Zeitschrift: Publikationen der Schweizerischen Musikforschenden Gesellschaft. Serie 2 = Publications de la Société Suisse de Musicologie. Série 2

Herausgeber: Schweizerische Musikforschende Gesellschaft

Band: 36 (1996)

Artikel: Iannis Xenakis und die stochastische Musik : Komposition im Spannungsfeld von Architektur und Mathematik

Autor: Baltensperger, André

Kapitel: III: Musique Stochastique - ST

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-858816

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

III.
MUSIQUE STOCHASTIQUE – ST

Es mag zunächst seltsam anmuten, von *ST* als von *einer* Komposition zu sprechen, handelt es sich doch eher um ein ganzes Paket von gleichen Gesetzmässigkeiten obliegenden und allen denkbaren Formationen und zeitlichen Gegebenheiten anzupassenden Einzelrealisationen – sprich Kompositionen. Nun ist jedoch das Phänomen einer einmaligen, meist in seiner erstmaligen Formulierung erschöpften Kompositionsidee, welche sich in einer oder – als «offene Form» – in mehreren verschiedenen Niederschriften und Realisationen niederschlägt, für die Musik der Gegenwart durchaus nichts Ungewöhnliches. Diese Wandlung des Kompositionsbegriffs erlaubt es, von *ST* als von einer Komposition zu sprechen, selbst wenn ein näheres Eingehen auf die Zielsetzung dieser Komposition den Begriff abermals relativiert, wird doch ganz allgemein der Anspruch erhoben, das Komponieren schlechthin zu formalisieren.

ST steht für «musique stochastique» und wird als Einzelwerk durch einen Nummerncode genauer bezeichnet:

ST/10 – 1,080262

Anzahl Instrumente
Nr. der Fassung
Datum des Rechenlaufs

Folgende Werke sind veröffentlicht worden:

ST/48	– 1,240162	
ST/10	– 1,080262	
ST/4	– 1,080262	(«Streichquartettfassung von ST 10)
ST/4	– 1,030762	*«Morsima – Amorsima»* (Pfte + Str)
(ST/10	– 1,030762)	*«Amorsima – Morsima»* (Kammer-Orch.)
ST/10	– 3,060962	*«Atrées»*
ST/CosGauss		*«Polytope de Cluny».*

Zudem sind Teile aus *Eonta* (1964) und *Stratégie* (1962) mit Hilfe des ST-Programms berechnet worden.[1]

1 Wie ist ein derartiger Werktitel grundsätzlich aufzufassen? Zu Beginn des Computer- und Raumfahrtzeitalters gewiss als demonstrativ auf die mathematische Rationalität der Komposition pochend. Unverkennbar manifestiert sich hier eine Neigung zu einer Art «Code-Fetischismus», welcher zwar für das «Endprodukt» musikalische Komposition letztlich ohne Belang ist, der jedoch willkommenermassen Assoziationen mit Technizität erwecken mag. – Vgl. dazu, bezüglich *Varèse* und *Xenakis*, /384/ CHARBONNIER (1969: 39): «On peut remarquer que les titres donnés (...) témoignent de la direction d'une pensée. *Hyperprisme*, *Intégrales*, *Ionisation*, *Densité 21.5*, empruntant à la terminologie scientifique. Après Varèse, ces emprunts au vocabulaire des sciences et des techniques se font de plus en plus nombreux. Xenakis choisit, ou plutôt accepte, pour titres: *ST/10-1,080262, ST/48-1,240162.*» – Vgl. auch die grundsätzlichen Überlegungen zur Satzstruktur von «Titeln moderner absoluter Musik» bei /660/ WEISS (1970: 607 ff.). Nachträglich hat Xenakis einige der *ST*-Kom-

ST wurde von Xenakis selbst beschrieben, erstmals in «Musique stochastique libre, à l'ordinateur», dem vierten Kapitel von *Musiques formelles* (1963). Die folgenden Ausführungen stützen sich auf die leicht revidierte Fassung der amerikanischen Ausgabe, in *Formalized Music* (1971), die als Folge von Xenakis' Dozententätigkeit an der Indiana-Universität (seit 1967) entstanden ist. Eine deutschsprachige Fassung erschien 1965 in den *Gravesaner Blättern*.[2]

---

positionen mit Namen versehen, welche – durchaus in der Tradition moderner Namensgebung – einen mentalen Bezug zu Struktur und Idee des Werks herstellen sollen:
Atrées, laut *Xenakis* (s. Bois [1968: 42]): «die inflexiblen Gesetze der Notwendigkeit»; wohl von ατρεης = ατρεστος: unverzagt, furchtlos. Dass die Atriden, und gar König Atreus – ein Symbol von Unbeugsamkeit und Willenskraft –, hier mitspielen, ist offensichtlich.
Morsima-Amorsima: laut *Xenakis* (Bois [1968: 34]): «Moros = das Schicksal, der Tod; Morsima = was vom Schicksal bestimmt wird; Amorsima = was vom Schicksal nicht bestimmt wird.» – Gerade angesichts solcher Stichworte sollte nicht nur das abstrakte Spiel von Zufall und Notwendigkeit in der kompositorischen Technik vermerkt werden, sondern der biographische Hintergrund Xenakis' in Erinnerung gerufen werden, welcher dem blossen Spiel mit dem Schicksalsträchtigen eine existentielle Dimension verleiht – als Metapher, freilich, deren jeweilige Bewandtnis vom Aussenstehenden nicht vollständig nachvollzogen werden können.
Zu den übrigen erwähnten Werken: *Stratégie* (1962), Spiel für zwei Orchester und einem Dirigenten, Part. bei Boosey & Hawkes; *Eonta* (1964), für Klavier und fünf Blechbläser, Boosey & Hawkes; *Polytope de Cluny* (1972), Spectacle lumineux et sonore avec bande magnétique sept pistes, Ed. Salabert.

2 Zu den *Quellentexten*: XEN: *MuF* (1963: 163-179); *FoM* (1971: 131-154); eine deutschsprachige Fassung bietet XEN 24 – *ST* (1965: 54-93) in den *Grav. Bl.* Nr. 26.
Es folgt ein kurzer *Literaturbericht*: H. Barraud, welcher Xenakis bei der Programmierung von *ST* behilflich gewesen war, meldete sich – zusammen mit M. Philippot – schon 1963 mit kurzen Studien zum Coputereinsatz in der musikalischen Komposition bei Xenakis: /058/ Barraud: «Musique et ordinateurs» (1963), /186/ Philippot: «La certitude et la foi» (1963). F. Génuys, ebenfalls im *ST*-Projekt involviert, hielt in /115/– «L'informatique musicale» (1972) einige Gedanken zum «Sprachcharakter» eines Computerprogrammes fest, welche bei Xenakis' *ST* ansetzen und Bezüge zu dessen *CEMAMu* sowie zu Max. V. Mathews' Syntheseprogramm *MUSIC V* herzustellen versucht. Mit Xenakis' *ST*-Programm beschäftigten sich insbesondere: Nicole Lachatre (/147/– *Les musiques artificielles* [1969: 36 ff.]), in einer Darstellung der Programm-Struktur, in besonderer Weise jedoch B. Rogers (/205/ – *A User's Manual for the Stochastic Music Programm* [1972]), welcher das Programm im Hinblick auf eine allgemeine Anwendung einer Analyse unterzogen hat. J. Myhill (/176/ – «Some Siplifications and Improvements in the Stochastic Music Language» [1978]) schlug, in gleicher Zwecksetzung, eine Anzahl Verbesserungen am Programm vor; D. Lorrain (/153/ – «A Panoply of Stochastic ‹Cannons›» [1980: 68-75]) untersucht die Eigenschaften einiger auch von Xenakis verwendeten Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
Allgemeine Darstellungen der *Stochastischen Musik*: Anhand Pithoprakta (1956): /140/ Kay: «Xenakis's Pithoprakta reviewed» (1967: 21-25); /211/ Sandin: «Reflexioner kring ovenstande: De tekniska förntsättningarna för Pithoprakta» (1966: 12-14); als theoretischer Physiker einigen (physikalischen) Aspekten der von Xenakis beigezogenen Verteilungsgesetze kritisch nachgehend. Anhand Achorripsis (1958): /233/ Victor: «L'informatique musicale» (1975: 46-50) sowie die konzise Einführung in Xenakis' Methode von /196/ Reith: «Formalisierte Musik» (1981: 58 ff.).

UMSTÄNDE

Das Begehren eines Komponisten, für seine Kompositionsstudien ein Computer-System benützen zu dürfen, mag um 1961 den Vorsteher eines Rechenzentrums in einiges Erstaunen versetzt haben. Wohl hatte es seit kurzer Zeit, vornehmlich in den USA, nicht an Versuchen gefehlt, den Computer mit Hilfe einiger Regeln «komponieren» zu lassen.[3] Auch war die Öffentlichkeit zumindest davon in Kenntnis gesetzt worden, dass der Einzug der Elektronik in die Musik schon zu seltsamen Schöpfungen einer «elektronischen» Musik geführt hatte. Aber bislang war Musik schlechthin eher als das völlige Gegenteil dessen im allgemeinen Bewusstsein verankert, als wozu man die Welt der «elektronischen Gehirne» – um einen zeitgenössischen Ausdruck zu verwenden – rechnete.

Diese Ausgangslage muss man sich vor Augen halten, will man die Bestrebungen Xenakis' und derjenigen, die ihm mit Rat beistanden, würdigen. Der Gebrauch eines Rechners, um die mühseligen Rechenarbeiten im Verlauf der

---

Das Kapitel zu *ST* in /052/ Amagai (1975: 117-149, 268-278) krankt an den konzeptuellen Querständen, welche wir schon anlässlich der Analyse von *Metastaseis* feststellten. /227/ Rosalie Sward: *An Examination of the Mathematical Systems used in Selected Compositions of Milton Babbitt and Iannis Xenakis* (1981), widmet der Stochastischen Musik von Xenakis ihre Dissertation, mit vielen statistischen Untersuchungen am Werk sowie weitläufigen Einführungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, ohne indes in der Abhandlung wie in der Werkanalyse tief zu dringen. Zu *ST* s. bes. (1981: 143 ff., 162-222, 328-338, 465 ff.).

Mit den ästhetischen und philosophischen Implikationen der Stochastischen Musik setzten sich insbesondere zwei Autoren von Gewicht auseinander: Michel Serres, mit einem seines autochthonen philosophischen Ansatzes wegen bedeutenden Aufsatz (/219/ – «Musique et bruit de fonds» (1969: 140-151); Olivier Revault d'Allonnes im Kapitel «L'artiste et l'avenir – Iannis Xenakis et la modernité» in: /653/ – *La création artistique et les promesses de la liberté* (1973: 217 ff.).

Ferner: /075/ Charles: «Xenakis aujourd'hui» (1965), /077/ – «La pensée de Xenakis» (1968), /066/ Butchers: «The Random Arts: Xenakis, Mathematics and Music» (1968), /250/ Zeller: «Zum Beispiel Iannis Xenakis» (1969), /177/ Napolitano/Tonietti: «Xenakis, tra medioevo e illuminismo» (1977: 59 f.).

3 Musikalische Komposition mittels elektronischer Rechner beginnt – nach einigen Versuchen seit Beginn der fünfziger Jahre – mit der *ILLIAC-Suite* (1956) von Lejaren Hiller und L. Isaacsons. Seit 1958 leitete Hiller das *Experimental Music Studio* der Universität von Illinois (Urbana). 1959 gründeten *M.V. Mathews, J.P. Pierce* und *N. Guttman* eine sprach- und musikanalytische Forschungsabteilung bei der Bell Telephone Company (s. /677/ Hiller [1964]).

S. auch /127/ Hiller: «Music Composed with Computers – A Historical Survey» (1970: 42-96), darin insb. über *Xenakis*: (1970: 76-79); ferner /365/ Appleton: *The Development and Practice of Electronic Music* (1975), /408/ Ernst: *The Evolution of Electronic Music* (1977), /473/ Prieberg: *EM. Versuch einer Bilanz* (1980), wohl der gründlichste Versuch Vor- und Hintergründe der «Elektronischen Musik» der Öffentlichkeit zugänglich zu machen; zu Xenakis insb.: (1980: 260 ff.).

«Berechnung» der Kompositionen zu bewältigen, war von Xenakis schon verschiedentlich vorgeschlagen worden;[4] aber erst eine Reihe glücklicher Zufälle und Bekanntschaften konnten die damals unter anderem mit hohen Kosten verbundenen Hürden überwinden: «C'est grâce à mon ami M. Georges Boudouris du C.N.R.S.», so Xenakis, «que j'ai fait la connaissance de M. Jacques Barraud, Ingénieur de l'Ecole des Mines, Directeur des Ensembles Electroniques de Gestion de la Société des Pétroles Shell-Berres et qui a bien accepté de m'introduire auprés de M. François Génuys, agrégé de mathématiques et chef des Etudes Scientifiques Nouvelles de IBM-France. Tous les trois sont des scientifiques et pourtant ils ont consenti à tenter une expérience à première vue farfelue, celle d'un marriage de la musique avec la machine la plus puissante au monde.»[5] Diese Maschine, eine IBM-7090 – damals die stolzeste Installation des Marktführers in Europa – bot allerdings Kapazitäten, Speicherraum und Operationsgeschwindigkeiten an, die – wenn auch nicht nach heutigen Massstäben – so 1961 in jeder Beziehung ein Optimum darstellten; darüberhinaus war sie zum Inbegriff technischer Vollkommenheit – und Macht! – geworden, von welchen sich wohl manche Anwender insgeheim den adhärenten Niederschlag in ihrer Anwendung erhoffen mochten. Die Computer – «cerveaux électroniques géants»[6]

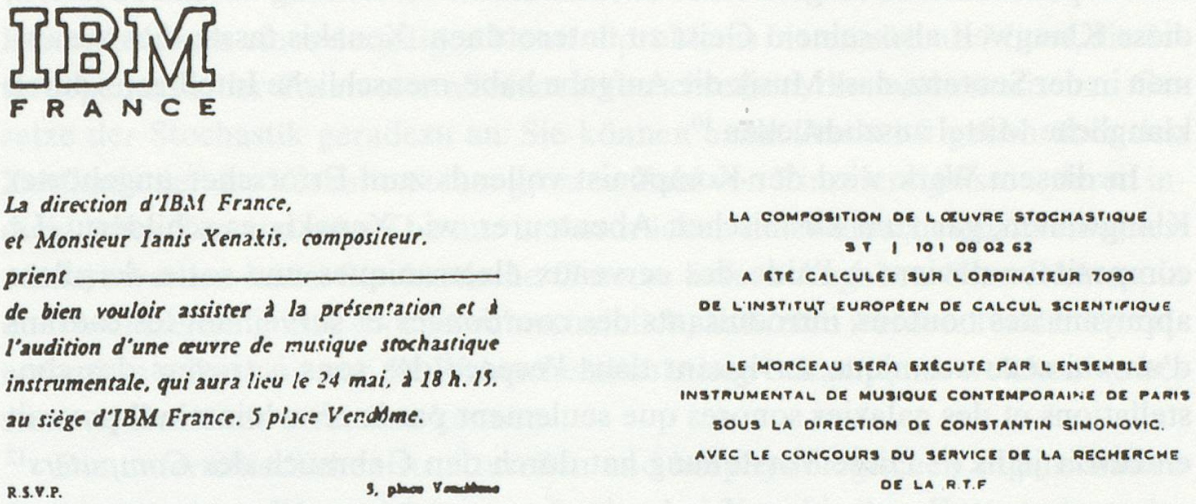
---

4 Schon im Zusammenhang mit der Berechnung der Klangparameter von *Achorripsis* (1957) hob Xenakis die Vorteile hervor, welche der Gebrauch eines Rechners für die «Unvorhersehbarkeit» der Werkstruktur erbringen könnte (XEN 13 – *Suche* [1958/*MuF*: 48]): «Ou bien alors, un système avec des ordinateurs électroniques à memoire qui permettrait la variation des paramètres d'entrée de la matrice et des nuages sous certaines conditions. Il surgirait ainsi une musique déformable dans le temps, qui pour *n* exécutions donnera au même observateur *n* résultats paraissant dus au hasard, c'est-à-dire suivant longtemps les lois de probabilités, mais *statistiquement* identiques à eux-mêmes, l'identité étant une fois pour toutes définie à l'aide du ‹vecteur-matrice›.»
Ebenso, bezüglich der praktischen Anwendung einer «musique stochastique markovienne» (XEN 17 – *Stoch* [1960/*MuF*: 97]): «Il est évident que des mécanismes stochastiques plus riches et plus complexes sont hautement intéressants à construire et à mettre en œuvre, mais étant donné le volume considérable des calculs qu'ils nécessitent, il serait vain de les entreprendre à la main et par contre très souhaitable de les programmer et de les traiter à l'ordinateur.» – Ferner: XEN 17 – *Stoch* (1961/*MuF*: 33 f.), XEN: (ib.: 212).

5 XEN: *MuF* (1963: 166). – J. Barraud berichtet über die Entwicklungsarbeit an *ST* mit Xenakis in /058/ (1963: 9-12), /059/ (1981: 37-43). F. Génuys wurde später «membre du comité exécutif» des *CEMAMu*; s. dazu /115/ Génuys (1972: 41-46). Offenbar hat auch der Einfluss Hermann Scherchens das Zustandekommen des Projekts ermöglicht; s. dazu Matossian (1981: 190/ 1986:157): «En décembre (1961), le musicien [= Xenakis] reçoit le mot qu'il attendait avec impatience; encore une fois grâce à l'intervention de Scherchen: ‹François Génuys a le plaisir d'accorder à Xenakis, pour ses études, une heure sur l'ordinateur 7090.›»

6 XEN 17 – *Stoch* (1962/*MuF*: 212); vgl. XEN 14 – *Grund* (1960: 62): «die Kompliziertheit der weiträumigen Anlagen der ‹Riesengehirne› …».

– bildeten gleichsam ein Symbol der neuen, zukunftsorientierten und Uneingeweihten geheimnisvoll erscheinenden Technologie, was in vielen Äusserungen immer wieder durchscheint, etwa wenn Xenakis deren eindrückliche Leistungsfähigkeit (so in der effizienten Verarbeitung der arithmetischen Probleme in seinen Kompositionen) im Nebensatz mit der kosmischen Raumfahrt in Verbindung bringt: «par [la machine] qui contrôle en ce moment la fusée vénusienne des U.S.A., …»[7]. Es ist wohl nicht von ungefähr, dass die zwei Hauptelemente – die technologische Faszination und das Prestige des Marktführers – in die Gestaltung der Einladungskarte zur Uraufführung von Xenakis' *ST 10* eingingen, welche Xenakis in seinem Buch abbilden liess:[8]


IBM
FRANCE

La direction d'IBM France,
et Monsieur Iannis Xenakis, compositeur,
prient
de bien vouloir assister à la présentation et à l'audition d'une œuvre de musique stochastique instrumentale, qui aura lieu le 24 mai, à 18 h. 15, au siège d'IBM France, 5 place Vendôme.

R.S.V.P. 5, place Vendôme

LA COMPOSITION DE L'ŒUVRE STOCHASTIQUE
ST | 101 08 02 62
A ÉTÉ CALCULÉE SUR L'ORDINATEUR 7090
DE L'INSTITUT EUROPÉEN DE CALCUL SCIENTIFIQUE

LE MORCEAU SERA EXÉCUTÉ PAR L'ENSEMBLE
INSTRUMENTAL DE MUSIQUE CONTEMPORAINE DE PARIS
SOUS LA DIRECTION DE CONSTANTIN SIMONOVIC.
AVEC LE CONCOURS DU SERVICE DE LA RECHERCHE
DE LA R.T.F

Allerdings lässt sich generell feststellen, dass hinter dem Spektakulären nüchterne Überlegungen der Zweckmässigkeit vorherrschten, dass der Einsatz eines Rechners für Xenakis in der Tat mehr war als ein blosses Spiel. Diese Zweckmässigkeit darzustellen und zu begründen, soll in diesem Kapitel versucht werden. In diesem Sinne soll den Instrumenten Xenakis' in der Creatio seines musikalischen Kosmos Rechnung getragen und sollen *Ziele* und *Mittel* des kompositorischen Ansatzes sowie die *Constraints* der praktischen Handhabung im Rahmen des *ST*-Programms untersucht werden.

