

**Zeitschrift:** Regio Basiliensis : Basler Zeitschrift für Geographie  
**Herausgeber:** Geographisch-Ethnologische Gesellschaft Basel ; Geographisches Institut der Universität Basel  
**Band:** 34 (1993)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Nichtlineare Wachstumsprobleme und Chaos : Computeranwendungen im Geographieunterricht  
**Autor:** Meier, Hanspeter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1088592>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Nichtlineare Wachstumsprobleme und Chaos

Computeranwendungen im Geographieunterricht

Hanspeter Meier

## Zusammenfassung

*Nichtlineares Wachstum, Rückkoppelung und Chaos sind Begriffe, mit welchen sich die Schülerinnen und Schüler heute auseinandersetzen sollten. Der Autor zeigt, wie im Geographieunterricht (fächerübergreifend mit Informatik, Mathematik oder Physik) anhand des Wachstums von Populationen mit Hilfe eines Computers und einer Tabellenkalkulation ein einfacher erster Zugang zu diesen Begriffen und zur neuen Denkweise gefunden wird.*

## Einleitung

Es liegt im Wesen des Menschen, dass er möglichst die ganze Natur nach streng naturwissenschaftlichen, v.a. mathematischen Gesetzen erfassen und verstehen will. Zugleich möchte er mit diesen Erkenntnissen seine Zukunft und diejenige der Welt, in der er lebt, prognostizieren und "vorausberechnen".

Der Eindruck des Allgemeingültigen und des Vorausberechenbaren täuscht. Seit wenigen Jahren befinden wir uns in einer eigentlichen Revolution unseres Weltbildes. Peitgen (1992<sup>3</sup>) umreisst diese folgendermassen:

---

Adresse des Autors: Hanspeter Meier, Lehrer Wirtschaftsgymnasium und Kantonale Handelsschule Basel; Pfaffenmattweg 75, 4132 Muttenz

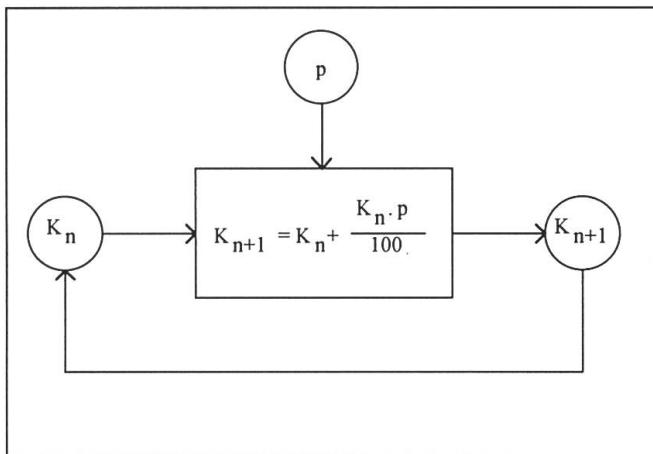


Abb. 1 Rückkoppelungsmodell für die Zinseszinsrechnung.

“Chaotheorie und fraktale Geometrie haben Naturwissenschaftler und Mathematiker mit einer Reihe von Überraschungen konfrontiert, deren Konsequenzen im Verhältnis zu den Angeboten einer sich oft omnipotent gebenden Wissenschaft und Technik zugleich ernüchternd und dramatisch sind:

- Zahlreiche Phänomene sind trotz strengem naturgesetzlichem Determinismus prinzipiell nicht prognostizierbar.
- Es gibt Struktur im Chaos, die sich bildlich in phantastisch komplexen Mustern – den sogenannten Fraktalen – ausdrückt.
- Meist leben Chaos und Ordnung nebeneinander, und der Übergang von der Ordnung ins Chaos folgt strengen Fahrplänen.
- Die bahnbrechenden Entdeckungen wurden erst durch Computerexperimente möglich, d.h. eine von vielen beargwöhnte Technologie zeigt uns ihre eigenen und zugleich auch unsere prinzipiellen Grenzen”.

Der Geographieunterricht ermöglicht im Rahmen der Bevölkerungsgeographie einen relativ leichten Zugang zu den Problemen der Chaos-Theorie. Ausgehend von einfachen Wachstumsbetrachtungen anhand der Erdbevölkerung bzw. der Bevölkerung der Schweiz werden die Probleme des exponentiellen Wachstums untersucht. Die Begrenzung des Wachstums soll anhand der nichtlinearen Verhulstgleichung dargestellt und diskutiert werden. Anschliessend wird mit der Verhulstgleichung und grossen Wachstumsraten ein erster Zugang zum Chaosproblem ermöglicht.

## Nichtlineare Wachstumsvorgänge

### Bevölkerungswachstum mit Zinseszins-Rechnung

Das Bevölkerungswachstum ist ein brennendes Problem unserer Zeit. Gerade die Voraussagbarkeit der Entwicklung und das Verhalten der Welt- bzw. Regionalbevölkerung stellt ein ganzes Spektrum von Problemen. Diese können mit einfachsten mathematischen Hilfsmitteln und einer Tabellenkalkulation (Excel, Lotus, Quattro Pro etc.) wertmässig und grafisch dargestellt und mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden.

