^2+\ldots k_nP^2_n)\alpha+(k_{,}P_{,}Q_{,}+k_{,,}P_{,,}Q_{,,}+k_{,,,}P_{,,,}Q_{,,,} \\ \qquad +\ldots k_nP_nQ_n)\beta+(k_{,}P_{,}+k_{,,}P_{,,}+k_{,,,}P_{,,,}+\ldots k_nP_n)\gamma= \\ \qquad =k_{,}(y_{,}-Y_{,})P_{,}+k_{,,}(y_{,,}-Y_{,,})P_{,,}+k_{,,,}(y_{,,,}-Y_{,,,})P_{,,,}+\ldots \\ \qquad k_n(y_n-Y_n)P_n \\ (k_{,}P_{,}Q_{,}+k_{,,}P_{,,}Q_{,,}+k_{,,,}P_{,,,}Q_{,,,}+\ldots k_nP_nQ_n)\alpha+(k_{,}Q_{,}^2+k_{,,}Q_{,,}^2 \\ \qquad +k_{,,,}Q_{,,,}^2+\ldots k_nQ_n^2)\beta+(k_{,}Q_{,}+k_{,,}Q_{,,}+k_{,,,}Q_{,,,}+\ldots \\ \qquad k_nQ_n)\gamma=k_{,}(y_{,}-Y_{,})+k_{,,}(y_{,,}-Y_{,,})+k_{,,,}(y_{,,,}-Y_{,,,})+\ldots \\ \qquad k_n(y_n-Y_n) \end{cases}$$

Et en adoptant la notation de Ganss, *les formules normales* se présentent sous la forme :

$$(10)\quad \begin{cases} [kP]\alpha+[kQ]\beta+[k]\gamma=[k(y-Y)] \\ [kP^2]\alpha+[kPQ]\beta+[kP]\gamma=[kP(y-Y)] \\ [kPQ]\alpha+[kQ^2]\beta+[kQ]\gamma=[kQ(y-Y)] \end{cases}$$

Dans le cas particulier de $c=o$, soit :

$$y=x\,.\,ab^x\;;$$

les équations normales se simplifient, et on en tire directement les valeurs les plus probables des corrections à apporter aux constantes a et b, soit :

$$(11)\quad \begin{cases} \beta=\dfrac{[kP(y-Y)]\,[kPQ]-[kQ(y-Y)]\,[kP^2]}{[kPQ]^2-[kP^2]\,[kQ^2]} \\ \alpha=\dfrac{[kP(y-Y)]-\beta[kPQ]}{[kP^2]} \end{cases}$$

Comme exemple de ce calcul, nous allons traiter dans ses développements principaux l'application numérique des formules (11) *à la loi des élévations effectives* (voir le tableau des données).

De même que pour la recherche numérique de la loi des hausses par la formule parabolique, nous négligerons ici les poids (en faisant $k = 1$ dans les formules normales), et nous déduirons les coefficients auxiliaires du tableau synoptique des coefficients sommatoires.

$y - Y$ est défini dans ce calcul par sa fonction : $\sin 2\,(y - \mathrm{Y})$.

Tableau des coefficients sommatoires et auxiliaires.

Portées en hectomètres.	$y - \mathrm{Y}$	P^2	Q^2	PQ	P sin 2 $\times (y - \mathrm{Y})$	Q sin 2 $\times (y - \mathrm{Y})$
5	+5′,,1″	28,35	0,03834	1,04256	+0,015540	+0,0005715
10	+5′,,33″	1[illegible]8,59	0,69736	9,46960	+0,036614	+0,0[illegible]26[illegible]63
15	+4′,,45″	164,43	4,00343	36,24120	+0,049966	+0,0055195
19,93	0′,,0″	655,63	14,12290	96,22000	—	—
24,85	−6′,,6″	1153,50	39,25580	212,79[illegible]03	−0,120530	−0,0222350
31,62	0′,,0″	2215,85	120,06000	515,78500	—	—
		4346,35	178,17783	871,55939	−0,01841	−0,0134477

La seconde colonne du tableau donne la différence entre les angles d'élévation observés et ceux calculés par la méthode des coefficients indéterminés (voir le tableau page 279).

P a pour valeur : $x\,\mathrm{B}^x$ [voir formule (5) et (6)]

Q » » $x^2\,\mathrm{A}\,\mathrm{B}^{x-1}$

D'autre part nous avons trouvé (pag. 278) :

$$\log \mathrm{A} = \bar{3},87259$$
$$\log \mathrm{B} = 0,00546$$

D'après ce tableau les formules (11) se chiffrent :

$$\beta = \frac{-0,01841 \times 871,559 + 0,01345 \times 4346,35}{(871,559)^2 - 4346,35 \times 177,178} = +0,000062134$$

$$\alpha = \frac{-0,01841 - 0,000062134 \times 871,5594}{4346,35} = -0,000016695$$

Et les constantes rectifiées ont pour valeur :

$$a = \mathrm{A} - \alpha = 0,0074575 - 0,000016695 = 0,007440805$$
$$b = \mathrm{B} + \beta = 1,01265 + 0,0000621 \quad = 1,0127121$$

$$\log a = \log(\mathrm{A} - \alpha) = \bar{3},8716196$$
$$\log b = \log(\mathrm{B} + \beta) = 0,00548396$$