7 XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 179).

8 XEN (ib.: 166, 167).

1. Theoretische Grundlagen

1.1 ZIELSETZUNG DER KOMPOSITION

Xenakis' Schaffen – um es hier nochmals aufzugreifen – ist geprägt durch die Wechselbeziehung von klanglicher Vorstellung und rigoroser Kontrolle derselben im Kompositionsprozess. Gelten Wolken von Ton-Massen verschiedener Dichten, Klangfarben und Strukturen einander kontrastierend ablösend als Ideal der klanglichen Welt, so fand er in der mathematischen Theorie der Stochastik[9] das *Instrument*, um diese Massenereignisse durch ein Netz von logischen Interdependenzen zu Trägern einer intellektuellen Vorstellung werden zu lassen, diese Klangwelt also seinem Geist zu unterordnen. Xenakis fasste dies zusammen in der Sentenz, dass Musik die Aufgabe habe, menschliche Intelligenz durch klangliche Mittel auszudrücken.[10]

In diesem Werk wird der Komponist vollends zum Erforscher ungehörter Klangwelten, gar zum kosmischen Abenteurer, wie Xenakis es schildert: «Le compositeur devient à l'aide des cerveaux électroniques une sorte de pilote appuyant des boutons, introduisants des coordonées et surveillant les cadrans d'un vaisseau cosmique naviguant dans l'espace des sons à travers des constellations et des galaxies sonores que seulement par le réve lointain il pouvait entrevoir jadis.»[11] Diese Vorstellung hat durch den Gebrauch des *Computers*[12]

9 «*Stochastik*» – ursprünglich «Kunst des Mutmassens» (*J. J. Bernoulli* 1713) – ist der Zweig der Statistik, der sich mit Wahrscheinlichkeitsereignissen und ihren Prozessen beschäftigt. Etym. v. «στοχαζεσδαι», «vermuten», «mutmassen»; bei *Xenakis* eine merkwürdige Begriffserläuterung in (XEN 17 – *Stoch* [1961/*MuF*:16]): «L'explication du monde et par conséquent des phénomènes sonores (...) nécessitait l'élargissement du principe causal dont la base est formée par la loi des grands nombres. Cette loi implique une évolution asymptotique vers un état stable, vers une sorte de but, de στοχος, d'où vient l'adjectif *stochastique*.» – Zum Begriff und seiner Geschichte ausführlich: *MATH EXK* 4.

10 XEN 17 – *Stoch* (1961/*MuF*: 211); s.o.

11 XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 179).

12 Als *Computer* oder *elektronischen Rechner* bezeichnet man eine Maschine, die selbständig in der Lage ist, Daten nach einem Programm zu verarbeiten. Die Arbeit am Computer, vor allen Dingen das Verständnis seiner Arbeitsweise, setzten – bis weit in die siebziger Jahre hinein – relativ hohe Fachkenntnisse voraus, was mit dafür verantwortlich ist, dass der «Computer» schlechthin zu einem beinahe magischen Begriff geworden ist; hier sind bald einmal Grenzen interdisziplinären Schaffens offenbar geworden. Zumal für die Zeit der sechziger Jahre ist diese magische Komponente – gleichsam ästhetisierte Technizität des Mirakulösen – erheblich. Wir verwenden fortan den Begriff «Rechner», um die mit «Computer» verbundenen Assoziationen möglichst fernzuhalten. – Eine Einführung in die Grundlagen und Methoden der Elektronischen Datenverarbeitung bieten: /800/ KOHLAS/ WALDBURGER: *Informatik für EDV-Benützer* (1978).

das adäquate Hilfsmittel gefunden, diese Klangwelt präziser und vielfältiger zu gestalten, als es mit der Erstellung der Kompositionspläne «von Hand» möglich gewesen wäre. Zudem erfordert die Verwendung eines Rechners einen hohen Formalisierungsgrad der logischen Operationen, was den Komponisten zwang, den mathematischen Apparat lückenlos zu formulieren und sequentiell zu programmieren.[13] Die Kontrolle der musikalischen Ereignisse erfolgt somit durch logische Verknüpfung aller Werkparameter in einem System von Interdependenzen, welches auf eine eigens definierte axiomatische Basis zurückgeführt werden kann.

1.2 DAS MITTEL: STOCHASTISCHE STRUKTUREN

Beim Vorliegen eines derartigen Kontrollproblems bieten sich als Mittel, die Interdependenz der Parameter effizient zu beschreiben, die mathematischen Gesetze der Stochastik geradezu an: Sie können exakt Auskunft geben über den Zustand oder das Verhalten einer grossen Zahl von Einzelereignissen, deren individueller Zustand oder Ort nur in Ausdrücken der Wahrscheinlichkeit determiniert werden kann. Stochastische Gesetze liefern Angaben über *Dichten*, in denen Einzelereignisse (höchstwahrscheinlich) auftreten werden; für die Einzelereignisse selbst sind nur die Wahrscheinlichkeiten bekannt, mit welchen sie bestimmte Zustände erreichen können.

Die unterschiedlichen strukturellen und hörphysiologischen Eigenschaften der angestrebten Klangphänomene fanden bei Xenakis ihre Entsprechung im Beizug von gleichfalls an unterschiedlichen Problemen physikalischer oder mathematischer Art entwickelten stochastischen *Verteilungsgesetze*, welche in Voraussetzung und Anwendung voneinander sehr verschieden sind. Die Ausarbeitung eines Systems, welches die zugeordneten Gesetze parametrisch verknüpft, hierarchisch ordnet und auf diese Weise die mannigfaltigen Ebenen des kompositorischen Prozesses in sich aufnimmt, wurde zur Aufgabe, die Xenakis zu lösen sich auftrug.

---

13 Der durch EDV-Methoden gegebene Zwang zur Formalisierung jeglicher Schritte einer Problemlösung im Rahmen eines effektiven Regelsystems, eines *Algorithmus*, hat in der Naturwissenschaft und in den Sozialwissenschaften zu neuen Denkansätzen geführt: Der in diesen Disziplinen oft vorgenommene Versuch, Teilvorgänge der Wirklichkeit nachzuvollziehen, mit Hilfe sogenannter *Simulationsmodelle*, hat häufig in erster Linie durch die Formalisierung selbst, und weniger durch die berechneten Resultate, zu neuen Erkenntnissen geführt. Dies erklärt sich daraus, dass das Simulationsmodell in einem *heuristischen Prozess* allmählich der Wirklichkeit angepasst werden kann und dadurch das Denken «dem Modell entlang» auf neue Bahnen gelenkt wird.
Der Gebrauch des Rechners musste auch für *Xenakis* zwangsläufig zur Anwendung heuristischer Methoden führen, welche geeignet waren, neue Wege des Komponierens zu eröffnen.

Im folgenden wird versucht, die mathematische Formulierung, mit welcher Xenakis seine Schlüsselbegriffe Dauer, Wolke und Geschwindigkeit operabel fasst, zu erläutern. Aus dieser Grundlegung werden Annahmen über die Phasen des Kompositionsvorganges selbst sowie über den Komplexitätsgrad eines diesen Vorgang regelnden Systems von Anweisungen ersichtlich; Annahmen zur Frage: Welches *Minimum an Regeln* ist überhaupt notwendig zur Komposition?[14]

1.2.1 Dauern

Die *Dauern* der einzelnen Ereignisse (Ton, Klang usw.) sind Zufallsereignisse, welche der *Exponentialverteilung* gehorchen.[15]

Erläuterung: Die Zeit wird als Gerade aufgefasst (genauer: als ein Zeitstrahl vom Nullpunkt aus), auf welcher sich in zufälligen Abständen eine Vielzahl von Punkten befinden, deren Zwischenstrecken (Segmente) den Dauern entsprechen. Ist auf dem Zeitstrahl eine Strecke gegeben, innerhalb welcher eben diese *n* Punkte angesiedelt sind, so ist auch die durchschnittliche Länge der Segmente, das heisst die Durchschnittsdauer $\bar{x}$ bekannt, um die sich die zufällig bestimmten Dauern nach dem Wahrscheinlichkeitsgesetz scharen. Darauf kann man die Frage stellen: gegeben eine bestimmte Dauer *x*, wieviele Segmente mit Länge *x* gibt es? Aut diese Weise lassen sich Klassen von Dauern mit ihren Häufigkeiten aufstellen, was folgende Verteilung ergibt (s. dazu *MATH EXK* 7):

Die Wahrscheinlichkeit für die Dauer *x* ist, bei linearer *Dichte* der Punkte δ

$$P(x) = \delta \cdot e^{-\delta x} \cdot de \qquad /1/\ \text{EXK 7}$$

Der Graph der Funktion P(x) für verschiedene Dichten (s. n. S.):

$\delta_1 = 2.5$ (Töne/sec)
$\delta_2 = 4.5$ (Töne/sec)

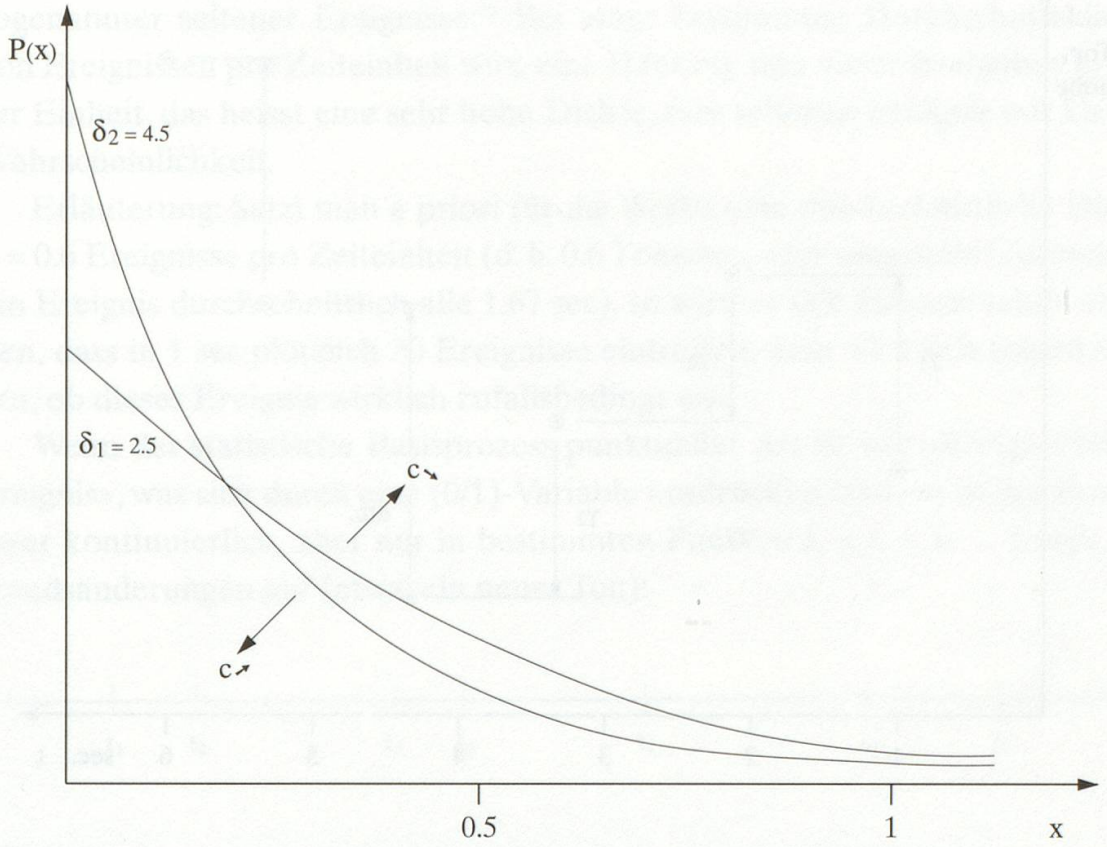
Die Extrema lassen den Zusammenhang von Dichte δ und P(x) erkennen: Bei sehr grosser Dichte der Punkte (= Töne, Ereignisse) ist die Wahrscheinlichkeit für *sehr kurze* Dauern am grössten; bei sehr kleiner Dichte (wenige Ereignisse) ist jede Dauer etwa gleichwahrscheinlich.[16] Es wird daraus ersichtlich, dass die Eigenschaften dieser Funktion musikalisch formbildend sind.

---

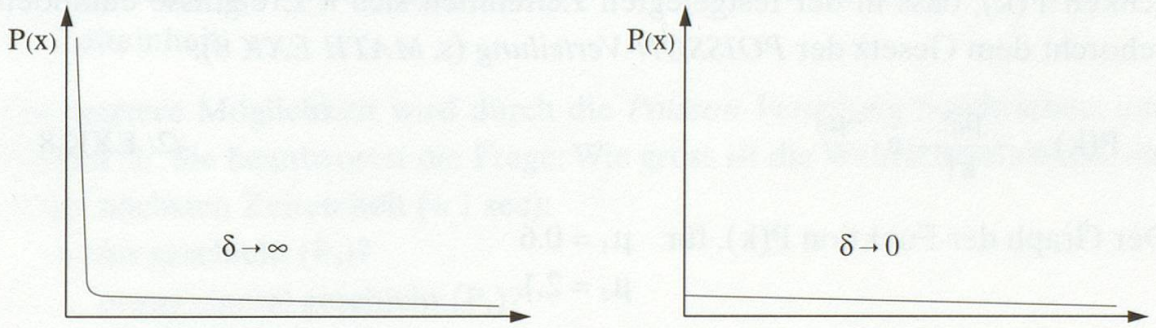
14 XEN 17 – *Stoch* (1961/*MuF*: 33). Zum «*Minimum an Regeln*», s.o. sowie die Überlegungen am Schluss dieses Hauptkapitels.

15 XEN 5 – *Wkt* (1956: 29), XEN 13 – *Suche* (1958/*MuF*: 36, 43), XEN 14 – *Grund* (1960/*MuF*: 71 f.). Zur Diskussion der Formel /1/ s. *MATH EXK* 7.

16 Diese Feststellung ist freilich tautologisch; sie muss jedoch unter dem Aspekt gewürdigt werden, dass nicht der Sachverhalt als solcher, sondern die adäquate Formulierung desselben das zu lösende Problem bildet.



Extrema:

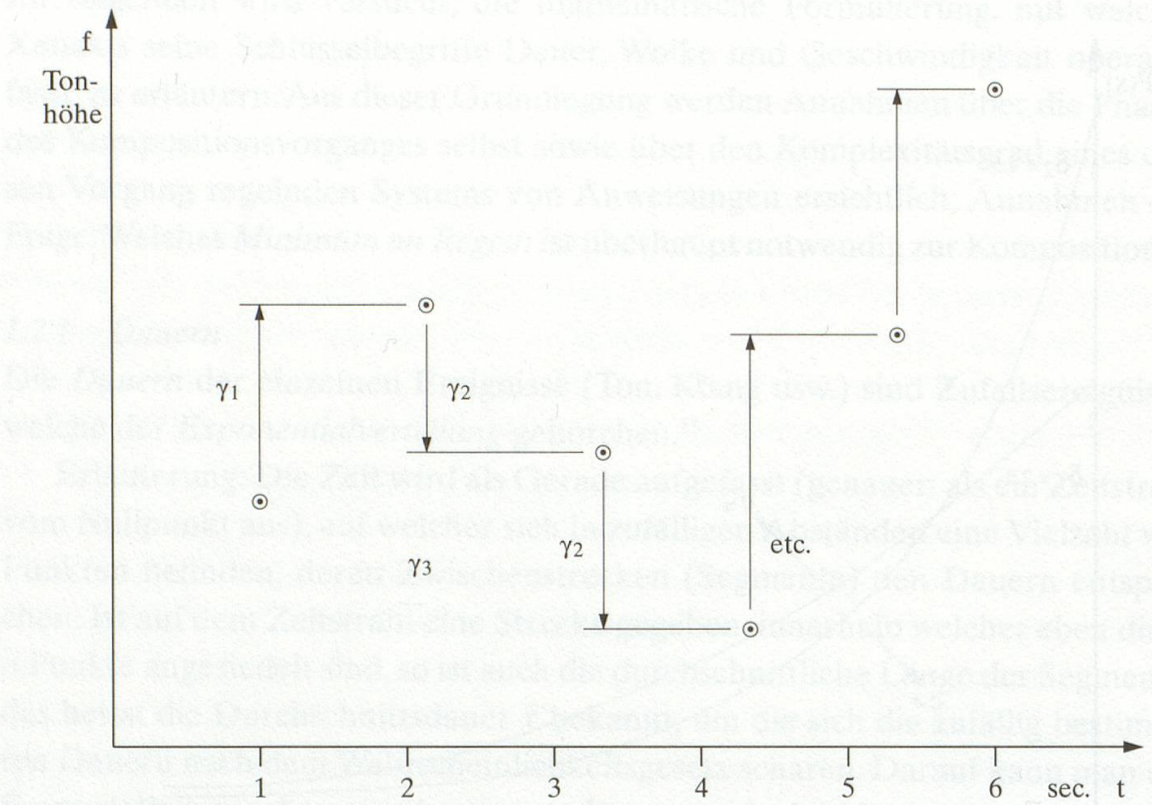


1.2.2 Wolken

Wolken bestehen aus vielen zufällig verteilten «Tonpunkten» und sind durch zwei Faktoren bestimmt:[17]

- die *Dichte* der Punkte μ (in Töne/sec)
- die *Intervalle* zwischen den Punkten γ (in Halbtönen).

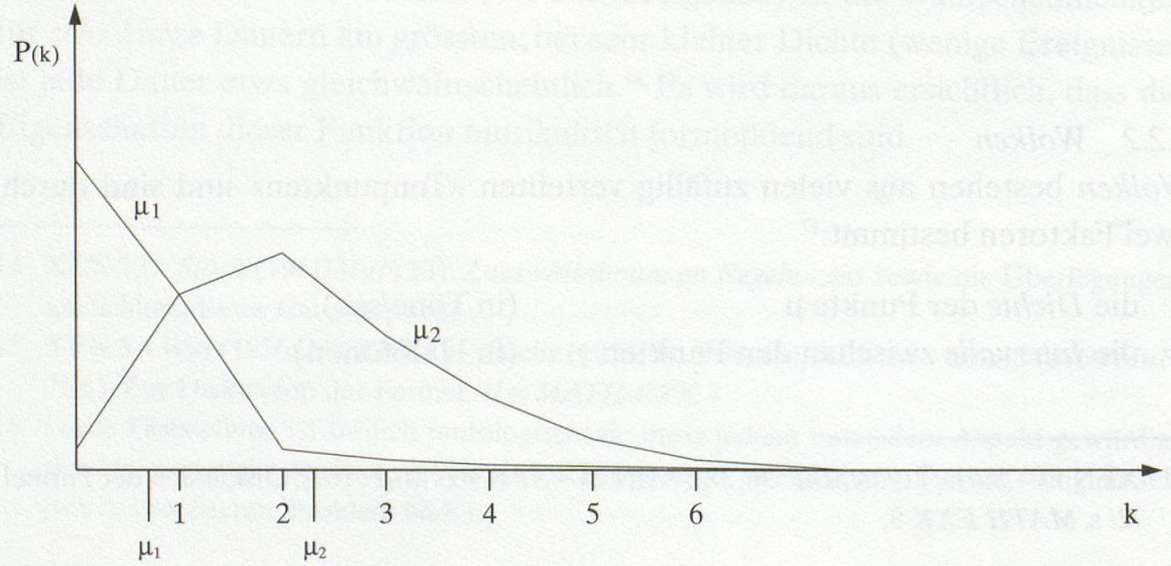
17 XEN 13 – *Suche* (1958/*MuF*: 36, 38), XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 169); Diskussion der Formel /2/ s. *MATH EXK* 8.



1. Für die *Dichte* einer Wolke ist analog zu den Dauern eine durchschnittliche Dichte μ_0 vorgegeben, welche für das ganze Werk gilt. Die einzelne Wolke hat die zufällig bestimmte Dichte μ (Ereignisse pro Zeiteinheit). Die Wahrscheinlichkeit P(k), dass in der festgelegten Zeiteinheit sich k Ereignisse einfinden, gehorcht dem Gesetz der *POISSON-Verteilung* (s. *MATH EXK* 8):

$$P(k) = \frac{\mu_0^k}{k!} e^{-\mu_0} \qquad \text{/2/ EXK 8}$$

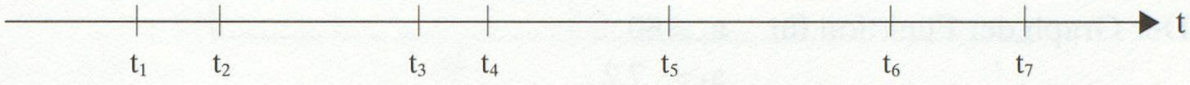
Der Graph der Funktion P(k), für $\mu_1 = 0.6$
$\mu_2 = 2.1$



Die POISSON-Verteilung eignet sich zur Beschreibung von Zufallsprozessen sogenannter seltener Ereignisse:[18] Bei einer bestimmten Durchschnittsdichte von Ereignissen pro Zeiteinheit wird eine Häufung sehr vieler Ereignisse in dieser Einheit, das heisst eine sehr hohe Dichte, zum seltenen Ereignis mit kleiner Wahrscheinlichkeit.

Erläuterung: Setzt man a priori für die Wolke eine durchschnittliche Dichte $\mu = 0.6$ Ereignisse pro Zeiteinheit (d. h. 0.6 Töne/sec, oder umgekehrt formuliert, ein Ereignis durchschnittlich alle 1.67 sec), so wird es sich äusserst selten ereignen, dass in 1 sec plötzlich 30 Ereignisse eintreffen; man wird sich fragen müssen, ob dieses Ereignis wirklich zufallsbedingt war.

Wenn der statistische Basisprozess punktueller Art ist wie «Ereignis/Nichtereignis», was sich durch eine (0/1)-Variable ausdrücken lässt, so ist der Prozess zwar kontinuierlich, aber nur in bestimmten Punkten $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$ treten Zustandsänderungen auf (etwa: ein neuer Ton):



Es gibt nun zwei Möglichkeiten, diesen Prozess zu beschreiben:[19]

1. Man sucht das Verteilungsgesetz der Intervall-Längen $t_{i+1} - t_i$ zweier aufeinanderfolgender Ereignisse.
2. Man sucht das Verteilungsgesetz für die Anzahl Ereignisse pro vorgegebene Zeiteinheit.