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sei das Zinsrechnen (Kapital = Bevölkerung, Zins = Wachstumsrate in %):

Wir legen zu Beginn eines Jahres (1. Januar) ein Kapital  $K_0 = 1000$ .– Fr. auf ein Sparheft bei einer Bank zu einem Zinssatz von  $p = 2\%$ . Der lineare Zins  $Z_1$  während eines Jahres beträgt somit  $Z_1 = \frac{K_0 \cdot p}{100} = \frac{1000 \cdot 2}{100} = 20$ .–. Dieser Zins wird jetzt zum

Kapital geschlagen:  $K_1 = K_0 + Z_1 = 1020$ .– Fr. Für das neue Jahr hat sich also das Ausgangskapital verändert und somit wird sich zwangsläufig auch der Jahreszins verändern. Dieser Prozess wird als Rückkoppelung (Iteration, rekursiver Prozess) bezeichnet. Dabei dient jeweils das Resultat (Output) des Rechenganges als Basis (Input) für den nächsten Rechenvorgang etc. (Abb. 1).

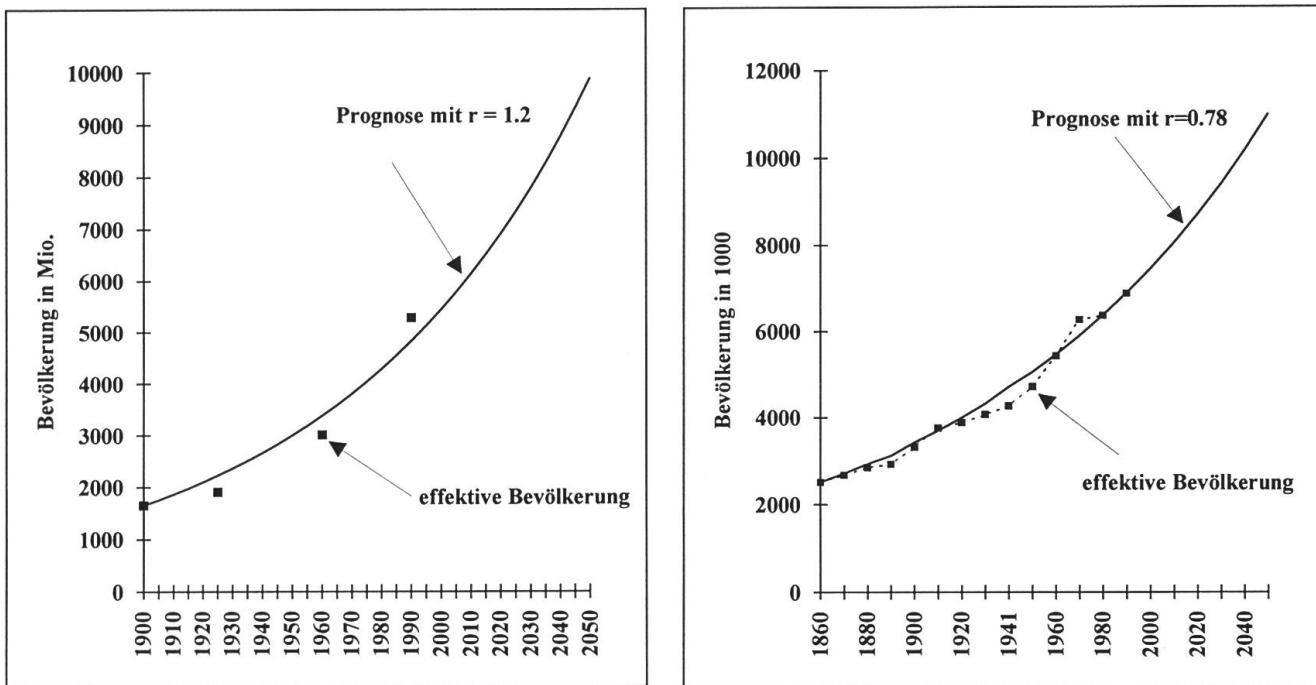
Wir wollen mit Hilfe einer Tabellenkalkulation die Auswirkungen einer Rückkopplung auf das Wachstum der Weltbevölkerung untersuchen. Dazu erstellen wir ein Arbeitsblatt (Abb. 2) mit zwei Spalten. Die erste Spalte A ist für die Jahreszahlen, die zweite Spalte B für die Bevölkerungszahlen reserviert. In die erste Zelle A5 setzen wir die Ausgangsjahreszahl, z.B. 1900, in die Zelle B6 die Ausgangsbevölkerung  $K_0 = 1652$  Mio und in die Zelle E2 eine Wachstumsrate von  $r = 1.2\%$ .

Um die restlichen (beliebigen) Jahreszahlen zu entwickeln, lassen wir diese durch den Computer im Arbeitsblatt ausrechnen: In die Zelle A6 schreiben wir '=A5+1' (Excel-Format). Die restlichen Jahreszahlen können durch Kopieren erzeugt werden. Beim Kopieren von Rechenvorschriften werden alle Zellenadressen automatisch so verändert, dass die relativen Bezüge erhalten bleiben (relative Adressierung).