La loi des élévations effectives est donc dans notre exemple :

$$\sin 2(\varphi + \varphi_0) = x \times 0{,}007440805 \times (1{,}0127121)^x$$

En faisant successivement dans cette équation :

$$x = 500^m,\ 1000^m,\ 1500^m,\ \text{etc.},$$

nous obtenons la valeur des corrections que cette loi fait subir à nos observations ; elles sont renfermées dans le tableau suivant :

Portées.	$\varphi + \varphi_0$		Différences.
	Données d'observation.	Valeurs calculées.	
0^m	0	0	
$5(0^m$	$1^\circ,,3'\,^1/_4$	$1^\circ,,\ 8',,\ 8''$	$+\ 4',,53''$
$10{:}0^m$	$2^\circ,,20'\,^1/_4$	$2^\circ,,25',,17''$	$+\ 5',,\ 2''$
1500^m	$3^\circ,,48'\,^1/_4$	$3^\circ,,52',,34''$	$+\ 4',,19''$
1993^m	$5^\circ,,30'\,^1/_4$	$5^\circ,,29',,52''$	$-\ 0',,23''$
2485^m	$7^\circ,,26'\,^1/_4$	$7^\circ,,19',,46''$	$-\ 6',,29''$
3162^m	$10^\circ,,16'\,^1/_4$	$10^\circ,,16',,\ 0''$	$-\ 0',,15''$

Les applications numériques traitées dans le cours de cette étude ont eu exclusivement en vue le calcul interpolaire des hausses ou des élévations effectives. Nous aurions aussi bien pu déterminer la loi des durées en fonction des portées d'après les mêmes essais de tir ; et les équations générales d'interpolation :

$$t'' = y = ax^2 + bx + c$$
$$t'' = y = xab^x + c$$

sont applicables à cette recherche (avec leurs formules normales) ainsi qu'il serait aisé de le démontrer.

Il semble à première vue que le terme c, non affecté de la variable x, doive disparaître de la formule des durées ; et qu'à une portée x nulle, doive correspondre une durée nulle ; et cependant la résolution analytique ou graphique du problème aboutit généralement à une valeur négative ou positive de c.

Il doit effectivement en être ainsi, et cela pour deux raisons :

1° Si nous admettons avec M. Le Boulangé et M. Navez que la vitesse du projectile marche en croissant pendant les premiers instants du trajet et atteigne son maximum à une petite distance hors de la bouche de la pièce, il faut en conclure que la courbe des durées se compose de deux branches, dont la première échappe à la formule et présente vers l'origine une partie convexe jusqu'à son point de raccordement avec la branche concave. Le raccordement des 2 branches correspond au maximum de la vitesse ; et c'est à partir de ce point seulement que commence la loi normale et que s'appliquent les formules d'interpolation données plus haut.

2° Parmi les erreurs qui affectent l'exactitude des données d'observation, il en est une constante et qui tient à la cause toute physique du défaut d'instantanéité dans la transcription au chronographe de la durée t. Erreur qu'exalte sensiblement la collimation personnelle de l'opérateur.

Remarquons, en terminant, que les deux tables de tir qui résultent de nos calculs numériques ne sont rigoureusement applicables qu'au cas particulier de la pièce n° 41, qui en a fourni les éléments. Une table pratique tient compte de l'erreur personnelle des pièces; on la calcule pour une pièce fictive moyenne placée dans des circonstances atmosphériques et balistiques moyennes; et l'on obtient ce résultat en combinant les observations fournies par plusieurs pièces, à diverses époques de l'année et avec des poudres de provenance multiple.

A. v. Muyden,
capitaine d'état-major d'artillerie.

NOUVELLES ET CHRONIQUE

D'après ce que quelques journaux disent du nouveau projet de loi sur l'organisation militaire élaboré par le Département militaire fédéral, l'armée suisse se composerait comme suit :

Elite : Infanterie : 98 bataillons à 6 comp. Carabiniers : 8 bataillons (à 6 comp).

Cavalerie : 12 compagnies de guides, 24 escadrons de dragons.

Artillerie : 48 batteries de campagne, 2 batteries de montagne, 16 compagnies de train de parc, 16 compagnies de parc, 10 compagnies de position, 2 compagnies d'artificiers.

Génie : 12 compagnies de sapeurs, 2 compagnies de parc, 6 compagnies de pontonniers, 8 compagnies de chemins de fer.

Troupes sanitaires : 8 hôpitaux de campagne. Troupes d'administration : 8 détachements.

Landwehr : Infanterie : 98 bataillons. Carabiniers : 8 bataillons.

Cavalerie : 12 compagnies de guides, 24 escadrons de dragons.

Artillerie : 8 batteries de campagne, 22 compagnies de train de parc, 10 compagnies de parc, 15 compagnies de position, 2 compagnies d'artificiers.

Troupes sanitaires : 5 colonnes de transport par chemins de fer. Troupes d'administration : 8 détachements.

On aurait ainsi les effectifs suivants :

	Elite.	*Landwehr.*
Infanterie	81,302 h.	81,302 h.
Cavalerie	3,396	3,396
Artillerie	12,100	6,200
Génie	4,148	3,150
Troupes sanitaires . .	1,640	1,640
Troupes d'administ. .	2,160	2,160
Total . . .	104,746	97,848

L'armée fédérale compterait donc en tout règlementairement 202,000 hommes, y compris l'état-major; mais chaque corps, dit le *Journal de Genève,* aurait probablement un chiffre assez notable d'hommes supplémentaires.

Lausanne. — Imp. L. CORBAZ & Comp.