Die letztere Möglichkeit wird durch die *Poisson-Verteilung* beschrieben, nach Formel /2/. Sie beantwortet die Frage: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der nächsten Zeiteinheit (= 1 sec):

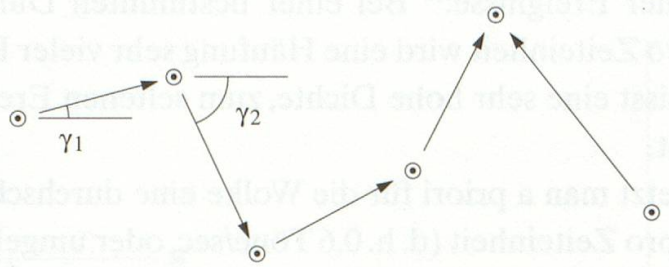
nichts geschieht (P_0)?
… etwas einmal geschieht (P_1)?
… zweimal eintritt (P_2)?
usw. (sog. Klassen-Wahrscheinlichkeit).

2. Die *Tonhöhen* der einzelnen Tonpunkte in der Wolke werden durch die Verkettung ihrer *Intervalle* bestimmt: ein Netzwerk von Zufallsvariablen, deren Präferenz für Werte gegen Null ansteigt, um also dem Tonhaufen «Wolkencharakter» zukommenzulassen:

---

18 S. dazu /814/ SPIEGEL: *Statistics* (1961: 124), ausführlich mit Beispielen; /805/ MENGES: *Statistik: Theorie* (1972: 169).

19 S. dazu ausführlich MENGES (1972: 166 ff.); s. auch *MATH EXK* 7 und 8.

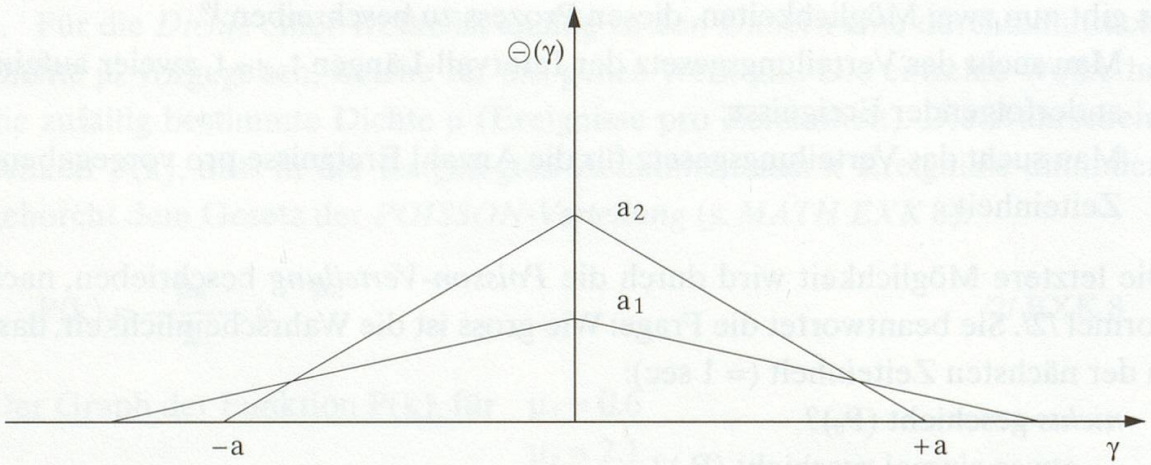


Die *lineare Verteilung* der Wahrscheinlichkeit eines Intervalles Θ (γ) gehorcht[20]

$$\Theta(\gamma)\, d\gamma = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right) d\gamma \qquad /3/\ \text{EXK 9}$$

wobei ± *a* das (eigentlich maximale) Intervall ist, bei welchem die Eintretenswahrscheinlichkeit Null ist.

Der Graph der Funktion für $a_1 = 80$
$a_2 = 7.2$



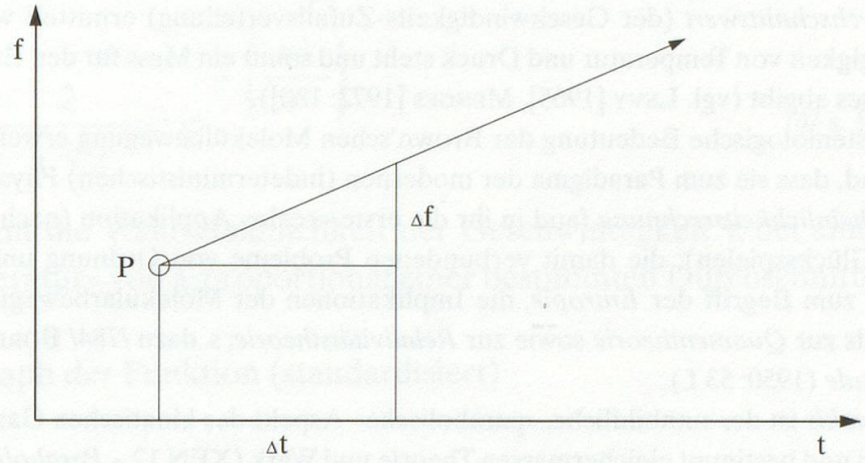
Für ein sehr grosses Maximumintervall *a* (d. h. eine Wolke grossen Tonumfangs) sind die Intervalle nahezu gleichwahrscheinlich; bei «eingeengtem» Intervall-Vorrat ist das Null-Intervall relativ wahrscheinlicher. Da aber damit keine mittlere Tonhöhe, sondern eine *Verkettung* definiert ist, lässt sich die Gesamtform der Wolke nicht prognostizieren (die Annahme, die Form der Wolke – in der Frequenz/Zeit-Ebene – sei um eine mittlere Tonhöhe gruppiert, ist somit aus dieser Überlegung heraus ein Fehlschluss!).

20 XEN 13 – *Suche* (1958/*MuF*: 43); ferner: XEN 14 – *Grund* (1960/*MuF*: 72), XEN 17 – *Stoch* (1961/*MuF*: 35), XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 169); Diskussion der Formel /3/ s. *MATH EXK* 9.

1.2.3 *Glissando-Geschwindigkeiten*

Besondere Sorgfalt hat Xenakis bei der Formulierung der *Glissando-Geschwindigkeiten* walten lassen.[21]

Das Glissando wird definiert durch den Differentialquotienten der Tonhöhe in der Zeit, das heisst durch die Steigungs- oder Fallgeschwindigkeit, bezogen auf einen Anfangspunkt P {f/t} zur Zeit t mit Frequenz f.



Die Glissando-Geschwindigkeit soll durch Zufall bestimmt und innerhalb einer Ober- und Untergrenze um einen Durchschnittswert verteilt sein.

Es besteht – nach der Vorstellung von Xenakis – eine starke Analogie der Gesamtbewegung der Glissandi in einer Wolke mit der sogenannten BROWN'schen Bewegung eines Gases. Die *kinetische Gastheorie* hat Methoden entwikkelt, um die Zufallsverteilung der Molekülgeschwindigkeiten bei bestimmten Temperaturen zu bestimmen, wobei die durchschnittliche Geschwindigkeit der Moleküle zugleich ein Mass für die *Temperatur* liefert.[22] Analog lässt sich nun eine Verteilung von Glissando-Geschwindigkeiten für eine bestimmte «Wolkentemperatur», das heisst um eine Durchschnittsgeschwindigkeit, festlegen. Es hat sich die sogenannte *Normalverteilung* (oder GAUSS-LAPLACE'sche Standardverteilung, s. *MATH EXK* 10) als geeignet erwiesen, derartige Zufallsprozesse na-

21 XEN 5 – *Wkt* (1956: 30), XEN 13 – *Suche* (1958/*MuF*: 42 f.), XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 172).

22 Zu den Begriffen: Unter *Brown'scher Bewegung* versteht man die stets Veränderungen in Richtung und Geschwindigkeit unterworfene Bewegung der Moleküle eines Gases, wie sie von *R. Brown* 1827 entdeckt wurde. – Die *kinetische Gastheorie* befasst sich mit den Energiezuständen von Gasen in direktem Zusammenhang mit der Brown'schen Bewegung; sie wurde erstmals um 1850 von *Maxwell* und *Boltzmann* formuliert (s. dazu /802/ LÉVY: *Processus stochastiques et mouvement brownien* [1965: 15-17]). Zugrunde liegt die Vorstellung eines idealen Gases, in welchem sich die Gasmoleküle in rascher, geradliniger Bewegung kreuz und quer durch den Raum befinden. Nun lässt sich die Geschwindigkeit eines einzelnen Gasmoleküls nicht bestimmen, da sich dieses Teilchen völlig *zufällig* bewegt, durch ständige Stösse gegen andere Moleküle oder gegen die Raumbegrenzung in Rich-

hezu ideal zu beschreiben. Um das Phänomen Glissando einer mathematischen Formulierung als normal verteilter Zufallsprozess dienstbar zu machen, in Anbetracht der Restriktionen durch die natürlichen Grenzen der Spielbarkeit eines Ensembles von Instrumentalisten, hat Xenakis folgende *Homogenitätshypothesen* angenommen:[23]

---

tung und Geschwindigkeit abgelenkt wird. Für alle Moleküle einer Gasmenge kann jedoch ein *Durchschnittswert* (der Geschwindigkeits-Zufallsverteilung) ermittelt werden, der in Abhängigkeit von Temperatur und Druck steht und somit ein Mass für den Energiezustand des Gases abgibt (vgl. LEVY [1965], MENGES [1972: 130]).
Die epistemologische Bedeutung der Brown'schen Molekülbewegung erweist sich in dem Umstand, dass sie zum Paradigma der modernen (indeterministischen) Physik wurde: Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* fand in ihr die erste «reale» Applikation (nach den «künstlichen» Glücksspielen); die damit verbundenen Probleme von Ordnung und Unordnung führten zum Begriff der *Entropie*, die Implikationen der Molekularbewegungen führten ihrerseits zur *Quantentheorie* sowie zur *Relativitätstheorie*; s. dazu /784/ BOREL: *Probabilité et certitude* (1950: 53 f.).
Für *Xenakis* ist der sinnbildliche, «parabolische» Aspekt der kinetischen Gastheorie ungebrochen und bestimmt gleichermassen Theorie und Werk (XEN 12 – *Paraboles* [1958/*MuA*: 16 ff.]): «Assaillis par les tempètes des idées et des processus de la première moitié de ce siècle, il nous fallait absolument élargir les champs d'investigation et de matérialisation de la musique. La sortir des serres atrophiantes de la tradition et la replacer dans la nature. Nous allons utiliser les paraboles, antique système de logique humaine.» – Diese drei «Paraboles», die in *Xenakis'* Zwischenbilanz aus dem Jahre 1958 (l.c.) das bisherige Werk zu begründen versuchen, sind 1. die «*paraboles de l'espace*» (die Einbeziehung des Klangraums in die Komposition, wie explicit in *Metastaseis* an gestrebt); 2. «*paraboles des nombres*» (die willkürliche, und damit «sterile» Grundlegung von Zahlenreihen und -proporotionen, wie etwa in der seriellen Musik oder in Proportionen des Goldenen Schnitts) sowie, als Ausweg aus dem Dilemma: 3. «*parabole des gaz*»: «Dans un gaz, on reconnait la pression et la température. La pression est fonction de la densité, nombre de molécules par unité de volume. La température est fonction de l'énergie cinétique des gaz. Au niveau de la molécule, la pression et la température n'existent pas. Au niveau macroscopique, ces deux notions ont un sens et sur l'homme un effet qualitatif. Le passage d'une échelle à une autre avec simultanément l'accroissement du nombre des molécules produisent un résultat qualitatif qui, à son tour, peut être mesuré. Passage du quantitatif au qualitatif mesuré. (...) A de nouveau nous obtenons une spatialisation à partir d'éléments ponctuels en introduisant la notion statistique. (...) Identifions les sons ponctuels, par exemple: pizz., aux molécules; nous obtenons une transformation homomorphe du domaine physique au domaine sonore. Le mouvement individuel des sons ne compte plus. L'effet massal et son évolution prennent tout un sens nouveau, le seul valable, lorsque les sons ponctuels sont en nombre assez élevé. Nous saisissons toute la portée de cet enrichissement de la pensée musicale qui bouleverse toutes les façons de penser la composition.» (XEN: [ib.: 18 f.]). – Vgl. XEN 5 – *Wkt* (1956: 30), XEN 14 – *Grund* (1960/*MuF*: 67), XEN 19 – *Pôles* (1962/*MuA*: 27), XEN 34 – *Structures* (1969: 178).
Zum stochastischen Modell der Molekularbewegung s.: LÉVY (1965), /782/ BOREL: *Principes et formules classiques du calcul des probabilités* (1947), ferner kritisch: /815/ TAYLOR: «Diffusion by continuous movements» (1921: 196 ff.).

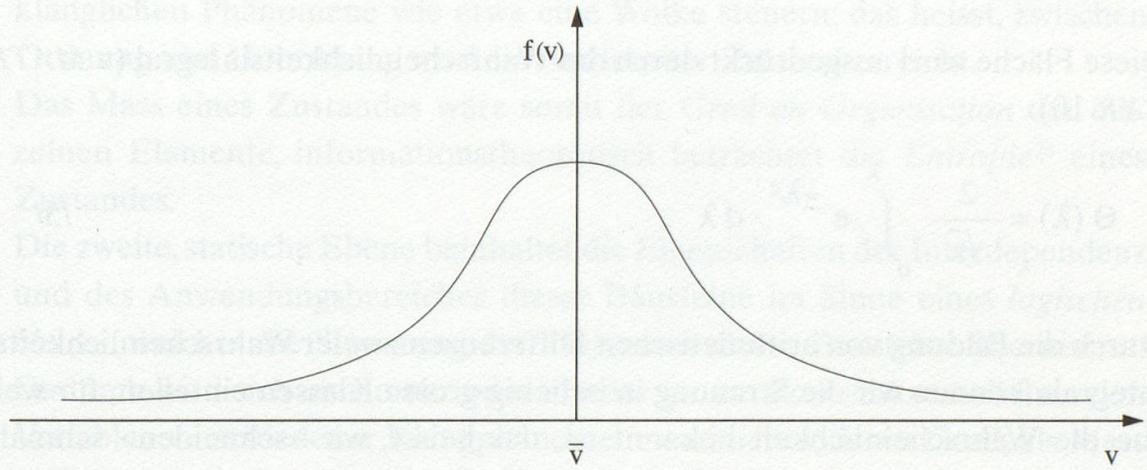
1. Für eine bestimmte Sequenz ist die Dichte der Glissando-Ereignisse konstant.
2. Der Betrag der Geschwindigkeit v ist für alle Register (bezüglich Anfangstonhöhe) gleichwahrscheinlich, der Mittelwert $\bar{v}$ somit positiv und negativ konstant ($|\bar{v}|^2 = C$).
3. Es herrscht Isotropie von Auf- und Abwärtsbewegung.

Die Verteilungsfunktion hat folgende Form:

$$f(v) = \frac{2}{a\sqrt{2}} \cdot e^{-\left\{\frac{v^2}{a^2}\right\}} \qquad \text{/4/ s. EXK 10}$$

Sie bestimmt die Wahrscheinlichkeit der Geschwindigkeit v, bei einer «Aggregats-Temperatur» von a, proportional einer bestimmten Durchschnittsgeschwindigkeit.

Der Graph der Funktion (standardisiert)

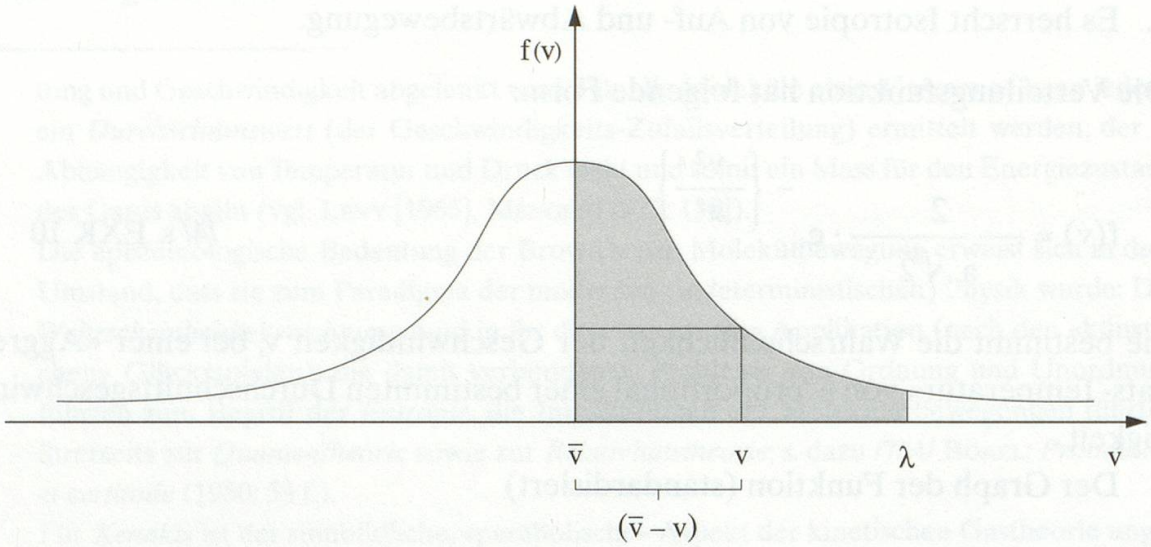


ist die berühmte *Gauss'sche Glockenkurve*. Es zeigt sich, dass je grösser die Abweichung einer Geschwindigkeit v von ihrem Durchschnittswert $\bar{v}$ ist, desto weniger wahrscheinlich ihr Auftreten ist.[24]

23 XEN: *MuF* (1963: 28 f.); Xenakis stützt seine Herleitung ausdrücklich auf /801/ LÉVY: *Calcul des probabilité* (1925); s. *MATH EXK* 10.

24 Der Anspruch, den die Erbauer der Funktion – *De Moivre, La-Place, Gauss* – zu Beginn des 19. Jahrhunderts mit dem Zusatz «normal» erhoben, zeigt die eminente Bedeutung, welche man dieser Funktion beimass. Sie erlangte geradezu legendären Ruhm und war lange Zeit der Inbegriff der Zufallsverteilung schlechthin. Trotz der anschaulichen Form ihres Graphen (wie ein gerieselter Sandberg) wird heute in Frage gestellt, ob sie ein Naturgesetz darstelle; vielmehr wird auf die ideologische Komponente der Zufalls-Problematik hingewiesen. S. dazu MENGES (1972: 248) sowie *MATH EXK* 4.

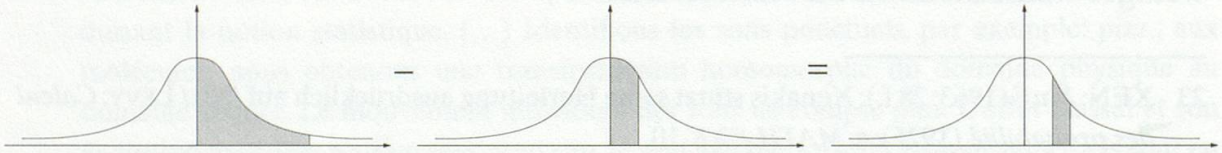
Wir fassen nun die (reale) Geschwindigkeit eines beliebigen Glissando als Abweichung vom Mittelwert $\bar{v}$ auf, das heisst, wir untersuchen die Streuung $(\bar{v}-v)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Streuung nicht grösser als λ sei, ist gleich der Fläche unter der standardisierten Kurve f(v) von $\bar{v}$ bis λ:



Diese Fläche wird ausgedrückt durch das Wahrscheinlichkeitsintegral (s. *MATH EXK* 10):

$$\Theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} \cdot d\lambda \qquad /5/$$

Durch die Bildung von arithmetischen Differenzen zweier Wahrscheinlichkeitsintegrale können wir die Streuung in beliebig grosse Klassen einteilen, für welche die Wahrscheinlichkeit bekannt ist, das heisst, wir «schneiden» schmale Streifen unter der Normalverteilung heraus; die Fläche ist das Mass der Wahrscheinlichkeit, wobei die Gesamtfläche unter der Kurve gleich eins ist (für beliebig grosse Streuung ist das Eintreffen gewiss, also = 1). Also:



bzw. $\Theta(\lambda_1) - \Theta(\lambda_2) = P\{\lambda_2 \leq v \leq \lambda_1\}$; $\Theta(\lambda) \underset{\lambda \to \infty}{=} 1$

In Worten: Die Fläche des «Streifens» entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(v_1, v_2)$, dass ein Glissando mit der Geschwindigkeit v zwischen v_1 und v_2 auftreten wird.