Ähnlich gehen wir bei der Berechnung der Bevölkerung vor. Hier müssen wir jedoch berücksichtigen, dass jede Rechenvorschrift Bezug auf die Zelle E2 (Wachstumsrate) nimmt. Wir müssen deshalb die Variable  $r$  absolut adressieren (im Excelformat mit dem Zeichen '\$'): Wir schreiben in die Zelle B6: '=B5+(B5\*\$E\$2/100)' und kopieren diese Formel in die übrigen Zellen. Anschliessend stellen wir die Tabelle grafisch dar (Abb. 3). Jetzt können wir mit verschiedenen Wachstumsraten, Ausgangsbevölkerungen und Zeiträumen unterschiedliche Szenarien und Prognosen berechnen und diskutieren. An dieser Stelle muss mit den Schülerinnen und Schülern unbedingt der Unterschied des Zinsrechnens zum echten Bevölkerungswachstum, müssen die Veränderung der Wachstumsraten im Laufe der Zeit und weitere die Bevölkerungszahl beeinflussende Effekte, z.B. die Migration, besprochen werden.

ERDBEV.XLS:1			
Bevölkerungswachstum mit Zinseszinsrechnung			Wachstumsrate $r = 120\%$
Jahr	Bevölkerung in Mio.	Bevölkerung effektiv	Formel für Spalte B
1900	1652	1652	
1901	1672		=B5+B5*(\$E\$2/100)
1902	1692		=B6+B6*(\$E\$2/100)
1903	1712		=B7+B7*(\$E\$2/100)
1904	1733		=B8+B8*(\$E\$2/100)
1905	1754		=B9+B9*(\$E\$2/100)
1906	1775		=B10+B10*(\$E\$2/100)
1907	1796		
1908	1817		etc.
1909	1839		
1910	1861		
1990	4833	5293	
1991	4891		
1992	4950		
1993	5010		
1994	5070		
1995	5130		
1996	5192		
1997	5254		
1998	5317		
1999	5381		
2000	5446		

Abb. 2 Arbeitsblatt zur Bevölkerungsentwicklung mit Zinseszinsrechnung.



### Zinseszins-Rechnung und exponentielles Wachstum

Mit mathematisch weiter fortgeschrittenen Schülerinnen und Schülern kann dieselbe Untersuchung mit Hilfe der Zinseszinsrechnung (siehe Kasten) durchgeführt werden. Anhand dieser Zinseszinsrechnung kann das exponentielle Wachstum der Bevölkerung diskutiert werden (siehe Meadows 1992, 35ff). Gerade in der heutigen Zeit ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler das Prinzip des exponentiellen Wachstums begreifen, da ja bekanntlich sehr viele Prozesse danach ablaufen. Dieser nichtlineare Aufbaumechanismus hat die Eigenschaft, über alle Grenzen zu wachsen. Er führt in endlicher Zeit zu unendlichen Zustandsgrößen. Somit können sich bereits kleinste Schwankungen in den Anfangswerten gravierend auf den Endzustand des betreffenden Systems auswirken. Dies kann leicht auf dem Rechenblatt illustriert werden, indem man die Anfangswerte  $K_0$  und  $r$  verändert. Interessant sind in diesem Zusammenhang die Untersuchungen über die Entwicklung und die Prognosen der Schweizer Bevölkerung (Abb. 4).

Ein Anfangskapital  $K_0$ , das jährlich zu  $p\%$  verzinst wird, ist nach einem Jahr:  $K_1 = K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

zwei Jahren:  $K_2 = K_1 + Z_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$

$n$  Jahren:  $K_n = K_{n-1} + Z_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{n-1} \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

## Stetige Verzinsung

Da die Bevölkerung im Gegensatz zum Zins (er wird im Normalfall nur einmal per Ende Jahr zum Kapital geschlagen) ununterbrochen wächst (stetiges Wachstum) ergibt sich für das Bevölkerungswachstum eine neue Exponentialfunktion (e-Funktion, wobei e für die Eulersche Zahl steht). Es sei bemerkt, dass für unsere Untersuchungen die Abweichungen der Methode mit der e-Funktion von denjenigen mit Zinseszins minimal sind. Für Gymnasiasten der obersten Klassen kann es jedoch reizvoll sein, solche Wachstumsfunktionen zu untersuchen.