1.2.4 Interdependenz und Eigendynamik

Die mathematische Formulierung der voneinander unabhängigen klanglichen Phänomene des von Xenakis konzipierten musikalischen Kosmos bürgt an sich nicht für musikalischen Sinn. Es handelt sich erst um die Bausteine, mit welchen das Komponieren in Angriff genommen werden kann. Diese Bausteine sind in einer Art und Weise definiert, dass sie einerseits jede beliebig denkbare Ausprägung annehmen können und andererseits ihr quasi übergeordneter Seinszustand in allen Konsequenzen kontrollierbar wird. Dienen in der Physik die stochastischen Gesetze zur Erfassung und theoretischen Erörterung von Naturphänomenen, so bedient sich Xenakis ihrer, um eine neue (musikalische) Wirklichkeit zu schaffen – die viel erörterte Beziehung von Natur und Kunst erscheint hier in neuem Lichte. Die Errichtung einer *dynamischen Interdependenz* der Bausteine untereinander wird zum eigentlichen Kompositionsprozess, der sich auf zwei Ebenen abspielt:

- Die erste, dynamische, ist die Ebene der *Transformation* eines Zustandes innerhalb des Wirkungsbereichs eines Bausteins. Durch die Dimensionierung der Dichten und Streuungen von stochastischen Ereignissen lassen sich die klanglichen Phänomene wie etwa eine Wolke steuern; das heisst, zwischen Ordnung und Unordnung wird ein bestimmter Zustand erreicht.
  Das Mass eines Zustandes wäre somit der *Grad an Organisation* der einzelnen Elemente, informationstheoretisch betrachtet die *Entropie*[25] eines Zustandes.
- Die zweite, statische Ebene beinhaltet die Eigenschaften der Interdependenz und des Anwendungsbereiches dieser Bausteine im Sinne eines *logischen Netzes*, welches die Steuerung der Parameter dieser Bausteine übernimmt. Dadurch wird sich eine mehr oder minder grosse *Korrelation* zwischen den Variablen verschiedener Klangphänomene etablieren, deren Grad, als Mass für direkte Abhängigkeit, sich im *Korrelationskoeffizienten*[26] dieser Variablen ausdrückt.

---

25 Die *Entropie* – einer der wichtigsten Grundbegriffe der Thermodynamik der Gase (etym. v. «εντρεπειν», «umkehren») – bildet ein Mass für die statistische Gleichverteilung einer Menge von Einzelereignissen. In der *Nachrichtentechnik* wurde der Begriff analog als Mass für den *mittleren Informationsgehalt* einer Botschaft eingeführt.
Zum Ansatz: Wir betrachten das ephemere Ereignis «Ton» – spezifiziert durch seine Parameter – als Informationsträger, welcher mit einer bestimmten Erscheinungsdichte in der Botschaft «Werk» vorkommt. Die Quantität der Information, welche in dieser Botschaft übermittelt wird, heisst «Entropie» und wird berechnet als die Summe der binären Logarithmen der Erscheinungsdichten aller Symbole aus dem Symbolvorrat (= «Tonvorrat»). S. /685/ MEYER-EPPLER: *Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie* (1969: 77 ff.), /692/ MOLES: *Théorie de l'information et perception esthétique* (1958: 31 ff.); s. *MATH EXK* 12.

26 Der *Korrelationskoeffizient* dient der Feststellung, wie gut die Beziehung zweier Variablen durch eine *lineare* Funktion ausgedrückt werden kann; er bildet somit ein Mass für die Ab-

Der Kompositionsprozess selbst wird dadurch zum Objekt der von Xenakis unternommenen Formulierung, zum «archétype formel d'œuvre»,[27] in welchem die Unterwerfung aller Regeln unter stochastische Gesetzmässigkeiten die grösstmögliche Assymmetrie der klanglichen Ereignisse unter einem Minimum an kompositorischen Regeln gewährleisten soll. Unter diesen Voraussetzungen das *Minimum an Kompositionsregeln* zu definieren, hat sich Xenakis für *ST* zur Aufgabe gestellt.

Interessant ist dabei, was schliesslich im Endprodukt – der Partitur – zwingend aus der Kompositionslogik entspringt und was als intuitive Interpretation eines Spielraumes gelten darf, welcher durch das System offengelassen wird.

---

hängigkeit zweier Variablen. Er gibt allerdings keinerlei Aufschluss darüber, ob diese Abhängigkeit kausaler Art sei. S. dazu SPIEGEL (1961: 241-245), MENGES (1972: 204), MEYER-EPPLER (1969: 143 ff.); s. *MATH EXK* 13.

27 XEN 17 – *Stoch* (1961/*MuF*: 35).

2. Der formalisierte Kompositionsprozess

Dieses Kapitel dient der Darstellung und Kommentierung des mathematischen Programms von *ST* in synoptischer Weise («mathematisch»/«deutsch»).

Als Modell des Kompositionsprozesses hat Xenakis die einzelnen Tätigkeiten des Komponierens in ein Schema gefasst, welches in acht Phasen gegliedert ist,[28] den «*Phases fondamentales d'une œuvre musicale*»:

1. *Conceptions initiales*	– die ursprüngliche Idee
2. *Définition d'êtres sonores*	– Definition der vorgesehenen klanglichen Elemente
3. *Définition des transformations*	– Makrokomposition: Definition der Transformationen, welchen diese Phänomene (Elemente) unterliegen sollen
4. *Microcomposition*	– Mikrokomposition: das vollständige mathematische Modell definieren
5. *Programmation séquentielle*	– sequentielle Programmierung des Modells
6. *Effectuation des calculs*	– Ausführung der Rechenoperationen
7. *Résultat final symbolique*	– Übertragung des numerisch ausgegebenen Resultates in Musiknotation
8. *Incarnation sonore*	– klangliche Realisierung.

Dieses 8-Phasen-Programm, dem Xenakis eine gewisse Flexibilität – zumindest in der Reihenfolge der Phasen – zugesteht,[29] liegt der Komposition *ST* zugrunde – oder vielmehr: dürfte an dieser Komposition erhärtet worden sein, wie im folgenden gezeigt werden soll.

28 XEN: (ib.: 33 f.).

29 XEN: (ib.: 34): «En réalité l'ordre des phases de cette liste n'est pas rigide. Des permutations sont possibles au cours de l'élaboration d'une œuvre. La plupart du temps ces phases sont inconscientes et défectives. Pourtant cette liste fixe les idées et permet des spéculations sur l'avenir.»

2.1 GRUNDLEGUNG

Die Phasen 1 bis 3 sind in den vorangehenden Kapiteln behandelt worden.

Phase 1 (*«Conceptions initiales»*)
beinhaltet das Festhalten des *kompositorischen Konzeptes* von Klang-Wolken verschiedenartigster Strukturierung, welches durch ein System von logischen Regeln kontrolliert werden soll. Das Mittel dazu sind stochastische Gesetze, mit deren Hilfe ein Minimum an kompositorischen Regeln festgelegt werden soll.

Phase 2 (*«Définition d'êtres sonores»*)
verfügt die spezifische Wahl der *Klangereignisse* unter Berücksichtigung der Auflagen durch die mathematische Formulierung. Hier werden wesentlich stilbildende Merkmale geschaffen.

Phase 3 (*«Définition des transformations»*)
entspricht der mathematischen Grundlegung dieser stilbildenden Merkmale.

Phase 4 (*«Microcomposition»*),
die *mathematische Programmierung*, stellt den Bezug aller Phänomene untereinander her und stellt sie in einen rechenbaren Ablauf, einen mikrokompositorischen Rechenplan, der die Interdependenz der Ereignisse festhält.

Vorab sei ein *Überblick der sequentiellen Verarbeitung im ST-Programm* gegeben (s. gegenüberliegende Seite).

Die rechnerische Bildung von Strukturen erfordert, wie das Flussdiagramm zeigt, die Vorgabe einer Menge von *Parametern*, welche die äusserlichen Bedingungen der klanglichen Charaktere sowie die Limiten und Verknüpfungen zeitlicher und logischer Art bestimmen. Diese *Konstanten* (in der Form fixer Werte oder Werte-Tabellen als Matrizen) werden in der folgenden Darstellung in der Rubrik «gegebene Werte» erläutert.

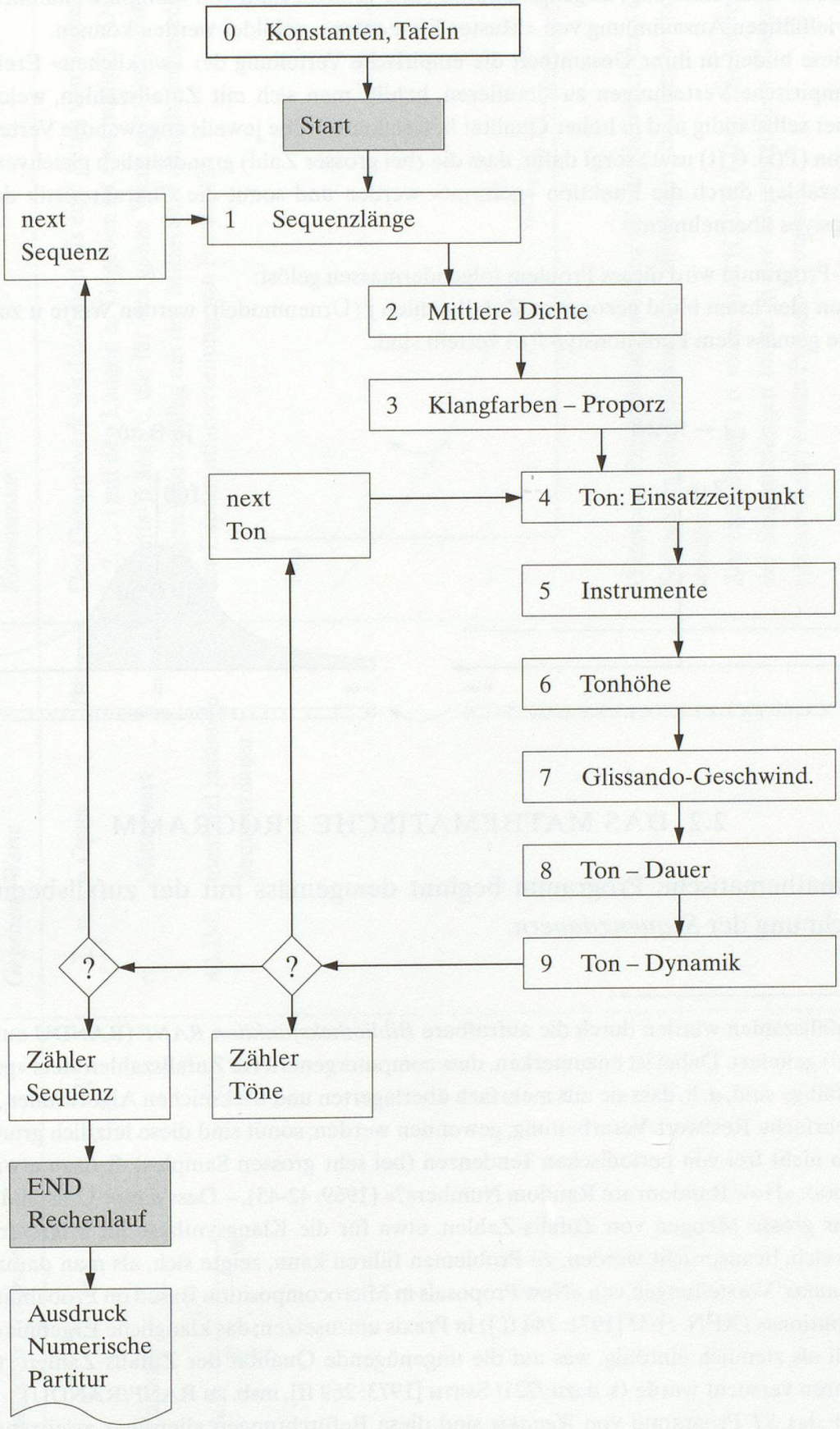


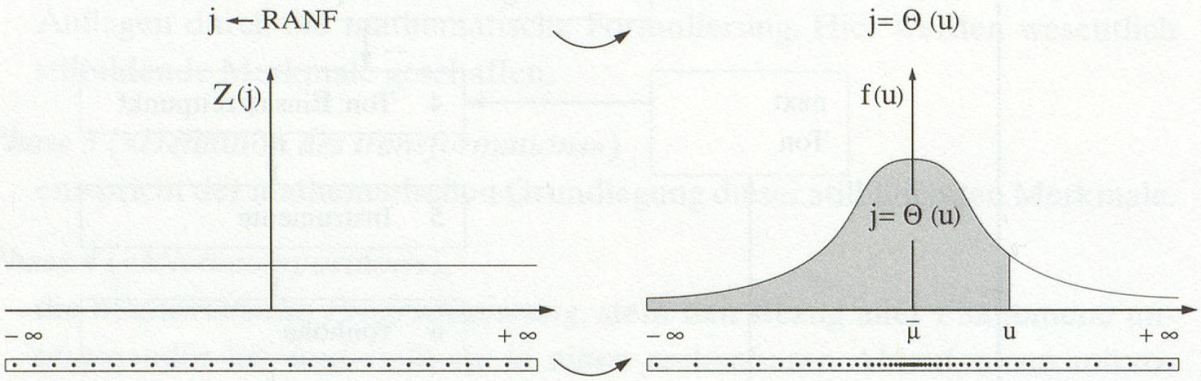
Fig. 129: Überblick der sequentiellen Verarbeitungsweise im ST-Programm

Es muss überdies auf den Umstand hingewiesen werden, dass im Rechenprozess stochastische Strukturen nicht ohne das Ausgangsmaterial einer grossen Zahl von «samples», nämlich einer bunt-vielfältigen Ansammlung von «Muster-Elementen», gebildet werden können.

Diese bilden in ihrer Gesamtheit die empirische Verteilung der «wirklichen» Ereignisse. Um empirische Verteilungen zu simulieren, behilft man sich mit Zufallszahlen, welche der Rechner selbständig und in hoher Qualität liefern kann.[30] Die jeweils angewandte Verteilungsfunktion (P(t), Θ (t) usw.) sorgt dafür, dass die (bei grosser Zahl) grundsätzlich gleichverteilten Zufallszahlen durch die Funktion «geformt» werden und somit die Charakteristik des Verteilungstyps übernehmen.

Im *ST*-Programm wird dieses Problem folgendermassen gelöst:

Den gleichsam blind gezogenen Zufallszahlen j (Urnenmodell) werden Werte u zugeordnet, die gemäss dem Funktionstyp f(u) verteilt sind:



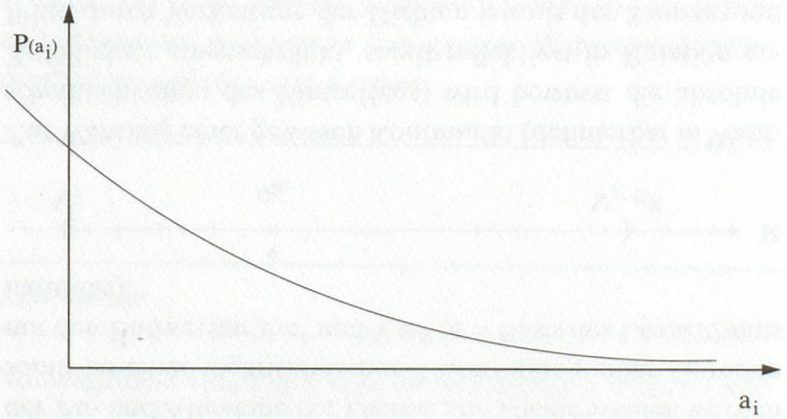
2.2 DAS MATHEMATISCHE PROGRAMM

Das mathematische Programm beginnt demgemäss mit der zufallsbedingten Berechnung der *Sequenzdauern*.

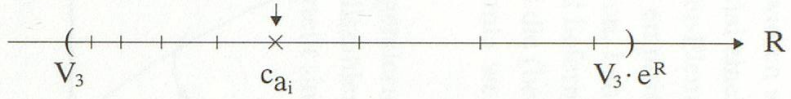
---

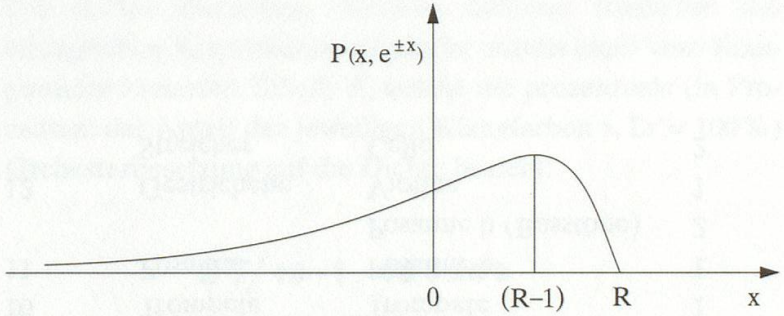
30 Zufallszahlen wurden durch die aufrufbare *Bibliotheksfunktion RANF* (RANDU auf IBM/360) geliefert. Dabei ist anzumerken, dass computergenerierte Zufallszahlen stets «pseudozufällig» sind, d. h. dass sie aus mehrfach überlagerten und trickreichen Algorithmen, durch mehrfache Restwert-Verarbeitung, gewonnen werden; somit sind diese letztlich grundsätzlich nicht frei von periodischen Tendenzen (bei sehr grossen Samples). S. dazu etwa /792/ Good: «How Random are Random Numbers?» (1969: 42-45). – Dass dieser Umstand, wenn sehr grosse Mengen von Zufalls-Zahlen, etwa für die Klangsynthese im Mikrostrukturbereich, beansprucht werden, zu Problemen führen kann, zeigte sich, als man daran ging, *Xenakis'* Vorstellungen von «New Proposals in Microcomposition Based on Probability Distributions» (XEN: *FoM* [1971: 246 ff.]) in Praxis umzusetzen; das klangliche Ergebnis erwies sich als ziemlich eintönig, was auf die ungenügende Qualität der Zufalls-Zahlen rückzuführen versucht wurde (s. dazu /221/ Smith [1973: 269 ff], insb. zu RANF/RANDU).
Für das *ST*-Programm von *Xenakis* sind diese Befürchtungen allerdings zweitrangig, da 1. relativ wenig Samples gezogen werden müssen (um 10'000); 2. die Probleme des Generierungsmodus der Zufalls-Zahlen im Quellprogramm selbst zu liegen scheinen (s. dazu Fn. 40).

1. Bestimmung der Sequenzlänge a_i

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
$P(a_i) = c \cdot e^{-c \cdot a_i} \cdot d \cdot a_i$ /2/ wobei a_i diskret und $\rightarrow da_i = \dfrac{1}{\sum_{0}^{\infty} c \cdot e^{-ca_i}}$ /3/	$\sum_{v=1}^{i} \alpha_v$ = Opus /1/ c: Mittelwert ALIM: maximal zulässige Sequenzdauer	Das Gesamtwerk wird definiert als eine Folge von Sequenzen 1, 2, … i mit den Längen a_i. Gegeben ist eine mittlere (Durchschnitts-)Länge c, die für das ganze Werk gilt. Die einzelnen Längen sind zufällig um den Mittelwert verteilt, entsprechend der Exponentialverteilung von Formel /2/:  Durch die Exponentialverteilung /2/ wird bewirkt, dass kurze Sequenzen (in Relation zum Mittelwert) häufiger vorkomen werden. Zur Herleitung s. o. sowie MATH EXK 7 (NB: Die Verteilung der Sequenzlängen folgte in der ursprünglichen Konzeption (*Achorripsis*) einem Poisson-Prozess!).