Erfährt das Kapital  $K_0$  m Zinszuschläge pro Jahr von je  $\frac{p}{m} \%$ , so ist es nach n Jahren

$$\text{auf } K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{n \cdot m} \text{ angewachsen.}$$

Wenn die Zinszuschläge in jedem Augenblick erfolgen ("stetige Verzinsung"), ist

$$\text{das zu } p \% \text{ verzinst Kapital } K_0 \text{ nach n Jahren wegen } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^n = e^n \text{ auf}$$

$$K_n = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot n} \text{ gewachsen.}$$

## Bevölkerungswachstum mit der Verhulstgleichung

Ein Mechanismus wie das exponentielle Wachstum, der neben der Bevölkerungsentwicklung noch viele andere Phänomene des täglichen Lebens annähernd beschreibt, führt, wie wir gesehen haben, zu einer wahren Bevölkerungsexplosion, wenn er einige Jahre ungebrochen anhält. In der Praxis wird ein solches Wachstum nur eine gewisse Zeit andauern, solange nämlich, bis gewisse Grenzen bezüglich Nahrung, Wasser, Umweltbelastungen, Bevölkerung etc. erreicht sind. In diesem Zusammenhang sei auf das ausgezeichnete Computer-Simulationsprogramm World3-91 von *Bossel* (1993) hingewiesen. Dieses Simulationsprogramm berechnet verschiedene Szenarien zum Buch von *Meadows* "Die neuen Grenzen des Wachstums" (1992).

Schon der britische Nationalökonom und Sozialphilosoph *T.R. Malthus* postulierte ein Bevölkerungsgesetz, nach welchem die landwirtschaftliche Produktion linear, die Bevölkerung jedoch in einer geometrischen Form wächst, so dass das Bevölkerungswachstum durch den Nahrungsspielraum nach oben begrenzt würde. Dieses Gesetz ist durch die Entwicklung seither widerlegt worden.

1845 formulierte der belgische Mathematiker *P.F. Verhulst* ein Wachstumsgesetz, das die Existenz einer oberen Grenze der Bevölkerungsgröße  $K$  berücksichtigt. Wie der Meteorologe *E.N. Lorenz* im Jahre 1963 feststellte und damit der Verhulst-Gleichung zu neuen Ehren verhalf, beschreibt diese auch gewisse physikalische Aspekte turbulenter Luftströmungen aus der Meteorologie!

Das Verhulstgesetz besagt nichts anderes, als dass die Wachstumsrate  $r$  gegen 0 strebt, wenn sich die Bevölkerungszahl dem Wert  $K$  nähert.

[BEVCHAOS.XLW] Tabelle 2		
Verhulstgleichung		Wachstumsrate 1,2
Jahre	Population	Formel für Spalte B
0	0,1	
1	0,208	=(\$B\$5+\$D\$2*B\$5*(1-B\$5))
2	0,4056832	=(\$B\$6+\$D\$2*B\$6*(1-B\$6))
3	0,695008409	=(\$B\$7+\$D\$2*B\$7*(1-B\$7))
4	0,943374474	=(\$B\$8+\$D\$2*B\$8*(1-B\$8))
5	1,007049573	...
6	0,99853045	etc.
7	1,000291319	
8	0,999941634	
9	1,000011669	
10	0,999997666	
11	1,000000467	
12	0,999999907	

Abb. 5 Arbeitsblatt zur Verhulst-Gleichung.

diese Untersuchungen müssen wir den Bereich menschlicher Populationen verlassen, da für diese im Normalfall Wachstumsraten von z.B. 2 (200 %) ganz unrealistisch, für andere Populationen aus der Natur (Seuchenausbreitung etc.) aber durchaus wirklichkeitsgetreu sind!

Wir erstellen Rechenblätter (Abb. 5) für ca. 10–12 Jahre mit einer hypothetischen Basispopulation von 0,1 und unterschiedlichen Wachstumsraten von r: 0,4 / 1,2 / 1,9 / 2,4 / 2,5 und 3,0.

Die Diskussion der einzelnen Fälle zeigt folgendes:

- a)  $r=0,4$  und  $r=1,2$  ( Abb. 6a und b ):

Je nach Grösse der Wachstumsrate steigt die Gesamtpopulation langsamer bzw. schneller auf die max. Population von 1 (Attraktor genannt) und stabilisiert sich auf diesem Niveau.

- b)  $r = 1,9$  (Abb. 6c):

Die Population steigt schnell auf den Höchstwert und pendelt sich dann langsam auf das oberste Niveau ein.

- c)  $r = 2,4$  (Abb. 6d):

Die Population pendelt regelmässig zwischen zwei Attraktoren hin und her. Die optimale Population wird nie erreicht. Wir haben immer einmal eine zu grosse, dann wieder ein zu kleine Population.

- d)  $r = 2,5$  (Abb. 6e):

Jetzt oszilliert der Wert zwischen vier Attraktoren. Man spricht in diesem Zusammenhang von Periodenverdoppelung. Ab 2.55 erfolgt wieder eine Periodenverdoppelung auf acht Werte etc.

- e)  $r = 3,0$  (Abb. 6f):

Bis ca. 2.57 hat sich der Prozess der Verdoppelung laufend wiederholt. Ab diesem Punkt kippt das System ins Chaos. Es lässt sich keine Regelmässigkeit mehr erkennen.

Es zeigt sich, dass schon bei kleinen Abweichungen der Wachstumsrate Prognosen über die Populationsentwicklung äusserst schwierig, wenn nicht sogar unmöglich sind. Ein weiteres Problem in diesem Zusammenhang ergibt sich bei der Verwendung von Rechenautomaten für Prognosen.