2. *Definition der mittleren Dichte der in der Zeit a_i auftretenden Töne*

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
Σ der Töne in a_i: N_{a_i}	c_{a_i}: Mittelwert der Tondichte	Die mittlere Dichte der auftretenden Töne muss abgestimmt werden mit den Möglichkeiten, welche die ins Auge gefasste Besetzung bietet. In einer Tabelle werden für jedes Instrument die Extremwerte aufgelistet. Die menschliche Empfindungsfähigkeit wird als logarithmisch skaliert aufgefasst bezüglich der Zu- und Abnahme der Dichte. Die Dichtenskalen werden somit zu einer logarithmischen Unterteilung einer Geraden mit den Endwerten V_3e^0 und V_3e^R (e = Basis des Logarithmus naturalis).
Ø-Dichte $c_{a_i} = \frac{N_{a_i}}{a_i} \left(\frac{\text{Töne}}{\text{sec.}}\right)$ /4/	V_3: {min} c_{a_i}	
$V_3\, e^o \leq c_{a_i} \leq V_3\, e^R$ /6/	R: $\ln\left(\frac{V_{max}}{V_3}\right)$ /5/	
Kontinuität: $a_{i-1} \mid c_{a_i}$ $a_i \mid c_{a_i}$ etc. ↓		
Def: $c_{a_i} = c_{a_{i-1}}\, e^{\pm x}$ /7/		Zur Wahrung einer gewissen Kontinuität (definierbar in Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens) wird bewusst die absolute Zufälligkeit eingeschränkt, somit reflektiert in Relation geführt, durch Verkettung der Dichten jeweils der Sequenz mit der Vorsequenz mittels einer begrenzten Zufallsvariablen x in Formel /7/.
wobei: $x \in$ Gerade $s = R - 0$		x kann sich bewegen auf einer Strecke von 0 bis R, mit Länge s. Daraus folgt, dass der Faktor, mit dem (aus $c_{a_{i-n}}$) c_{a_i} festgelegt wird, zwischen «fast» Null und dem Quotienten V_{max}/V_3 sein kann. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von x gehorcht wiederum der linearen Verteilung /8/. c_{a_i} wird somit von der gefalteten Verteilung $P(x, e^{\pm x})$ gesteuert und wird am häufigsten einen Wert (Erfahrungswert) um $x = (R - 1)$ annehmen (s. dazu EXK 9):
und $P(x) = \frac{2}{s}\left(1 - \frac{x}{s}\right) dx$ /8/	Maximum:	
$N_{a_i} = c_{a_i} \cdot a_i$	$e^R = \frac{V_{max}}{V_3}$	
	max $\{P(x) \cdot e^{\pm x}\}$	
	bei $x = R - 1$	



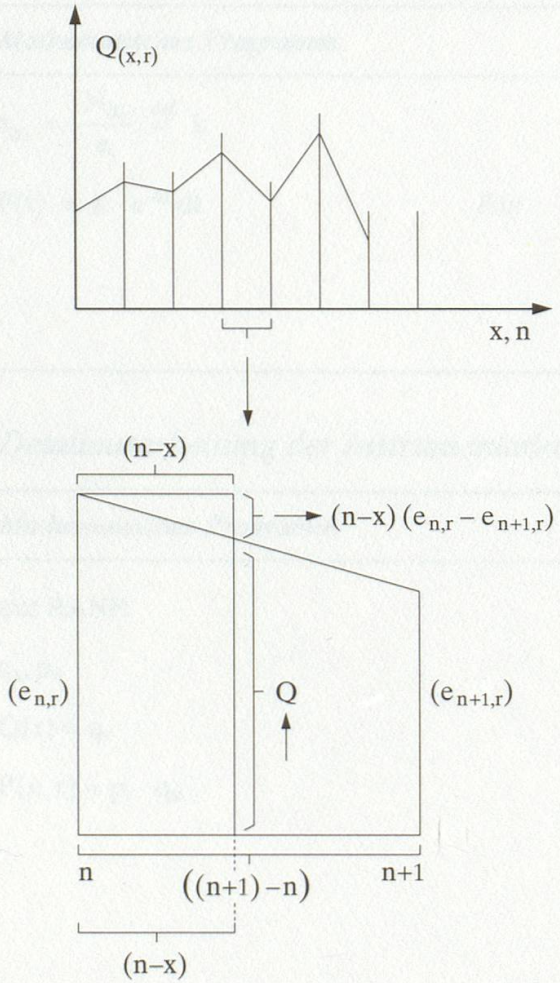
Dies hat zur Folge, dass die mittleren Dichten zweier aufeinanderfolgenden Sequenzen mit grosser Wahrscheinlichkeit deutlich verschieden sein werden.

3. *Bestimmung der Orchesterbesetzung für die Sequenz a_i*

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
$Q(r) = (n-x)(e_{n,r} - e_{n+1,r}) + e_{n,r}$ /9/ $n = 0, 1, 2 \ldots R$, so dass $n \leq x \leq n+1$ $e_{n,r} = P(n,r)$ Tabelle E $c_{a_i} = V_3 e^x$	*E-Tabelle:* $e_{n,r} \longrightarrow r$ $\downarrow$ $n = R$ r: Zahl der Klangfarbenklassen $x = \ln \frac{c_{a_i}}{V_3}$ /10/	Vorausgehend – dies gehört in die konzeptuelle Phase – werden alle erforderlichen Klangfarben aufgelistet, geordnet und numeriert, von 1, 2 … r. Xenakis hat für ST 10 – 3,060962 *«Atrées»* folgende Liste zusammengestellt:

Klasse	*Klangfarbe*	*Instrument*	*Lfd. Nr.*
1	Schlagzeug	Tempelblocks	1–5
		Tomtoms	6–9
		Maracas	10
		Becken	11
		Gong	12
2	Horn	Horn	1

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*			
		Klasse	*Klangfarbe*	*Instrument*	*Lfd. Nr.*
		3	Flöte	Flöte	1
		4	Klarinette	B-Klarinette	1
				B-Bassklarinette	2
		5	Glissando	Violine	1
				Cello	2
		6	Tremolo oder	Flöte	1
			Flatterzunge	B-Klarinette	2
				B-Bassklarinette	3
				Horn	4
				Trompete	5
				Posaune a	6
				Posaune b (Basstöne)	7
				Violine	8
				Cello	9
		7	Gezupfte	Violine	1
			Streicher	Cello	2
		8	Geschlagene	Violine	1
			Streicher	Cello	2
		9	Vibraphon	Vibraphon	1
		10	Trompete	Trompete	1
		11	Posaune	Posaune a	1
				Posaune b (Basstöne)	2
		12	Gestrichene	Violine	1
			Streicher	Cello	2



Die direkte Beziehung zwischen mittlerer Tondichte und Klangfarben-Konstellation geschieht mittels einer vom Komponisten kreierten *Tabelle E*, welche die prozentuale (in Prozenten: der Anteil der jeweiligen Klangfarben r, $\Sigma r = 100\,\%$) Orchesterbesetzung auf die Dichte bezieht:

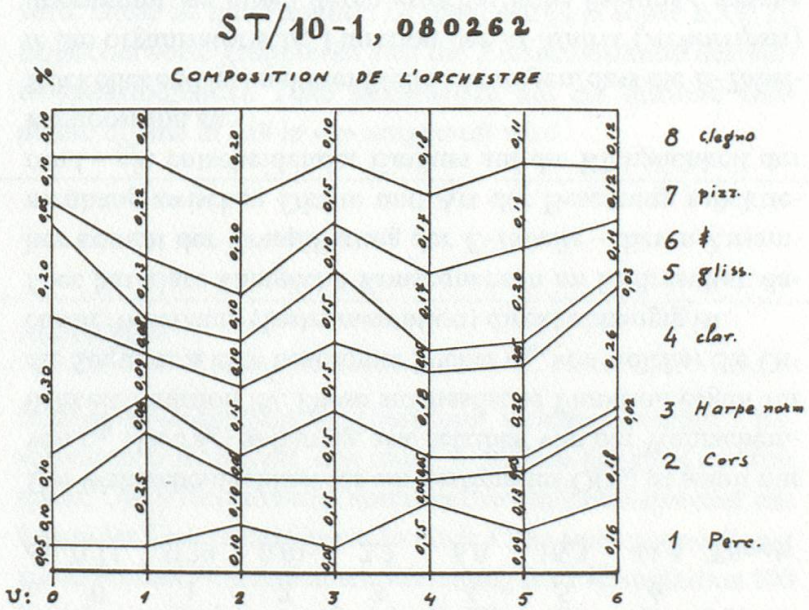


Fig. 3 bis. — *Diagramme de la composition de l'orchestre. ST/10.*

Diese *E-Tabelle* wird durch die Formel /9/ ausgedrückt. Q(r) ist der prozentuale Anteil der Klangfarben-Klasse r am «Gesamtklang», für eine bestimmte Dichte c_{a_i} (in Ausdrücken des Exponenten x). Die Funktion Q(r) ist unstetig linear, dass heisst, zur Vereinfachung wurde für ganzzahlige x (definiert

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*

als n) die Erwartungswerte $e_{n,r}$ der Klangfarbenklasse r definiert, die als «Wendepunkte» die an sich lineare Funktion Q charakterisieren.
Die Dichtegrade υ ($\equiv$ n) der E-Tabelle entsprechen allerdings einem logarithmischen Verlauf der Dichte c_{a_i}, mit folgender Entsprechung (für $V_3 = 0.11$):

υ	0	1	2	3	4	5	6	
c_{a_i}	0.11	0.29	0.81	2.2	6.0	16.3	44.4	Töne/s

Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes $Q(r_0)$ ist somit nur von c_{a_i} (Betrag) abhängig, also letztlich von der Wahrscheinlichkeitsfunktion /8/. Diese stochastische Funktion ergibt für die Sequenz a_i eine bestimmte Dichte c_{a_i}, von welcher die Orchesterbesetzung (Instrumentation) direkt abhängig ist.
Dies hat klare klangliche Konsequenzen im Endresultat; daher kommt der Kompilierung der *E-Tabelle* – diesen Zusammenhang zwischen Dichte und Art der Besetzung reflektierend – ein entscheidender Einfluss auf die Klanglichkeit der Komposition zu.
Rückblickend ist an dieser Stelle anzufügen, dass die *E-Tabelle* die organisatorische Funktion der *M-Matrix* (*Achorripsis*) übernimmt; sie bildet deren «stochastische Fassung», welche durch den direkten (wenn auch stochastischen) Bezug von mittlerer Dichte der Tonereignisse zur Qualität der Orchester- und Instrumentierungsdisposition die Vorstellung der Transformation klanglicher Ereignisse formalisiert. Das A priori des ästhetischen Konzepts findet hier entscheidend Eingang in die Formalisierung.

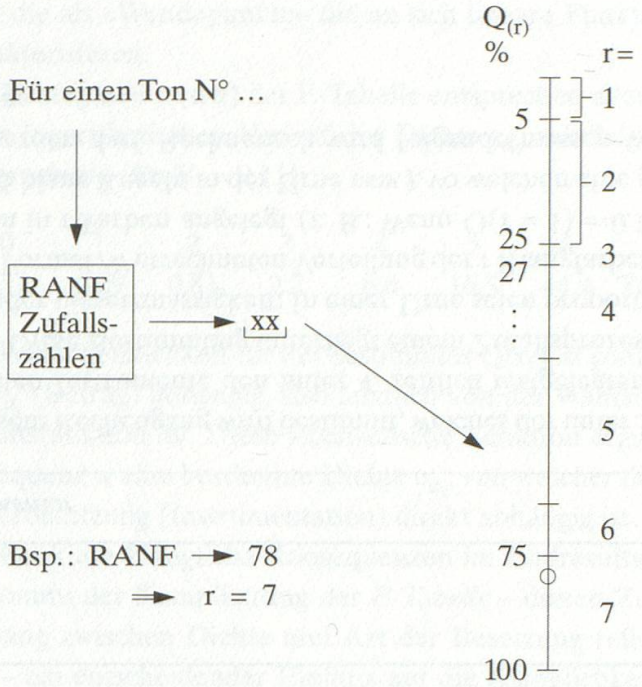
4. *Einsatzzeitpunkt des Tones innerhalb der Sequenz a_i*

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
$c_{a_i} = \frac{N_{a_i}}{a_i} \overset{\text{def.}}{=} k$ $P(t) = k \cdot e^{-kt}\, dt$ /10/	$k = c_{a_i}$ /8/	Der Einsatzzeitpunkt eines Tones ist ein stochastisches Ereignis, das durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion /10/ gesteuert wird. Diese ist mit Funktion /2/ identisch (s. o. sowie EXK 1). Logischerweise gruppieren sich die Einsatzbestände der aufeinanderfolgenden Töne stochastisch um die mittlere Tondichte c_{a_i}, die in /10/ in «k» umgetauft wird.

5. *Detailausarbeitung der Instrumentation*

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
aus RANF: q_r, p_n $Q(r) = q_r$ $P(n,r) = p_r \cdot q_n$	r: Klangfarbenklasse n: Nummer des Instrumentes RANF: Zufallszahlengenerator	In diesem Rechengang wird bestimmt, welches der unter *3.* bestimmten Instrumente den unter *4.* zeitlich festgelegten Ton spielt. Diese Bestimmung unterliegt einem Zufallsprozess mit folgender Gesetzmässigkeit: In einer Urne seien proportional zur in Formel /9/ errechneten Verteilung der r Klangfarben 100 Kugeln in r Farben angelegt (z. B.: Wenn $Q(r = 1) = 0.15$, so sind 15 blaue Kugeln in der Urne usw.), vo welchen eine gezogen werden darf. Rechnerisch wird folgendermassen vorgegangen:

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*

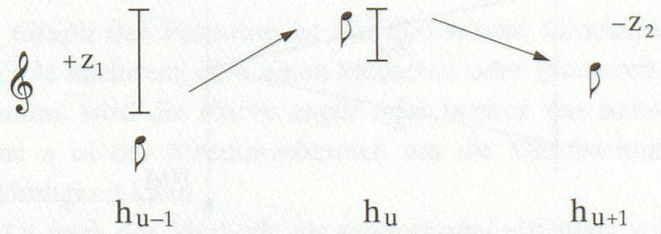


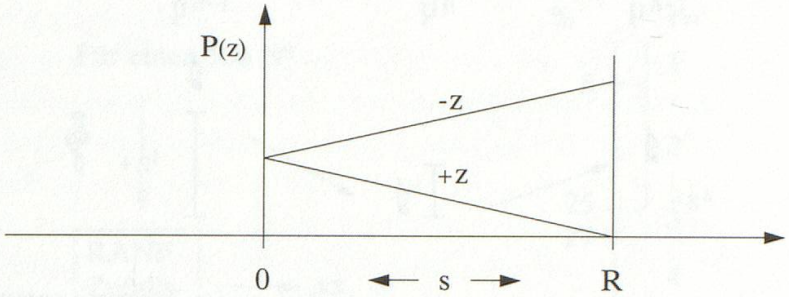
Bei der Evaluation des Instrumentes n innerhalb r wird die gleiche Methode angewandt, unter Beizug eines analogen Schema P(n) zu /9/. Durch die Verteilungen Q(r), P(n) sind die Erwartungswerte für p_r, q_n nicht gleichmässig verteilt; Klangfarben mit grossen Q(r) haben eine bessere Chance, «getroffen» zu werden als solche mit kleineren Q, entsprechend den Schemata Q und P.

Q(r) und P(n) werden also gesteuert einerseits von der kreativen Willkür des Komponisten, die sich in den Schemata nie-

		derschlägt, andererseits durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung /8/, welche die Schemata auswertet. Diese kreative Willkür zeigt sich beispielsweise daran, dass gewisse Instrumente dadurch bevorzugt werden, dass sie in verschiedenen Klangfarbenklassen vorkommen und dadurch eine von vornherein grössere Wahrscheinlichkeit haben, zum Zuge zu kommen (z. B.: nach der E-Tabelle in *3.*: Violine I: 5/12 = 0.42, gegenüber Tomtom: 1/12 = 0.083).

6. Bestimmung der Tonhöhe

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
Kontinuität: $h_u = h_{u-1} \pm z$ wobei: $P(z) = \frac{2}{s}(1 - \frac{z}{s})\,dz$ /8/ $0 \leq z \leq s$ $s = R - 0$	Absoluter Nullpunkt: A_2: s: Tonumfang des Instrumentes h_u: Tonhöhe *Tafeln H_{min}/H_{max}:* für jedes Instrument ist der tiefste und höchste Ton aufgelistet. $H_{max} - H_{min} = s$	Innerhalb des Tonumfangs s eines Instrumentes kann jede Tonhöhe ausgewählt werden. Die Tonhöhenbestimmung ist ein kontinuierlicher Prozess, bei welchem der vorhergehenden Tonhöhe eine durch Zufall bestimmte Differenz z zu-/abgezählt wird.  z ist linear ungleichmässig, nach der Verteilung Formel /8/ (vgl. EXK 7):

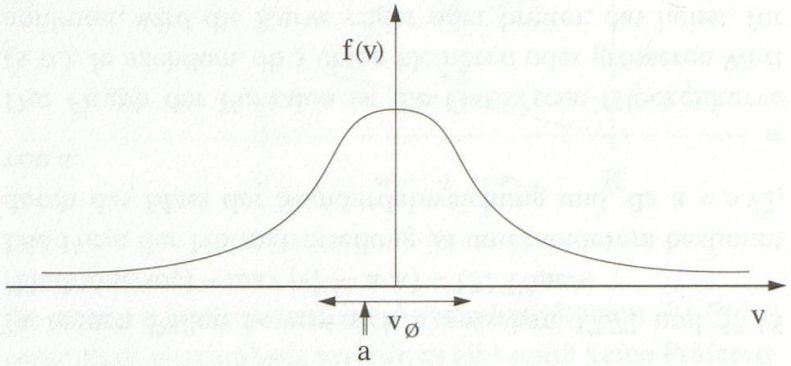
Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
		 Da aber ±z (isotropisch) zur Anwendung kommt, ist P(±z) gesamthaft gleichmässig verteilt; es gibt somit keine Präferenzen für bestimmte Intervalle. Dennoch führt die Verteilung der Intervalle im Gesamtkonzept zu eigenartigen Tendenzen: Weil die Verteilung /8/ direkt proportional zu s ist, führt dies dazu, dass je grösser der Tonumfang eines Instrumentes definiert ist, desto grösser die Erwartungswerte der Intervalle werden! Der Kompilierung der H_{min}/H_{max}-Tafeln kommt somit ebenfalls wesentliche klangbildende Bedeutung zu.

7. *Bestimmung der Gleitgeschwindigkeit im Falle Glissando*

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
Unter Hypothese Homogenität: $f(v) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left\{\frac{v^2}{a^2}\right\}}$ /12/ $\frac{v}{a} = u \qquad v = u \cdot a$ /13/ $T(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+u} e^{-u^2}\, du$ $j \leftarrow$ RANF $j = T(u)$ Bestimmung a: 1. als f (lg c_{a_i}) a) $a = \sqrt{\pi}\left[30 - \frac{20}{R} \cdot \lg\left(\frac{c_{a_i}}{V_3}\right)\right]$ /14/ a) $a = \sqrt{\pi}\left[10 + \frac{20}{R} \cdot \lg\left(\frac{c_{a_i}}{V_3}\right)\right]$ /15/ 2. unabhängig, zufällig: $a = 17{,}7 + 35\,k$ /16/ $0 \le k \le 1$; k aus RANF	f(v): W'kt des Auftretens von v v: Glissando-Geschwindigkeit (Halbton/sec) a: $s\sqrt{2}$ (= «Temperatur») s: Standardabweichung T(u): Bedingung, dass u normalverteilt (= W'kt dass v innerhalb $\pm u$ liegt) u: Aus Tafel $\Theta(\lambda)$ r: (=5) = Gliss.-Klasse! falls $r \neq 5 \rightarrow v = 0$ Konstanten für /14/ /15/: A10 = 10 A20 = 20 A30 = 30	Bei der Berechnung der Gleitgeschwindigkeiten von Glissandi sind Erkenntnisse der kinetischen Gastheorie Pate gestanden: die Geschwindigkeiten sind normal verteilt um einen Durchschnitt a (a kann als die «Temperatur» des Tongemisches bezeichnet werden). Zur Funktion /12/ siehe EXK 10. Der Parameter a, ein Streuungsmass, wird auf zwei verschiedenen Wegen berechnet: 1. als Funktion des Logarithmus der Dichte c_{a_i}: – proportional /14/ – umgekehrt proportional /15/; 2. unabhängig, mittels Zufallszahl /16/. In beiden Fällen bewegt sich a zwischen 17.72 und 53.15 (Halbtöne/sec) = max {v} (= $a \cdot \lambda$) = 132 Töne/s. Die Form der Normalverteilung ist unter anderem bestimmt durch das Mass der Standardabweichung und, da $a = s\sqrt{2}$, von a. Der Graph der Funktion ist die GAUSS'sche Glockenkurve (s. o.). Je nachdem, ob a einen kleineren oder grösseren Wert annimmt, wird die Kurve enger oder breiter, das heisst, für kleine a ist der Streuungsbereich um die Durchschnittsgeschwindigkeit klein. Wird a nach der Methode als *proportional* abhängig von der Dichte c_{a_i} bestimmt, so bedeutet dies, dass bei kleiner Dichte die Geschwindigkeit durchschnittlich kleine Abweichungen aufweisen werden, und umgekehrt.

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*

Alle Möglichkeiten der Formgebung sind berechenbar, ihre endgültige Fixierung jedoch beruht im einzelnen auf Zufallsprozessen.



Varianten-Tabelle: Bestimmung von a durch Methode:

1 a)	Dichte ↗	⟹ a ↘	⟹		eng	VIGL 1
b)	Dichte ↗	⟹ a ↗	⟹		weit	VIGL 2
2)	zufällig	⟹ a	⟹			VIGL 3

Die Konstanten A10, A20, A30, welche die Bestimmung von a mittels der Methoden 1a), 1b) kalibrieren, sind aufgrund der Spielbarkeit und Streicherglissandi (max./min.) festgelegt worden und können beliebig definiert werden.

8. Bestimmung der Dauer x des Tones

Mathematisches Programm

$$z \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{c_{a_i} \cdot p_n \cdot q_r} \qquad /17/$$

$\rightarrow z_{max}$ bei min $\{c_{a_i} \cdot p_n \cdot q_r\}$

1. $z_{max} \overset{\text{def.}}{=} G$

oder

2. $z_{max} \mid z' = z \cdot a^{-z}; \quad \left.\begin{matrix} c_{a_i} \\ p_n \\ q_r \end{matrix}\right\}$ bel. /18/

und a aus $z_{max} \cdot a^{-z_{max}} = G$ /19/

3. (neue Fassung):

$$z' = G \frac{\ln z}{\ln z_{max}} \qquad /20/$$

Verteilung von x:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \, e^{-\left\{\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right\}} \qquad /21/$$

$$\left| \begin{matrix} m - 4.25\,s = 0 \\ m + 4.25\,s = z' \end{matrix} \right| \; /22/ \qquad \left| \begin{matrix} m - 2s = 0 \\ m + 2s = z' \end{matrix} \right| \; /22a/$$

$$u = \frac{(x-m)}{s\sqrt{2}} \qquad \begin{matrix} j = \text{RANF} \\ j = T(u) \\ (u = \lambda \text{ aus } T(\lambda)) \end{matrix} \qquad /23/$$

$$x = \pm\, u \cdot s\sqrt{2} + m \qquad /24/$$

Gegebene Werte

z: mittlere Dauer des Instruments

G: längstmögliche Dauer (Atemzug, Bogen etc.)

T(u): aus Tafel Θ (λ): Normalverteilung

m: arithmetisches Mittel der Dauern

s: Standardabweichung

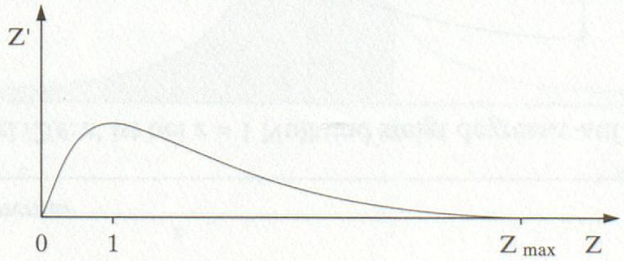
λ: aus Θ-Tafel

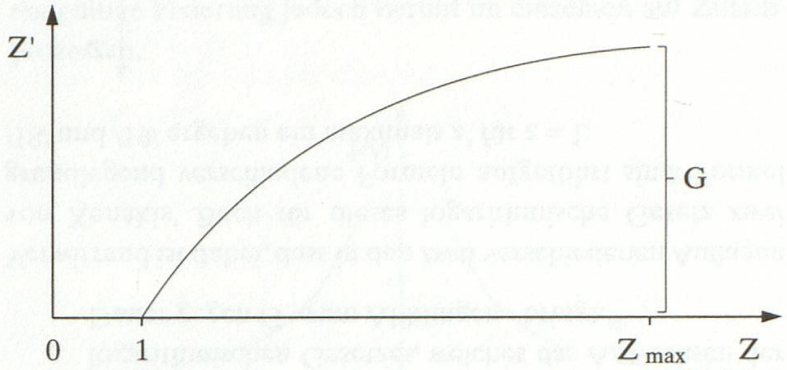
Kommentar

Folgende Prämissen gehen der Berechnung der Tondauer x voraus:

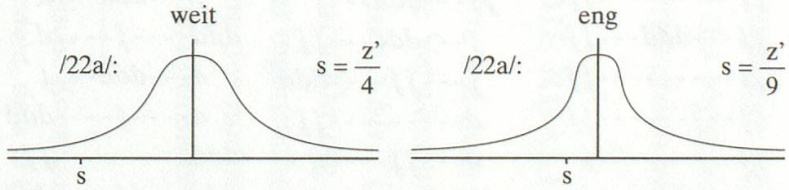
1. Für jedes Instrument wird eine von Tonlage und Dynamik unabhängige mittlere Dauer definiert. Sollte x sich im Endeffekt als unspielbar erweisen, kann sie willkürlich abgeändert werden.
2. Diese mittlere Dauer sei definiert als umgekehrt proportional zur Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Instrumentes (Formel /7/).
3. Für die Festlegung einer maximalen Tondauer z_{max} werden verschiedene Verfahren vorgeschlagen:
   a) z_{max} sei gleich der längstmöglichen Dauer G;
   b) z_{max} sei an G anzunähern, und zwar mit Hilfe eines logarithmischen Gesetzes, welches das Anwachsen der Dauer gegen G «zum Abklingen» bringt.[31]

Verwirrend ist dabei, dass in den zwei verschiedenen Auflagen von Xenakis' Buch für dieses logarithmische Gesetz zwei grundlegend verschiedene Formeln aufgeführt sind: Formel /18/ und /19/ ergeben ein maximals z' für z = 1:

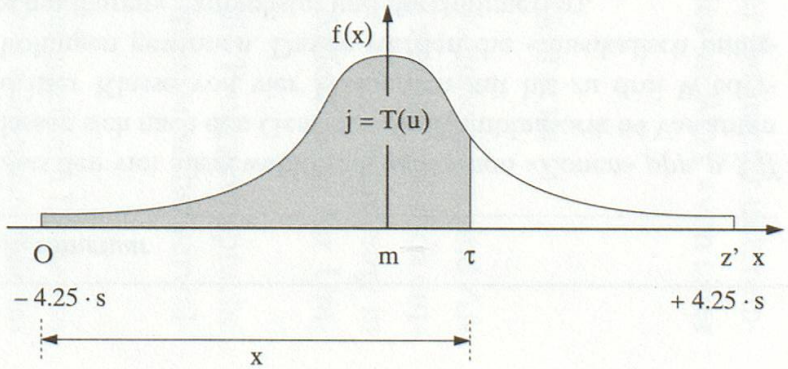


Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
		Formel /20/: z' ist bei z = 1 Null und steigt degressiv auf G:  Für die Dauern x gilt, dass sie gesamthaft normalverteilt seien (Formel /21/ wie /12/). Die Form der Glockenkurve wird duch die Parameter m (Mittelwert der Dauern) und s (Standardabweichung) bestimmt; beide sind laut Formel /22/ direkt von z' abhängig. Formel /24/ schliesslich liefert den Wert der Dauer x. Dies kann nur erfolgen, wenn der Wert T(u) bekannt ist (sonst wäre /24/ lediglich eine tautologische Umwandlung von /23/). Das Prozedere wird sogleich klar, wenn wir den Rechenprozess in Betracht ziehen, welcher stochastische Verteilungen nicht zum Zwecke einer empirischen Überprüfung «wirklicher» Ereignisse, sondern zur Simulation von verteilungsgemässen Zufallsereignissen verwendet (s. o.): eine beliebige Zufallszahl j (← RANF) bestimmt den Wert von T(u); aus der Θ-*Tafel* erhält man u (= λ), wobei u durch /24/ x̲ bestimmt ist (s. dazu EXK 8).

Der Unterschied zwischen den Formeln /22/ und /23/ (gemäss verschiedenen Angaben in *MuF* [1963] und *FoM* [1971]) ist pragmatischer Art: Es betrifft das Mass der Standardabweichung s, somit den Schlankheitsgrad der Gauss'schen Kurve, welcher den Streuungsbereich der Glissando-Schwierigkeiten wiedergibt:



Gesamthaft lässt sich der Sachverhalt nur allgemein formulieren: Der Dauerwert x eines Tones hat eine zufällige Streuung s um einen Durchschnittswert m, welche beide bestimmt werden durch die vorgegebenen Daten der mittleren Tondauer, definiert als umgekehrt proportional zur Entscheidungshäufigkeit dieses Klanges in dieser Sequenz, abgegrenzt durch eine Maximaldauer, die ihrerseits in logarithmischer Abhängigkeit von der längstmöglichen Dauer eines Instrumentes stehen.



9. *Bestimmung der Dynamik eines Tones*

Mathematisches Programm	*Gegebene Werte*	*Kommentar*
$V_{W_n}^{(k)} = V_{W_4}^{(3)} = 4^3 = 64$ D_i (= IFORM) = $[x \cdot B + 0.5]$ INT /25/ $x \leftarrow$ RANF	Tabelle: Permutationen der Lautstärkenzonen 4 Dynamikstufen: *ppp* *p* *f* *ff* B: Summe der tabellierten Dynamiknummern D_i: gezogene Nr.	Aus den vier ausgewählten dynamischen «Zonen» *ppp, p, f, ff* lassen sich nach den Gesetzen der Kombinatorik 64 Varianten dritter Klasse von vier Elementen mit bis zu drei Wiederholungen gewinnen. Davon werden die «musikalisch unterscheidbaren»[32] aufgelistet und durchnumeriert. *ppp---------ppp* *ppp---------p* *ppp----p----ppp* *p---------ppp* *ppp---------f* *ppp----f----ppp* *f---------ppp* *ppp---------ff* *ppp----ff---ppp* *ff---------ppp* *ppp----f----p* *f---ppp---p* *p----f----ppp* *p---ppp---f* *ppp----ff---p* *ff---ppp---p* *p---ppp---ff* *p----ff---ppp* *p---------p* *p---ppp---p* *p---------f* *p----f----p* *f---------p* *p---------ff* *p----ff---p* *ff---------p* *ppp----ff---f* *ff---ppp---f* *f---ppp---ff* *f----ff---ppp* *f----p----ff* *f----ff---p* *f----ff---f* *ff----p----f* *f---------f* *f---ppp---f* *f----p----f* *f----ff---f* *f---------ff* *ff---------f* *ff---------ff* *ff---ppp---ff* *ff----p----ff* *ff----f----ff* $\Sigma = 44 \overset{\text{def.}}{=} B$ Die Dynamiknummer für einen bestimmten Ton wird mittels Zufallszahlen ermittelt. /25/

Dieses 9-Punkte-Programm stellt die Interdependenz aller Parameter untereinander her; es bildet das logische Netz, mit Hilfe dessen alles im Werk «von einer Stelle aus» gesteuert werden kann.

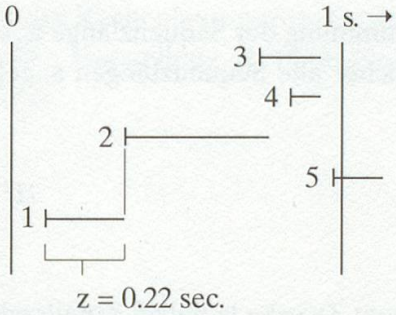
2.3 DIE REALISATION DER KOMPOSITION

Die weiteren Schritte auf dem Weg zur Realisierung der Komposition sind Arbeiten, die durch die Verwendung des Rechners notwendig werden, nämlich entsprechend den *Phasen 5 bis 7* im Schema von Xenakis die *Programmierung* in FORTRAN, die Durchführung der *Rechenläufe* und die Anfertigung der Umschrift in Noten, der eigentlichen *Spielpartitur*.

Die Übersetzung des mathematischen Programms in die Programmsprache FORTRAN,[33] als Operationsanweisung für die sich gewissermassen selbst verwal-

---

31 Dies bildet die logische Konsequenz der Bedingung, dass bei einer gegebenen Dichte von Tönen Gewähr besteht, dass in der festgelegten Zeit einer Sequenz a_i insgesamt (alle Instrumente, p, q – 1) «genügend» Töne gespielt werden um die vorgegebene Dichte tatsächlich erreichen zu können; z. B.:



$c_{a_i} = 4{,}5$ T/s; Länge $a_i = 1$ sec.

$$z = \frac{1}{c_{a_i}}$$

Ebenso wird dadurch der Gefahr vorgebeugt, dass ein «Zuviel» an Tönen zu spieltechnisch nicht ausführbaren Überlagerungen führt (Doppelgriffe!).

32 XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 174): «Nous réalisons des combinaisons permutées de ces quatre éléments trois à trois avec répétitions. Il vient, $4^3 = 64$ combinaisons dont 44 distinctes. Exemple, *pp* < *f* > *p*.»
Offenbar interpretiert er: *ppp-ppp-p*
als gleich: *ppp- p -p*
nämlich als: *ppp > p*
S. die entsprechende Tabelle, 2. Zeile.

33 FORTRAN (= «*Formula Translation*») ist eine problemorientierte Programmiersprache, die zur Verarbeitung von Algorithmen geschaffen wurde. Ihr Anwendungsbereich ist vorzugsweise die numerische Behandlung naturwissenschaftlicher und technischer Aufgaben, wobei sie den Vorteil aufweist, von der benutzten Anlage (relativ) unabhängig zu sein. Als eine der ersten fortgeschrittenen Programmiersprachen 1957 bereitgestellt, ist sie heute noch verbreitet.
Die jeweils gültige Syntax ist in *Handbüchern* festgelegt, die vom Software-Hersteller herausgegeben werden. Es liegt in der Natur einer Sache, die stets Verbesserungen und Ergänzungen erfährt, dass der Stand der Handbücher, trotz Nachlieferungen, nie den genauen

tende Rechenmaschine, erfordert diverse Vorarbeiten: Da der Rechner jede mathematische Operation nur iterativ durchführen kann, muss die Berechnung der ganzen Komposition sequentiell programmiert werden, das heisst, alle Operationen werden durch Sequenzieren in Einzelschritte zerlegt und in Sukzession angeordnet, worauf sie in schleifenartigen Rechengängen iterativ durchlaufen werden können. Dies ist nicht ohne Einfluss auf die erarbeitete mathematische Formulierung; es müssen Algorithmen erstellt werden, welche die statisch definierte Stochastik in Realzeit verarbeiten.

Diese Umformulierung – wie jede Programmierung – zwingt den Anwender dazu, jeden möglichen Fall von Wertekombinationen, welche die Variablen annehmen mögen, vorauszusehen und mit Hilfe von Prüfroutinen und Grenzwerten unsinnige Resultate oder unendliche Schleifen zu verhindern. Bei allen notwendigen Abweichungen von der mathematischen Grundlegung bleibt dies ohne Relevanz für die Erfüllung der Kompositionsidee, da die Rahmenbedingungen der Zufallsprozesse sowie der Parametrisierung unangetastet bleiben.

Dies wird bei der Analyse der als Programmierungsgrundlage erstellten Flussdiagramme (Flow-Charts) einsichtig. Der exakte Verlauf der Schleifen und Verzweigungen – im Gewirr der logischen Abfragen im Programm – gewinnt in der optischen Darstellung an Übersichtlichkeit (s. Anhang 3).

Als Beispiel sei die Programmierung von Punkt 1 (Bestimmung der Sequenzlänge a_i, s. o.) durch alle Phasen hindurch verfolgt:[34] Die Bedingung, welcher alle Sequenzlängen a_i gehorchen, ist die Exponentialverteilung

$$P(a_i) = c \cdot e^{-c \cdot a_i} \, da_i \qquad /1/$$

wobei c = mittlere Dichte.

Da der Rechner die Verteilung simulieren muss und zu diesem Zwecke lediglich Zufallszahlen x, $0 < x < 1$ liefern kann, müssen wir umformen:

Stand einer Implementierung wiedergeben kann, sondern diesem in der Regel nachhinkt. – Wir stützen uns hier, für das *ST*-Programm (in FORTRAN IV, auf IBM 7090, 1962), auf: /796/ *IBM Form GC 12-1022-0* (April 1971), unter Berücksichtigung der auf S. 114 angeführten Einschränkungen für Basis-FORTRAN; ferner auf /809/ MÜLLER/STRECKER: *FORTRAN* (1970), eine Programmieranleitung, welche aufgrund einer 7090/7094-Anwendung geschrieben wurde (s. [1970: Vorwort]). – Zu Computersprachen allgemein s.: /800/ KOHLAS/WALDBURGER (1978: 43-60), MÜLLER/ STRECKER (1970: I, 11-20).

In der Programmierung von *ST* wurde *Xenakis* von *J. Barraud* (*IBM*) wesentlich unterstützt und beraten; s. dazu /058/ BARRAUD (1963: 10 f.), /059/ – (1981: 41 f.): «Quant aux programmes, nous avons commencé à les écrire ensemble, Xenakis et moi, en y passant quelques dimanches. Xenakis y trouva l'occasion d'apprendre progressivement le langage *Fortran*, puis se montra très vite capable de l'utiliser seul.»

34 XEN: *FoM* (1971: 142), s. *Anh. 3*; s. auch *MATH EXK* 7.

Die Verteilungsfunktion über der Wahrscheinlichkeitsdichte $P(a_i)$ lautet (s. dazu EXK 5, Formel /2/):

$$F(h)\ (= P\{E, 0 \le t \le t_0\}) = \int_0^{h_0} f(h)\,dh = 1 - e^{-ch_0} \qquad /2/$$

Nun wird festgelegt, dass die Zufallszahl x den Wert des Wahrscheinlichkeitsintegrals bestimme:

$$P\{0 \le E \le x\} = F(h) = x$$

daraus folgt: $1 - e^{-ch_0} = x$

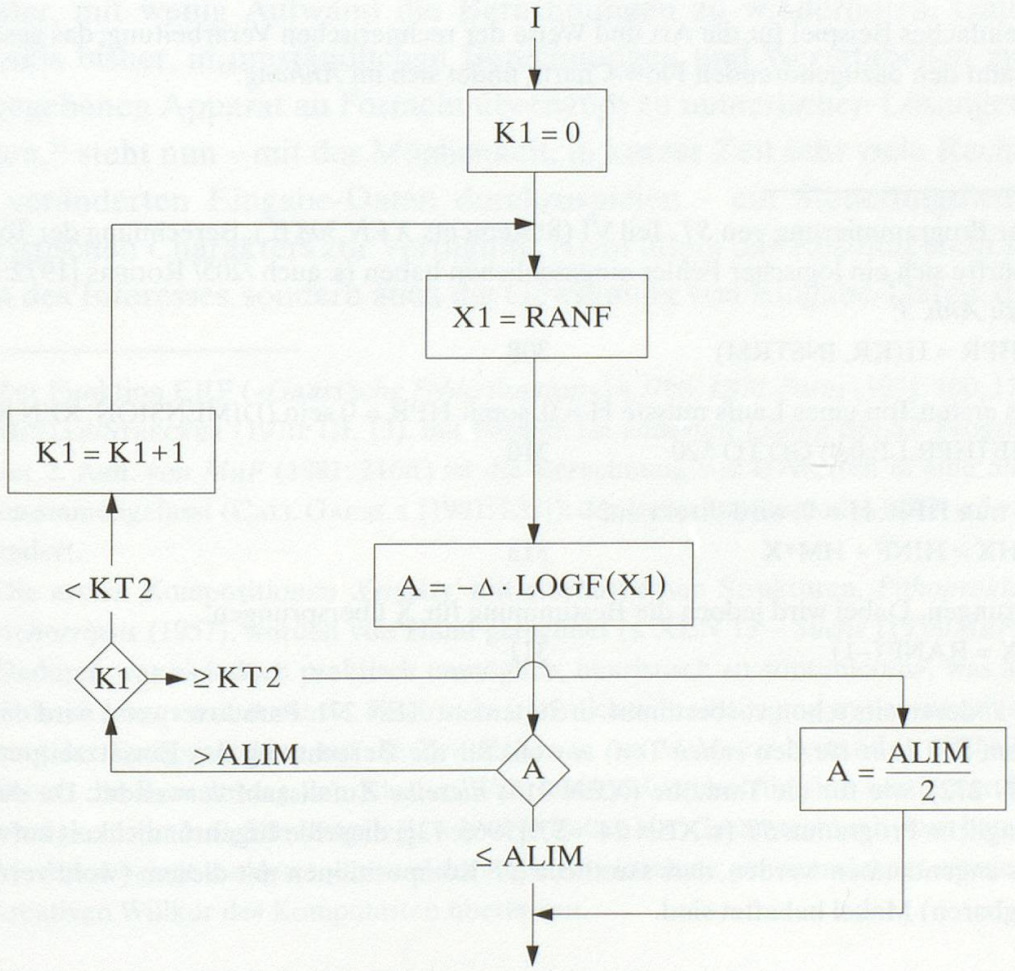
$$x = -\frac{\ln(1-x)}{c} \qquad /3/$$

Im Programm wird der Parameter c (mittlere Dichte) durch die Konstante Δ vorgegeben:

$$\Delta = \frac{1}{c}, \Rightarrow x = -\Delta \cdot \ln(1-x)$$

Die sequentielle Verarbeitung erfordert Prüfroutinen, um zu verhindern, dass die Sequenzlängen «unvernünftige» Masse einnehmen. Der Grund liegt wiederum darin, dass es sich in diesem Rechenmodus nicht um eine empirische Datenauswertung handelt, sondern um ein Formen einer Anzahl von Ereignissen nach den Gesetzen der Verteilungsfunktion. Es liegt in der Natur der Sache, dass – ungeachtet einer grossen Zahl von Ereignissen – im sequentiellen Rechenprozess die Gefahr (= Wahrscheinlichkeit) gross ist, dass extreme Werte gleich zu Beginn des Rechenlaufs auftreten; daher die Notwendigkeit für Limiten.

Die Darstellung als Flow-Chart veranschaulicht, was wir am Programn weiter verfolgen wollen:



Im FORTRAN-Listing betrifft dieser Rechenvorgang die Statements XEN 201-210 (s. *Anhang* 3):

K1 = 0 XEN 201
Der Zähler für Wiederholungen wird auf Null gesetzt.

X1 = RANF(–1) XEN 202
X1 wird als Zufallszahl gezogen.

A = –DELTA*LOGF(X1) XEN 203
ist die Formel /3/ zur Berechnung der Sequenzlänge A, mit $\Delta = 1/c$, LOGF $\triangleq$ ln.

IF(A.LE.ALIM) GO TO 250 XEN 204
Hier wird A überprüft, ob es sich in den Grenzen von ALIM befindet (für X1 → 0, wird A → sehr gross!). Wenn A > ALIM, wird eine andere Zufallszahl gezogen und der Rechenlauf wiederholt. Dabei wird der Zähler jeweils um eins erhöht:

K1 = K1+1 XEN 206
Dieser Vorgang darf KT2-mal (hier = 15) wiederholt werden.

IF(K1.GE.KT2) GO TO 240 XEN 205
Ist K1 ≥ KT2, das heisst, ist diese Schleife 15mal «durchfahren» worden, ohne ein gültiges Resultat zu erbringen (was praktisch unwahrscheinlich ist!), wird A willkürlich definiert:

A = ALIM/2.0 XEN 208
Die Sequenz erhält als Länge die Hälfte der maximal zulässigen Länge.