Wir berechnen zuerst die Wachstumsrate zur Zeit t:  $\frac{K_{t+1}-K_t}{K_t}$ . Verhulst nahm an, dass diese Wachstumsrate zur Zeit t proportional zu  $1-K_t$  ist, dem verbleibenden Anteil der maximal ertragbaren Bevölkerungsgrösse:  $\frac{K_{t+1}-K_t}{K_t} = r(1-K_t)$ . Der Proportionalitäts-

faktor r kann, z.B. als Fruchtbarkeitsrate, als eigentliche Wachstumsrate interpretiert werden. Diese Gleichung kann nach  $K_{t+1}$  aufgelöst werden :  $K_{t+1} = K_t + r \cdot K_t (1-K_t)$  bzw.  $K_{t+1} = (1+r)K_t - r \cdot K_t^2$ . Diese quadratische Verhulst-Gleichung soll die Basis für unsere weiteren Computeruntersuchungen sein. Für

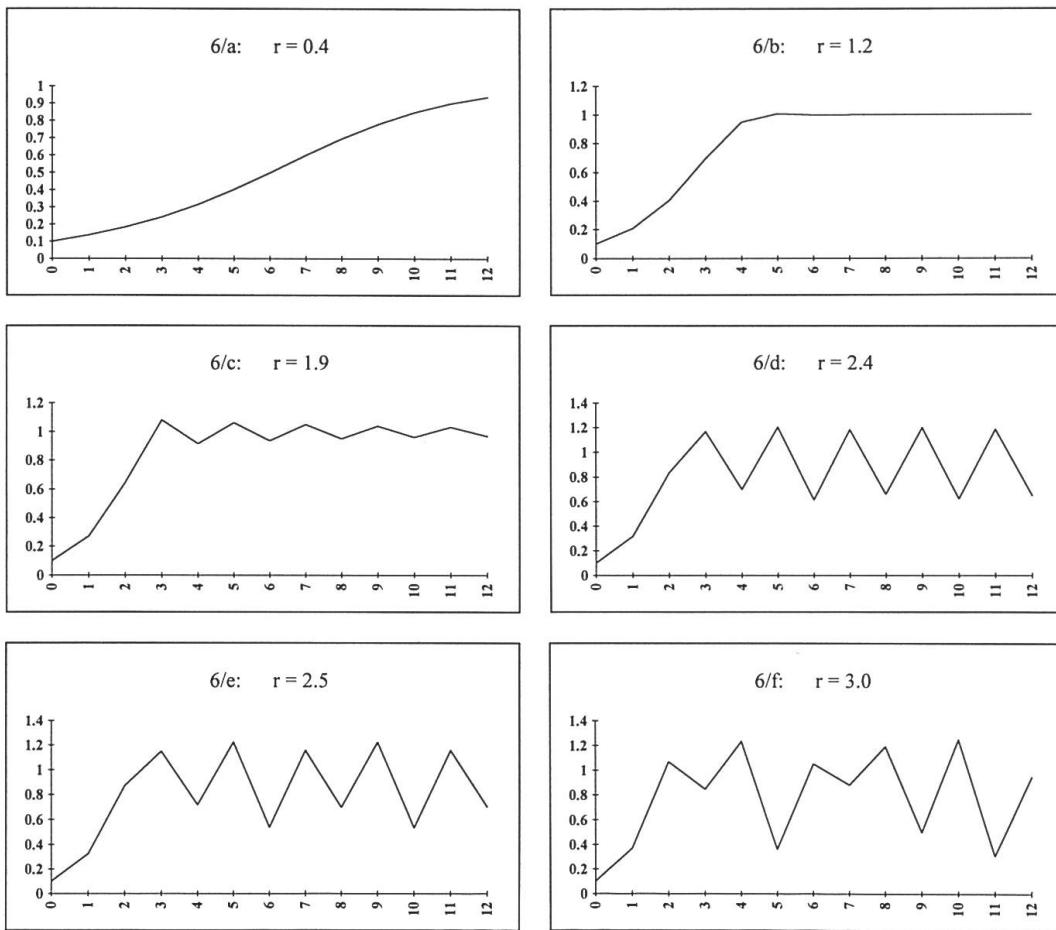


Abb. 6 a - f Verhulst-Prozess mit unterschiedlichen Wachstumsraten  $r$ .