Dies als einfaches Beispiel für die Art und Weise der rechnerischen Verarbeitung; das gesamte Listing, samt den dazugehörenden Flow-Charts, findet sich im *Anhang*.[35]

---

35 In der Programmierung von *ST*, Teil VI (Statements *XEN 308* ff.), Berechnung der Tonhöhe, dürfte sich ein logischer Fehler eingeschlichen haben (s. auch /205/ ROGERS [1972: 28]); s. dazu *Anh. 3*:

HPR = H(KR, INSTRM) 308

Beim ersten Ton eines Laufs müsste H = 0, somit HPR = 0 sein (DIMENSION; XEN 80)

IF (HPR.LE.0.0) GO TO 520 310

Falls nun HPR, H = 0, wird direkt auf

HX = HINF + HM*X 313

gesprungen. Dabei wird jedoch die Bestimmung für X übersprungen:

X = RANF (–1) 311

X ist andererseits schon vorbestimmt, in Statement XEN 271. Paradoxerweise wird dazu in diesem Fall (nur für den *ersten* Ton) sowohl für die Berechnung des Einsatzzeitpunktes (XEN 272), wie für die Tonhöhe (XEN 313) *dieselbe* Zufallszahl verwendet. Da das ursprüngliche Programm *ST* (s. XEN 24 – *ST* [1965: 73]) dieselbe Eigentümlichkeit aufweist, muss angenommen werden, dass sämtliche *ST*-Kompositionen mit diesem (wohl vernachlässigbaren) Makel behaftet sind.

Die im Programm eingeführten Checks and Balances sind somit nicht ohne Einfluss auf das numerische Ergebnis, ohne indes die mathematische Idee zu verfälschen. Es erhellt daraus, dass der sorgfältigen Wahl der Konstanten, Parameter und Limiten grosse Bedeutung zukommt; sie bestimmen im wesentlichen die Art der (stochastischen) Struktur, welche das Werk klanglich prägt.

Das Listing verrät zudem einiges über die technischen Schwierigkeiten, mit welchen die Computertechnik 1961 noch zu kämpfen hatte. Für die Berechnung der Tafelwerte der Θ-Verteilung musste ein umfangreiches Hilfsprogramm erstellt werden (Statements 338-365), welches auf einen jeweils neu eingelesenen Datensatz (TETA(I), Z1(I), Z2(I)) zugreift. Die Bibliotheksfunktion ERF/DERF stand dem Basis-FORTRAN, welches im IBM System 7090 implementiert war, noch nicht zur Verfügung[36].

Obwohl das System 7090 zu Beginn der sechziger Jahre die fortschrittlichste Technologie anbot, müssen wir uns aus heutiger Sicht die umständliche und zeitraubende Arbeitsweise vor Augen halten: Programm und Daten mussten auf Lochkarten gepuncht werden; Syntax- und Programmfehler konnten erst im nachhinein auf dem Ausdruck entdeckt werden; die beschränkte Speicherkapazität erforderte vom Programmierer allerlei Klimmzüge, um den Platzbedarf im Kernspeicher niedrig zu halten sowie das Zeitverhalten zu optimieren; die Laufzeit (CPUT) auf einem Rechner bildete einen gewaltigen Kostenpunkt. Trotz der langen Implementierungszeit erbrachte die Verwendung des Rechners für Xenakis entscheidende Erfahrungen im Umgang mit Massen von Daten.

Der eigentliche Rechenvorgang erhält durch die Verwendung des Rechners eine vollständig neue Funktion. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Maschine komplizierte und umfangreiche Berechnungen durchführt, erlaubt es dem Anwender, mit wenig Aufwand die Berechnungen zu wiederholen. Galt es für Xenakis bisher, in umständlichen Berechnungen und Wertetabellen zu einem vorgegebenen Apparat an Formeln überhaupt zu numerischen Lösungen zu gelangen,[37] steht nun – mit der Möglichkeit, in kurzer Zeit sehr viele Rechenläufe mit veränderten Eingabe-Daten durchzuspielen – ein Steuerungsinstrument heuristischen Charakters zur Verfügung: Nicht allein das Resultat steht im Zentrum des Interesses, sondern auch die Gewinnung von Eingabe-Daten, die «mu-

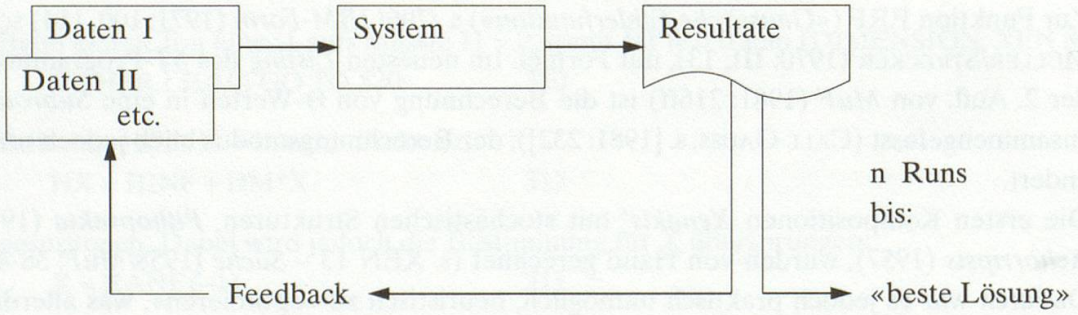
36 Zur Funktion ERF («*Gauss'sche Fehlerfunkion*») s. /796/ *IBM-Form* (1971: 100, 114) sowie Müller/Strecker (1970: III, 13), mit Formel. Im neuesten *Listing* des *ST*-Programms (in der 2. Aufl. von *MuF* (1981: 216ff) ist die Berechnung von Θ-Werten in eine *Subroutine* zusammengefasst (Call Gauss, s. [1981: 232]); der Berechnungsmodus blieb jedoch unverändert.

37 Die ersten Kompositionen *Xenakis'* mit stochastischen Strukturen, *Pithoprakta* (1956), *Achorripsis* (1957), wurden von Hand gerechnet (s. XEN 13 – *Suche* [1958/*MuF*: 38-49]). Dadurch war es jedoch praktisch unmöglich, heuristisch zu «optimieren», was allerdings dadurch kompensiert wurde, dass ein beträchtlicher Freiheitsgrad in der intuitiven Zuteilung der Ereignisdichten auf die Zeit-Zellen in der *M-Matrix* bestand (s. XEN: [ib.: 49]). Durch die Berechnung von Klassen-Wahrscheinlichkeiten für eine bestimmte Ereignishäufigkeit war lediglich festgelegt, *wie viele* Zellen der Gesamtzahl mit dem betreffenden Merkmal belegt werden sollte; welche Zelle im einzelnen gekennzeichnet wurde, war der kreativen Willkür des Komponisten überlassen.

sikalisch interessante» Lösungen bieten. Die Eingabe-Daten können durch beliebig viele Rechenläufe in einem Näherungsprozess, quasi «vom Resultat her», kalibriert werden: dieser Spielraum, den das Programm offen lässt, kann erst mittels eines Rechners voll genutzt werden – als Spiel zwischen Prämissen und Ergebnis.[38]

Und dieses Spiel – dies bleibt an der Partitur nachzuvollziehen – muss auf Xenakis einen grossen Reiz ausgeübt haben.

38 Der übliche Prozess-Ablauf DATEN → SYSTEM → RESULTAT wird um ein Feedback zu einer Art kybernetischem System ergänzt (Regelkreis):



S. XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 176): «On procède (…) à des courts passages en machine pour détecter les erreurs de logique, d'orthographe et pour fixer les valeurs des paramètres d'entrée qui sont introduits sous forme de variables. C'est une phase très importante qui permet d'explorer toutes les zones du programme et de définir les modalités de son exploitation.»

3. ST/10–1,080262 für zehn Instrumente

Am Werk soll nun verfolgt werden, was stochastische Strukturen in musikalischer Hinsicht zu bedeuten haben, wie die Kompositionsidee Xenakis' durch Formalisierung musikalische Formen neuer – ungehörter – Art schuf. Als Objekt der Untersuchung bietet es sich an, *ST/10–1,080262* beizuziehen; es handelt sich um das erste Stück, welches von Xenakis 1962 berechnet und klanglich ausgearbeitet wurde. Von dieser Komposition existiert eine Fassung für Streichquartett (*ST/4–1,080262*), welches – nach der Art eines kunstvollen Arrangements – sämtliche Klänge der zehn Instrumente in den Streichersatz zu intergrieren versucht. Zum Vergleich werden wir zuweilen auf Atrées (*ST/10–3,060962*) verweisen, ein Stück für ebenfalls zehn Instrumentalisten – allerdings in abweichender Zusammensetzung –, bei welchem der Komponist ausdrücklich mit mehr Freiheit über das berechnete Material verfügte.[39]

Zur Vereinfachung der Terminologie soll im folgenden von «*ST 10*», «*ST 4*» und «*Atrées*» gesprochen werden.

Die Frage, die im Vordergrund steht, richtet sich auf die Beschaffenheit jener durch ein Minimum an Kompositionsregeln hervorzubringenden Asymmetrie der klanglichen Phänomene; es geht um einen Versuch, eine Stringenz des Komponierens bei Xenakis am Werk aufzuzeigen und zu begründen. Die naheliegende Vorstellung, der angesprochene Beziehungsreichtum liesse sich aus der Partitur durch Nachrechnen oder Nachrechnen ermitteln und numerisch festhalten, lässt sich kaum realisieren: Ganz allgemein könnte ohne das vollständige Eingangsdaten-Material, einschliesslich aller Hilfstabellen sowie Zufallszahlen-Routinen, ein Rekonstruktionsversuch «von hinten her» nicht in Angriff genommen werden. Primär ist jedoch aus prinzipiellen Gründen ein exaktes Nachrechnen der Komposition wegen des stochastischen Charakters der mathematischen Regeln nicht praktikabel: Der Rechenlauf wird stets von Zufallszahlen in Gang gesetzt, welche gleichsam die Impulse bilden, die den stochastischen Gesetzesmechanismus antreiben. Dieser zwingt seinerseits das chaotische Impuls-Material in die vorgeschriebenen Verteilungsmuster. Wohl lässt sich das Programm mit den exakten Eingangsdaten, beispielsweise von *ST*

39 Die Instrumentation von *ST/10-1* wurde explizit von Anton Weberns *Sinfonie* op. 21 übernommen (s. XEN 19 – *Pôles* [1962/*MuA*: 32]) und mit Schlagzeug ergänzt.
Zu *Atrées* s. das Vorwort zur Partitur: «C'est œuvre utilise le même programme stochastique que (...) *ST/10-1,080262* et est calculée par l'ordinateur IBM 7090 de la place Vendôme. Pourtant quelques licences y sont introduites.»
Ausgaben: *ST/10-1,080262* (1962), Boosey & Hawkes Nr. 19653; *Atrées* (= *ST/10-3,060962*) für elf Instrumente, Ed. Salabert, E. F. M. 836; *ST/4-1,080262* für Streichquartett, Boosey & Hawkes Nr. 19618.

10, auf einem adäquaten Rechner starten; als Ergebnis käme jedoch bei jedem Lauf eine zwar ähnliche, aber in zeitlicher und (mikro-)formaler Hinsicht völlig andere Komposition ans Licht.[40] Wir sind aber in der Lage – wenn auch eingeschränktermassen –, die Verteilung der musikalischen Phänomene in Gruppen zu beobachten und deren Plausibiltät im Kontext zu testen.

Der Versuch, aufzuzeigen, wie Anspruch und Wirklichkeit des kompositorischen Schaffens in Einklang gebracht werden können, muss somit, die Unmöglichkeit des direkten Nachvollzugs überbrückend, am Werk selbst beginnen: Es gilt, Phänomene zu sammeln und deren Vereinbarkeit mit dem kompositorischen Konzept zu untersuchen. Es versteht sich, dass eine derartige Analyse auf einer relativ schmalen Argumentationsbasis fusst, und dass deshalb, aufgrund einer Anzahl Aussagen und Beobachtungen, bei welchen viel persönlich Empfundenes vom Objektiven kaum zu trennen ist, nur vorsichtig Schlüsse gezogen werden können.

Die im folgenden angeführte Reihe von Beobachtungen scheint uns jedoch geeignet zu sein, aufgrund von partiellen Induktionen die Stringenz im Schaffen Xenakis' zu vermitteln. Die statistischen Vorgänge in der Komposition kritisch anzugehen, heisst somit konkret: Untersuchen, wo und in welchem Masse Freiheitsgrade vorhanden sind, die durch andere als die strengen Zufallskriterien interpretiert werden können. Die Untersuchung setzt an bei der Realisierung der Partitur aus dem numerischen Ausdruck des Rechners und konzentriert sich auf die Art und Weise, in der Xenakis seine definitive Fassung im Notenbild fixierte; es geht somit um die interpretierende Determination, in welcher möglicherweise etwas Persönlich-Intuitives erkannt werden kann.

Zuvor sei anhand der folgenden *Notenbeispiele* das Erscheinungsbild der Partitur vorgeführt. Dabei wollen wir die Gelegenheit ergreifen, auf besondere Merkmale und Eigentümlichkeiten des Stils hinzuweisen und deren kritische Befragung anzuregen.

---

40 Ausschlaggebend für das Gelingen einer Rekonstruktion wäre der genaue Stand des Betriebssystem (OS/DOS), was aus verschiedenen Gründen nicht möglich ist. Theoretisch ist andererseits im Programm die Möglichkeit vorgesehen, zu Testzwecken für jeden Lauf ein und dieselbe Abfolge der aus dem Zufallszahlengenerator bezogenen Steuerwerte zu bewahren. Dies ist möglich, weil der Generator (Funktion RANF(X)) offenbar jeweils auf die interne Uhrzeit (Clock) als Basiszahl zugreift und diese nach einem festen Verfahren in eine Zahl $0 < X < 1$ umwandelt; dieses Prozedere ist somit wiederholbar. Dieses Regelwerk lässt sich nun wunschgemäss «stören». Mit Hilfe der Variablen ALEA kann der Zufallsgenerator jeweils neu geeicht werden (laut Kommentar Statements 150-152): Wenn ALEA $\neq 0$, werden die Resultate mit jedem Lauf verändert (Statem. 153: IF (ALEA – 0) CALL RANFSET (TIMEF(1))), wenn andererseits ALEA = 0, ergibt jeder Lauf bei gleichen Input-Daten gleiche Ergebnisse. – Das Mass der *Manipuliermöglichkeit* zu erkennen, ist ausserordentlich wichtig, um den Spielraum, ja überhaupt die Möglichkeit *heuristischer Parametrisierung* zu ermessen. Die Frage wäre allerdings erst dann mit Sicherheit geklärt, wenn die interne Struktur der Subroutine RANFSET bekannt wäre.

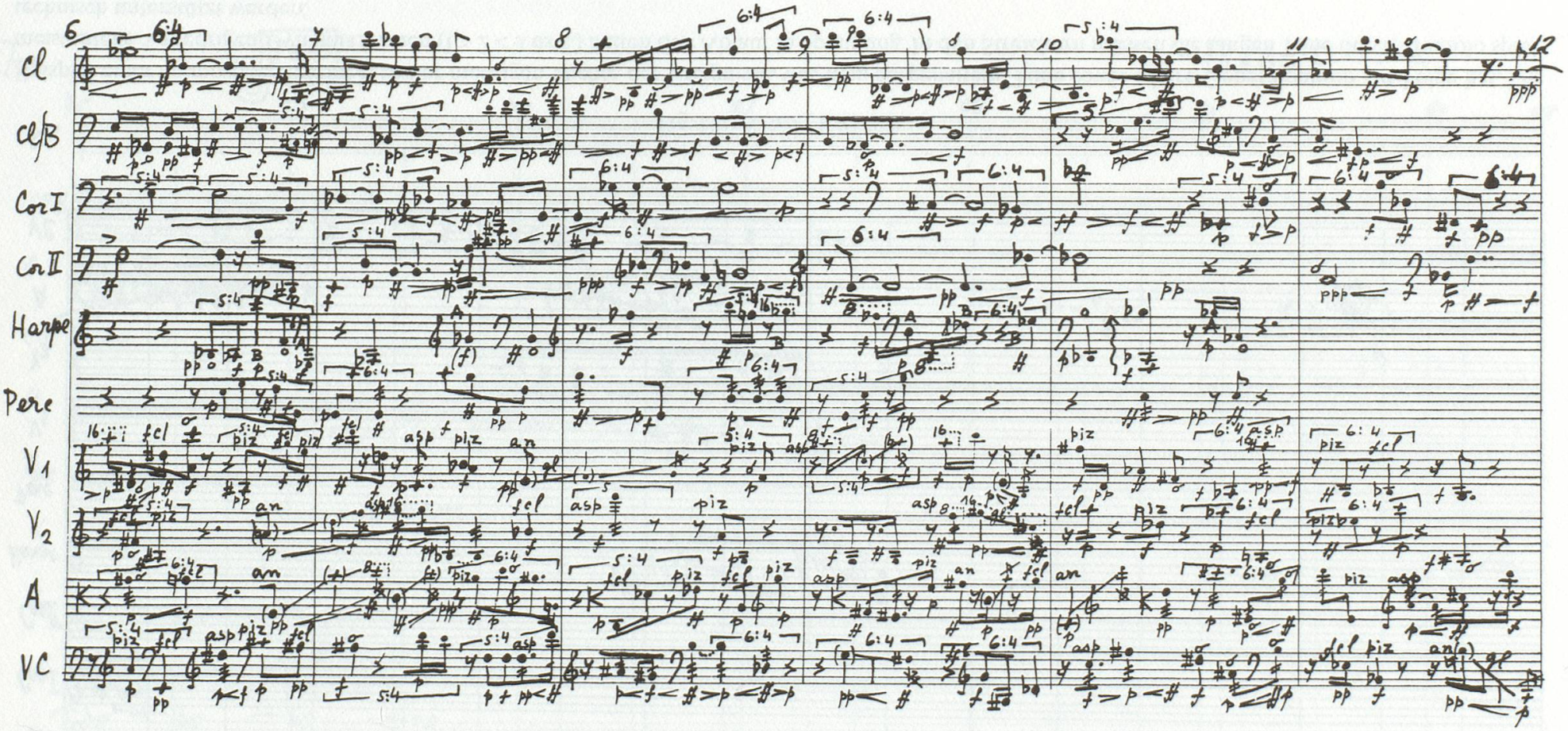


Fig. 130: *ST 10* (T. 6-11)

Abschnitt (Sequenz) mit hoher Dichte der Ereignisse, was deren kurze Dauern impliziert. Daraus resultiert ein «punktueller» Stil, der durch stets wechselnde (und dadurch uniform wirkende) Dynamik und variierte Spieltechniken bestärkt wird. Vierteltöne sind mit ○ bezeichnet (○ = 1/4-Ton höher). So bietet sich das Erscheinungsbild des Paradigma «nuage de sons» in dieser Komposition dar. Beim Hören lässt sich feststellen, dass die Glissandi besonders hervortreten und im Gesamteindruck dominieren.

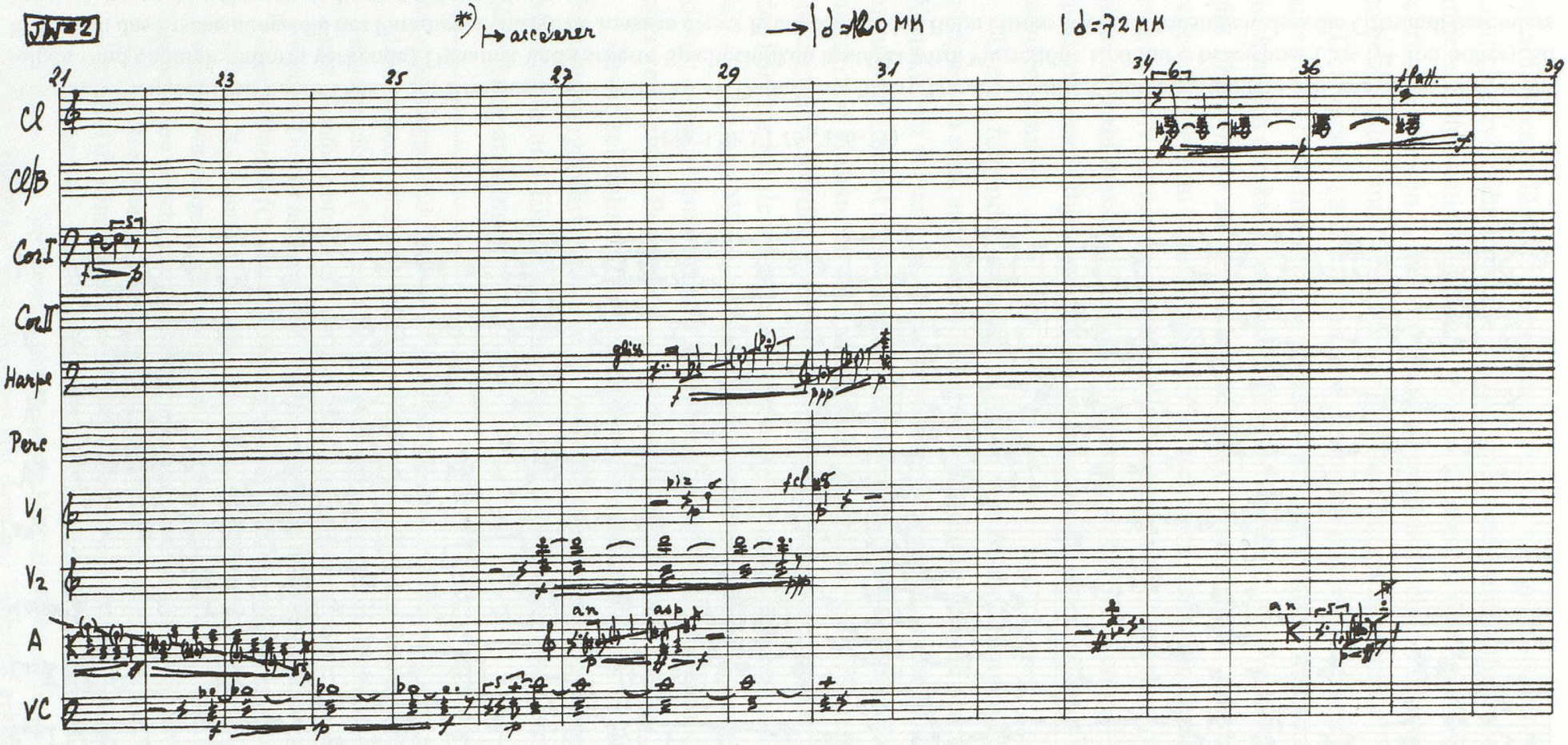


Fig. 131: *ST 10* (T. 21-39)

Beispiel einer «atmosphère rarifiée», einer niedrigen Dichte der Ereignisse, was lang ausgehaltene Töne sowie öftere Generalpausen zur Folge hat. Die meistenteils 3-gliedrigen Dynamikformen (1 > 2 < 3 usw.) halten den Ablauf in Spannung. In den Streichern müssen die langen Töne durch Tremolo spieltechnisch unterstützt werden.