## Chaotisches Verhalten

Ob Taschenrechner oder Computer, jeder Rechner arbeitet mit einer bestimmten Genauigkeit, d.h. mit einer unterschiedlichen Zahl von Nachkommastellen und allenfalls entsprechender Rundung. Diesen Einfluss auf unsere Untersuchungen wollen wir in einem neuen Rechenblatt darstellen:

Wir starten mit einer Ausgangspopulation von  $K_0=0.01$  und einer Wachstumsrate von  $r=3.0$ . Anschliessend berechnen wir z.B.  $n=10$  Jahre:  $K_{10}=0.722914301\dots$  In einer Spalte lassen wir anschliessend die Berechnung bis  $n=100$  weiterlaufen. In einer zweiten Spalte runden wir diesen Wert auf 5 Nachkommastellen, d.h.  $K_{10}=0.72291$  und lassen ebenfalls die Berechnung bis  $n=100$  laufen. In einer dritten Spalte berechnen wir die Differenz der beiden errechneten Werte und stellen diese grafisch dar (Abb. 7). Der kleine Unterschied in der Genauigkeit beim 10. Wert – dieser ist in Wirklichkeit bei jeder Messung und bei jeder Rechnung anzutreffen – bewirkt, dass die Unterschiede im Resultat derart anwachsen, dass die Voraussagekraft des Rechners rapide nachlässt. Man stelle sich einmal die Daten und Rechnungen bei den Wetterprognosen vor. Bei unserem Beispiel sind die Abweichungen schon nach 20 bis 30 Iterationen grösser als das Signal selbst. – Mit Hilfe des Computers wurde Chaos entdeckt und bekannt, und gerade jetzt lässt uns der Computer bei der Vorhersagbarkeit von Prozessen im Stich.

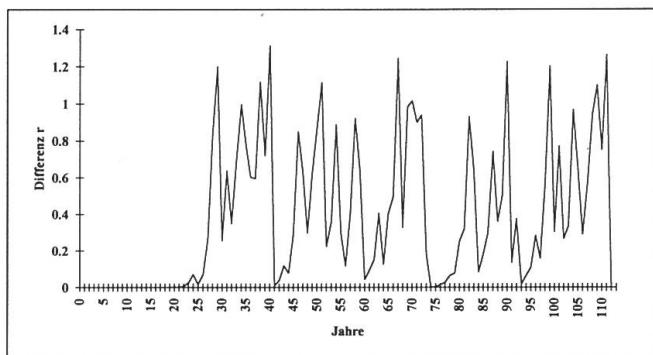


Abb. 7 Abweichungen beim Verhulst-Prozess bei unterschiedlicher Genauigkeit der Wachstumsrate  $r$  (Rundung bei  $n = 10$ ).

## Feigenbaumdiagramm

Bisher haben wir festgestellt, dass für verschiedene Wachstumsraten die Verhulstgleichung unterschiedliche, teils chaotische Ergebnisse liefert. In der Folge wollen wir jetzt den Verhulstprozess allgemein untersuchen und grafisch darstellen. Dazu werden Werte von  $r$  zwischen 0 und 3 in einem Diagramm entlang der x-Achse abgetragen. Für jeden Wert von  $r$  sind nacheinander zuerst 5000 Werte iteriert worden. Die nachfolgenden 120 Werte (5001 bis 5120) von  $K$  werden vertikal abgetragen. Dabei erhält man das bekannte Feigenbaum-Diagramm (Abb. 8), benannt nach dem amerikanischen Physiker *Mitchell J. Feigenbaum*.

An der Stelle  $r_1=2$  geht der Attraktor von einem einzigen Punkt in einen Zweierzyklus über. Jeder Parameter  $r < 2$  erzwingt eine Konvergenz zu genau einem Attraktor (vergleiche Abb. 6c und 6d). Damit beginnt eine ganze Folge von sogenannten periodenverdoppelnden Bifurkationen (Peitgen 1992).

Bei  $r_2=2,449..$  wechselt der Zweierzyklus in einen Viererzyklus usw. (Abb. 6e). Bei 2,57 geht der Prozess ins Chaos über (Abb. 6f). Vergrößern wir einen Ausschnitt aus dem chaotischen Bereich, erkennt man wiederum eine Ordnung, die der Gesamtordnung ähnlich ist – man spricht von Selbstähnlichkeit des Prozesses.

Untersuchen wir jetzt die Differenzen  $d$  der Bifurkationspunkte und berechnen den Quotienten  $d_k/d_{k+1}$  aufeinanderfolgender Differenzen (Tab. 1), so nähert sich dieser Quotient einem festem Wert.

M. Feigenbaum entdeckte, dass sich dieser Quotient mit wachsendem  $n$  dem Wert  $d = 4,669202..$  (Feigenbaum-Konstante) nähert. Diese Konstante  $d$  ist universal wie die Zahl  $\pi$ . Man findet diese Konstante bei Turbulenzen (Strömungen), in elektronischen Schaltungen und bei verschiedenen physikalischen Experimenten sowie bei gewissen Differentialgleichungen (Peitgen 1992<sup>3</sup>). Dieser Konstanten  $d$  gehorchen offenbar die sprunghaften Übergänge in der gesamten Natur, seien es Periodenverdoppelungen oder Übergänge von der

$r_n$	$d_n=r_{n+1}-r_n$	$d_n/d_{n+1}$
2.0		
2.449489..	$4.494910^{-1}$	
2.544090..	$9.461110^{-2}$	4.7514
2.564407..	$2.031610^{-2}$	4.6562
2.568759..	$4.352110^{-3}$	4.6682
2.569692..	$9.321910^{-4}$	4.6687
2.569891..	$1.996410^{-4}$	4.6690

Tab. 1 Feigenbaumkonstante (Peitgen 1992<sup>2</sup>)

170

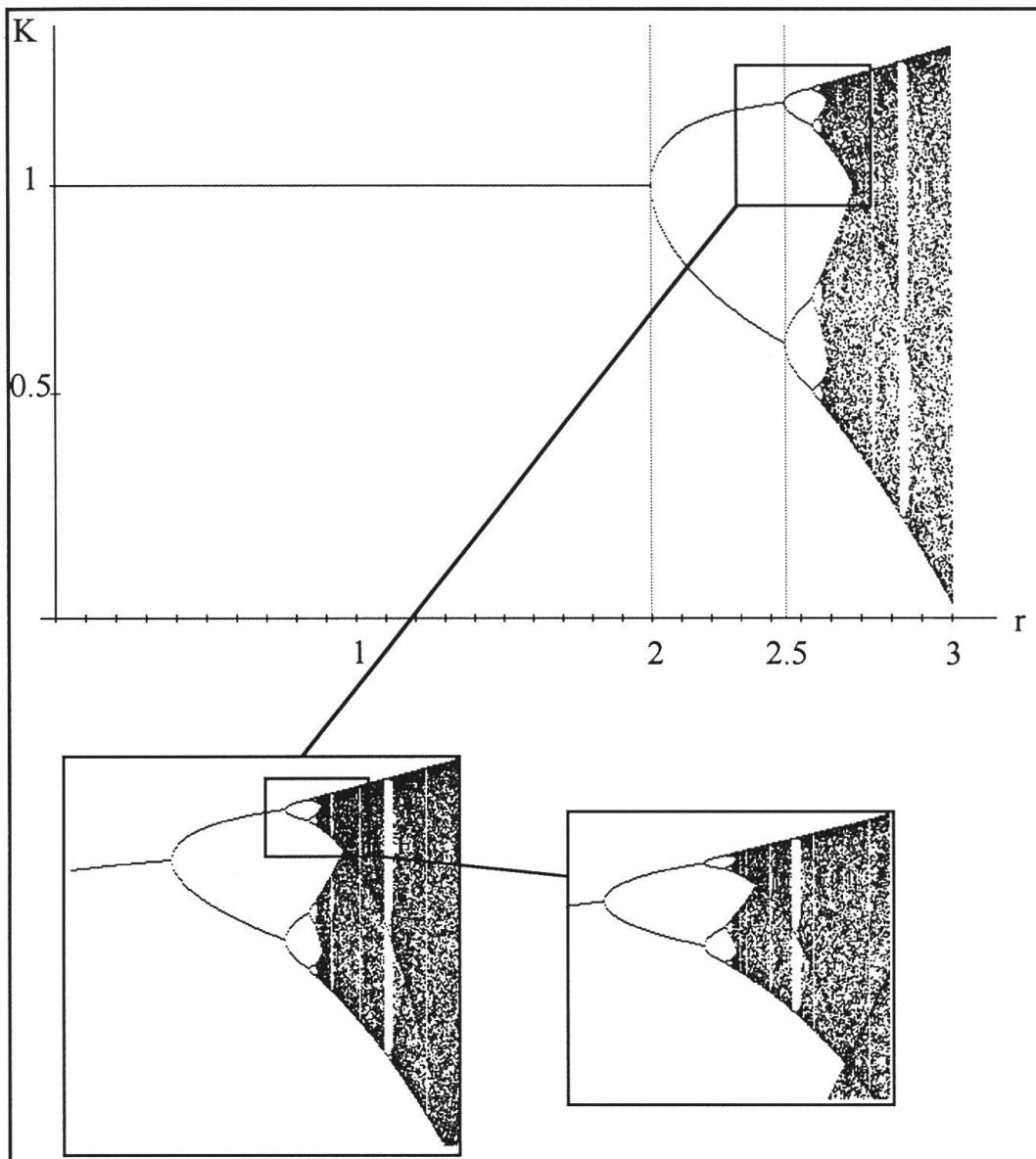


Abb. 8 Feigenbaum-Diagramm.

Beim Verhulst-Prozess sind Werte von  $r$  zwischen 0 und 3,0 entlang der x-Achse abgetragen. Für jeden Wert von  $r$  sind nacheinander zuerst 5000 Werte iteriert worden. Die nachfolgenden 120 Werte (5001 bis 5120) von  $K$  werden vertikal abgetragen. Für  $r$  zwischen 2 und 2,5 erhält man zwei, für  $r$  zwischen 2,5 und 2,55 vier Attraktoren etc. Die Verdoppelungen treten immer häufiger auf, bis bei  $r=2,57$  das System ins Chaos übergeht. Innerhalb des Chaos erkennt man wieder Ordnung. Die Ausschnitte und deren Vergrößerung zeigen, dass der Prozess selbstähnlich ist.

Periodizität ins Chaos. "Daraus muss man schliessen, dass Chaos eine regelhafte, in der Natur und ihrer Systematik vorgesehene Zustandsform ist, dass also die Welt in ihrer Grundstruktur nichtlinear ist, dass sie aber aus dem deterministischen Chaos immer wieder Inseln der Ordnung hervorbringt, auf denen unsere einfachen linearen Gesetze angewendet werden können. Die Linearisierung, die wir im kartesisch-newtonschen System notwendigerweise durchführen müssen, um überhaupt physikalische Gesetze hinschreiben zu können, ist daher insulär." (Cramer 1993)

Der Mathematiker *Benoit Mandelbrot* hat eine Reihe rückgekoppelter Systeme auf der Basis komplexer Zahlen untersucht und mit dem Computer grafisch dargestellt, die sog. Mandelbrotmenge – besser bekannt als Apfelmännchen. Diese Bilder sind Ausdruck von höchster Harmonie und Ästhetik. Die Welt ist im Chaos äusserst harmonisch. Es scheint also, dass Chaos in der Natur eher die Regel ist, während Ordnung eher die Ausnahme darstellt. Es hat sich aber herausgestellt, dass Chaos gewissen regelmässigen Mustern folgt – also Ordnung im Chaos! Durch Chaos-Untersuchungen in klimatischen, meteorologischen, medizinischen und vielen anderen Bereichen sind in den letzten Jahren beachtliche Fortschritte gemacht und tiefere Erkenntnisse erzielt worden. Chaoforschung führt uns zu einem vertieften Verständis unserer Natur und unseres Lebensraumes.

## Turbo-Pascal-Programm und Feigenbaum-Diagramm

Im Anschluss sei noch ein Turbo-Pascal-Programm (Version 6.0) zur Erzeugung eines Feigenbaum-Diagramms auf einem Computer aufgelistet. Das Programm ist für eine Grafikkarte mit 640 x 480 Bildpunkten eingerichtet; es lässt sich jedoch leicht an andere Hardware-Komponenten anpassen.

<pre> PROGRAM Feigenbaum; {\$n+} {Coprozessor 'einschalten'} USES CRT, GRAPH;  VAR XWert, Zaehler, Xachse, Yachse, Graph     driver, Graphmode: INTEGER;     YWert, r, K:REAL;  PROCEDURE Achsen;{ Achsen zeichnen} BEGIN     LINE(10,0,10,400);     LINE(0,400,640,400);     XAchse:=10;     WHILE XAchse&lt;621 DO BEGIN         LINE(Xachse, 398,Xachse, 402);         Xachse:=Xachse+20;     END;     Yachse:=110;     WHILE Yachse&lt;300 DO BEGIN         LINE(7,Yachse, 13, Yachse);         Yachse:=Yachse+140;     END END; </pre>	<pre> {Hauptprogramm} BEGIN Graphdriver:=DETECT; INITGRAPH (Graphdriver, Graphmode, 'c:'); Achsen; FOR XWert:=0 TO 600 DO BEGIN r:=3*Xwert/600; K:=0.1; FOR Zaehler:=1 TO 5120 DO BEGIN K:=r*K*(1-K); YWert:=2*(195-140*K); IF Zaehler&gt;5000 THEN PUTPIXEL (XWert+10, ROUND(YWert),1); END; END; REPEAT UNTIL KEYPRESSED; CLOSEGRAPH END. </pre>
---	--

## Literatur

- Behr R. 1989. *Ein Weg zur fraktalen Geometrie*. Stuttgart.
- Birg H. 1989. *Die demographische Zeitwende*. Spektrum der Wissenschaft, Januar 1989, Heidelberg.
- Bossel H. 1993. *Die neuen Grenzen des Wachstums. Das Simulations-Programm World 3*. bild der wissenschaft, DVA, Stuttgart.
- Chaos + Kreativität 1991. *GEO Wissen*, Hamburg.
- Cramer F. 1993. *Chaos und Ordnung, Die komplexe Struktur des Lebendigen*. insel-TB 1496, Frankfurt a.M. und Leipzig.
- Devlin K. 1992. *Sternstunden der modernen Mathematik*. dtv-TB 4591, München.
- Gleick J. 1990. *Chaos – die Ordnung des Universums*. Knaur-TB 4078, München.
- Meadows D. und D. 1992. *Die neuen Grenzen des Wachstums*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart.
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. 1992<sup>1</sup>. *Fractals for the Classroom, Part One, Introduction to Fractals and Chaos*. Springer, Berlin.
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. 1992<sup>2</sup>. *Fractals for the Classroom, Part Two, Complex Systems and Mandelbrot Set*. Springer, Berlin.
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. 1992<sup>3</sup>. *Bausteine des Chaos, Fraktale*. Klett-Cotta/Springer, Stuttgart.
- Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D., Maletsky E., Percinate T. und Yunker L. 1992<sup>4</sup>. *Fraktale, Selbstähnlichkeit, Chaosspiel, Dimension – Ein Arbeitsbuch*. Klett, Stuttgart.
- Peitgen H. O. , Jürgens H., Saupe D., Maletsky E., Percinate T. und Yunker L. 1992<sup>5</sup>. *Chaos, Iteration, Sensivität, Mandelbrotmengen – Ein Arbeitsbuch*. Klett, Stuttgart.