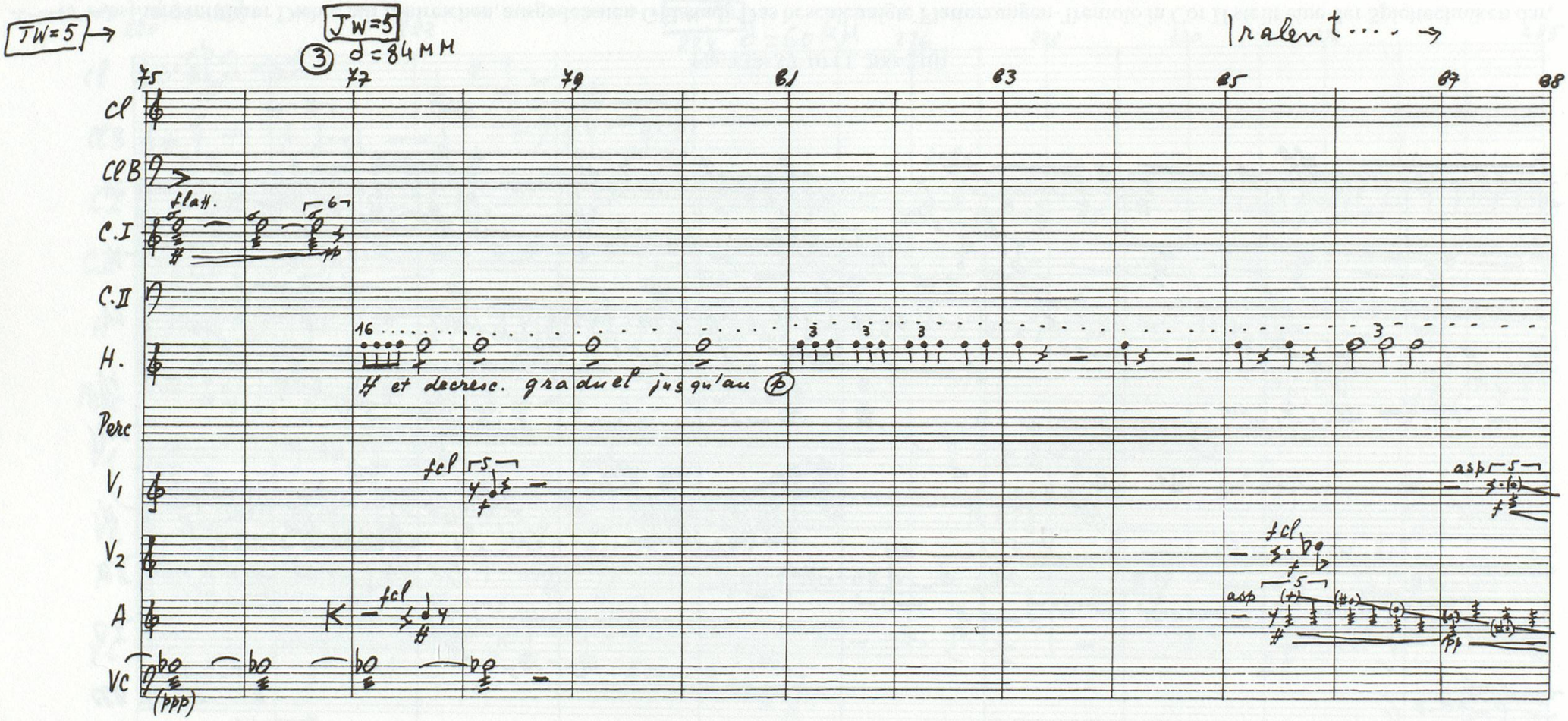


Fig. 132: *ST 10* (T. 75-68)

Langandauernde Harfentöne sind in metrisch pulsierende Ostinati umgewandelt (diese Stelle erinnert konzeptuell wie klanglich stark an eine ähnliche Pizz.-Reihe in höchstem Register in *Pithoprakta*, T. 60 ff.).

Fig. 133: *ST 10* (T. 200-210)

Abschnitt mittlerer Dichte mit zahlreichen, ausgedehnten Glissandi. Das beschleunigte Flatterzungen-Tremolo in Cor II stellt eine der Spieltechniken dar, die in der Nachgestaltung durch den Komponisten eingeführt werden.

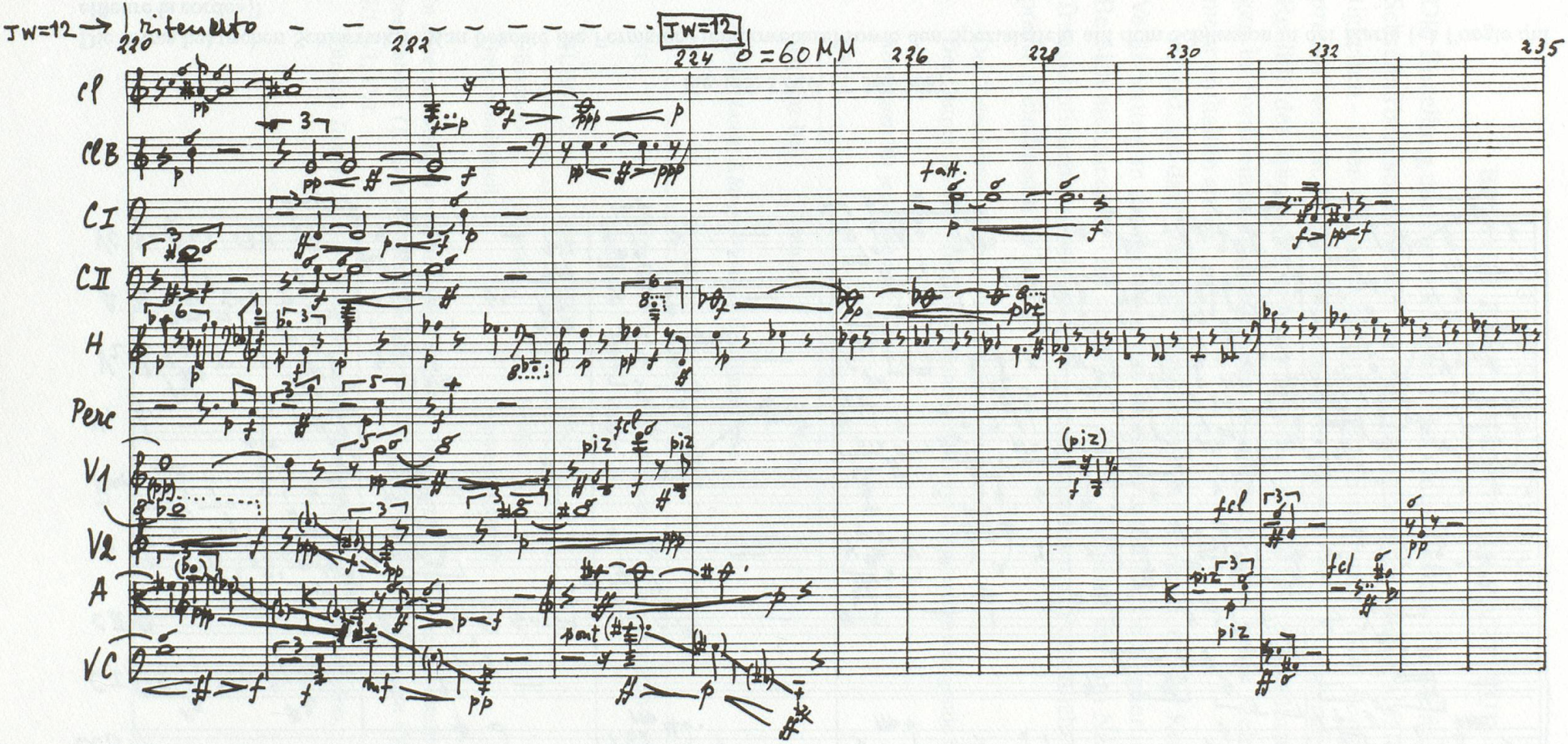


Fig. 134: *ST 10* (T. 220-235)

Hier treten Klangqualitäten auf, die wir als «harmonische Spektren» bezeichnen wollen: Zusammenklänge im polyphonen Gewebe, die durch eine harmonisch orientierte Hörgewohnheit perzipiert werden. Merkwürdig ist zudem die regelmässig absteigende Tonfolge in der Harfe; diese in tiefe Lage absteigende Tonleiter widerspricht vorerst den klanglichen Vorstellungen stochastischer Prozesse.

Fig. 135: *ST 10*, (T. 362-368)

Die etwas hektischen Schlusstakte. Man beachte die Fermaten, Tempowechsel sowie den Spezialeffekt auf dem Schlusston in der Harfe («à l'ongle qui effleure la corde»)!

3.1 FREIHEITSGRADE BEI DER ERSTELLUNG DER PARTITUR

Die Erstellung der Partitur anhand des Output ist nicht nur eine umständliche Schreibarbeit, sondern auch diejenige Tätigkeit, bei welcher allfällige Mehrdeutigkeiten – über- oder unterdeterminierte Strukturen – *vom Komponisten interpretiert* werden. Die Konfrontation der berechneten Klangstrukturen mit der Realität des Spielbaren mündet mittelbar in praktische Aufführungsanweisungen in Form einer ausgearbeiteten Spielpartitur, die keine Mehrdeutigkeiten mehr enthalten sollte.

Allerdings darf man sich von dieser Art interpretierender Korrektur keine Veränderung an der Substanz des Werkes vorstellen; sie ist eher im marginalen Bereich anzusiedeln. Uns scheint sie aber – dies lässt sich am Nachvollzug des Transkriptionsprozesses erörtern – Individuelles und Persönliches in die Komposition einfliessen zu lassen.

Der *Transkriptionsprozess* läuft folgendermassen ab:
Der Output (s. *Anh. 3*) liefert für durchnumerierte Klangereignis folgende Parameterdaten:

Kopfdaten für jede Sequenz:

JW	A	NA
Sequenz-Nr	Dauer	Az Töne

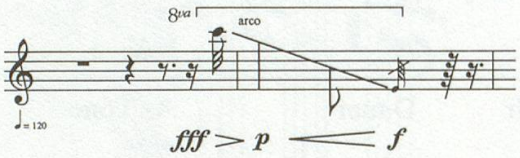
Zeilendaten: *Klangparameter* der Einzeltöne

N	START	CLASS	INSTRM	PITCH
Nr	Einsatz-zeitpunkt	Klangfarben-klasse	Instrumenten-Nr	Tonhöhe
GLISS 1-2-3	DURATION	DYNAM		
Glissando-Geschwindigkeit	Dauer	Nr der Dynamikform		

In unserem Beispiel wird aus dem Output die *Violinstimme* zusammengestellt. Laut Klangfarben-Tabelle (*E-Tabelle*) bedeuten folgende CLASS/INSTRM-Codierungen «Violine»: 5/1; 6/8; 7/1; 8/1; 12/1.

Für den *Ton Nr. 22* ergibt sich die auf S. 492 oben gezeigte Transkription.

Start:	1.94	:		bzw.	
Class/Instrm:	5 1	:	Glissando VI		
Pitch:	74.6	:	c_4 ♂	(♂ = 1/4-Ton höher)	
Gliss 1-3:	(74.6)	:	Vigl 1	Vigl 2	Vigl 3
			71.0 x .80	-25.0 x .80	-71.0
			= +56.8	= -20.0	etc.
			113.0	54.6	
			(zu hoch)	e_2	(zu tief)
Duration:	0.80	:			
Dynam:	62	:	sei z. B. Nr. 62: *fff* > *p* < *ff*		
Resultat:	VI				



Nach diesem Verfahren lasst sich Ton für Ton in das Notensystem übertragen.

Zu beachten ist, dass für die *Glissando-Geschwindigkeiten* drei Varianten zur Verfügung stehen.[41] Um der Logik der Glissando-Verteilungen zu genügen (a_1, a_2, a_3 = Parameter der jeweiligen Verteilungsfunktion), muss man sich für *eine* der drei Spalten entscheiden und danach konsequent nur die Werte dieser Spalte verwenden.[42]

Das folgende Beispiel liefert die Übertragung des Output (s. Anhang) nach der Instrumentation von *Atrées* der ersten zwei Takte:

---

41 Die Bedeutung und Funktion der drei Parameter GLISS 1, 2, 3 geht eindeutig aus dem *Listing* hervor: Statements 423-424, 426 bilden eine Druckanweisung, in welcher (VIGL (I), I = 1,3) je den «GLISS 1», «GLISS 2», «GLISS 3», zugeordnet werden. Statem. 367-372 zeigen, dass VIGL (I) durch ALFA (I) berechnet wird (VIGL (I) = INTF (ALFA(I)*XLAMBA + 0.5), wobei für I = 1, 2, 3, je die (S. 446 erläuterten) Formeln /14/, /15/ und /16/ (entsprechend Statem. 367, 368, 370) zur Verfügung stehen (s. dazu das Blockdiagramm für Teil VII, *Anhang 3*).

42 *Xenakis* im Gespräch mit dem Verf. Wie der Einblick in den Original-Output für *ST 10* erwies, wurde dieser Auflage Folge geleistet.

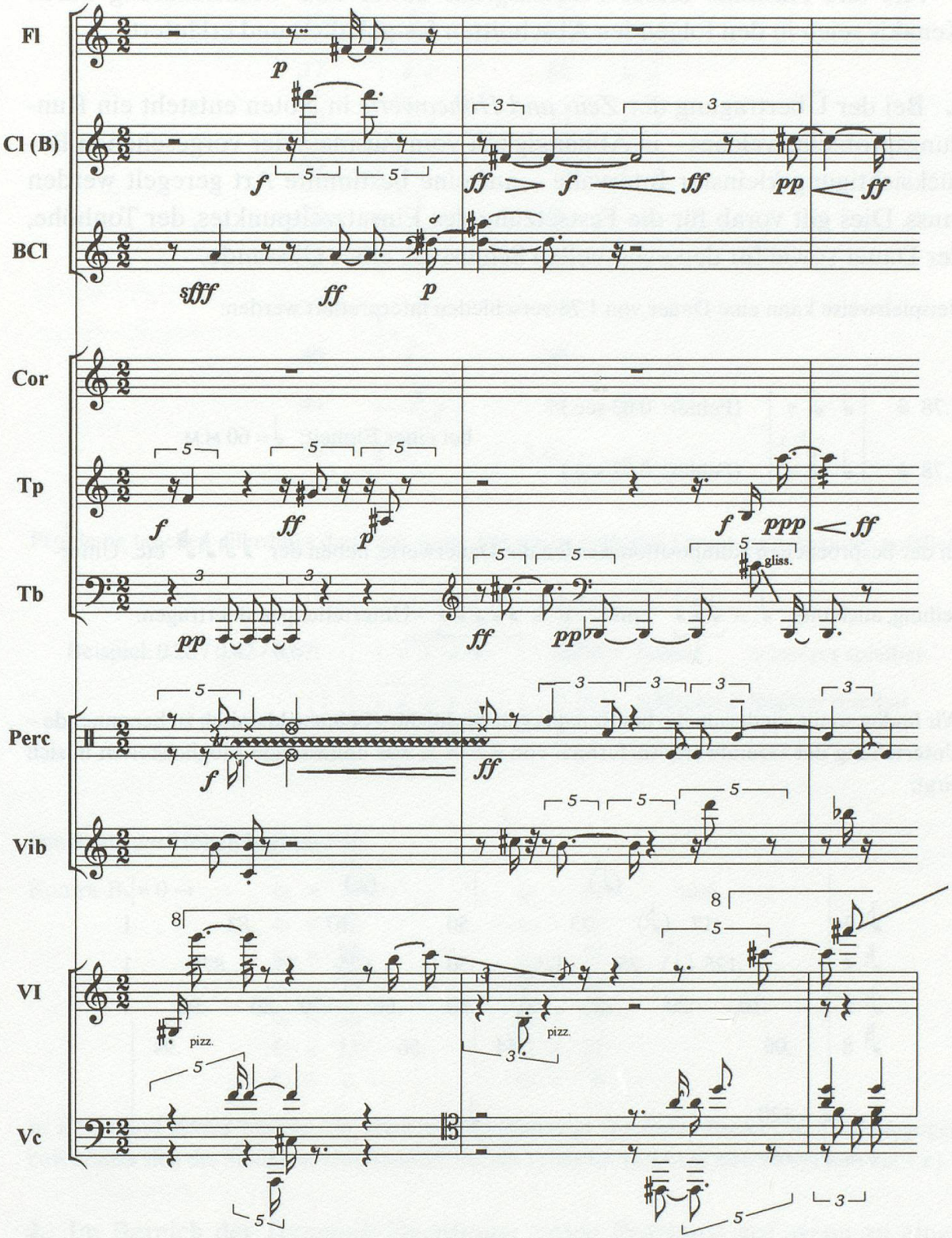


Fig. 136: Transkription gemäss Proberechengang
(s. Anh. 3, S. 634)

Das obige Beispiel offenbart den Spielraum, welcher sich in der Interpretation des numerischen Ausdrucks der Komposition eröffnet; dieser zwingt den Komponisten, eigene Kriterien und Präferenzen zur Anwendung gelangen zu lassen.

Art und Ausmass dieser *Freiheitsgrade* sowie ihre Wahrnehmung durch Xenakis seien in den folgenden Abschnitten festgehalten und erläutert.

1. Bei der Übertragung der *Zeit- und Höhenwerte* in Noten entsteht ein Rundungsproblem, welches – in Abhängigkeit vom Ausmass der vorgesehenen Berücksichtigung kleinster Intervalle – auf eine bestimmte Art geregelt werden muss. Dies gilt vorab für die Festsetzung des Einsatzzeitpunktes, der Tonhöhe, der Dauer sowie für den eventuellen Schlusston eines Glissando.

Beispielsweise kann eine Dauer von 1.78 verschieden interpretiert werden:

1.78 ≙ (Fehler: 0.03 sec.)

1.78 ≙ (Fehler: 0.02 sec.)

bei einer Einheit: 𝅗𝅥 = 60 M.M.

In der besprochenen Komposition werden die Dauerwerte, neben der ♩♪♬♬ etc.-Unterteilung, auch mit 𝅗𝅥 = ♩♩♩ (3) und 𝅗𝅥 = ♩♩♩♩♩ (5) - Unterteilungen übertragen.

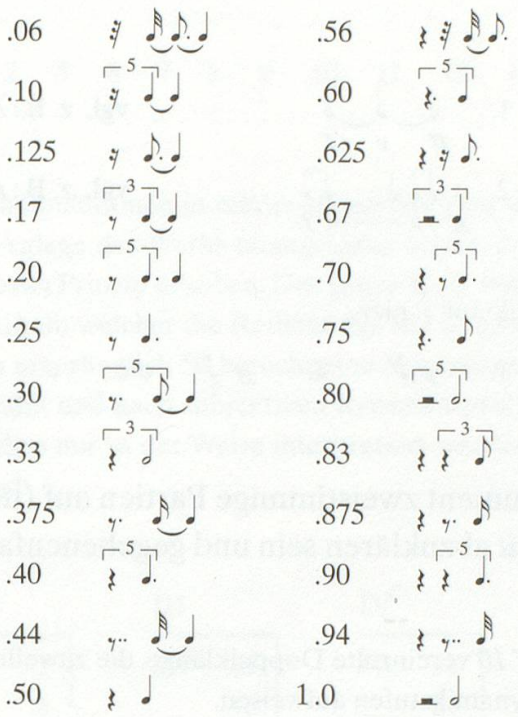
Wir finden somit wiederum die bei Xenakis gebräuchliche – beinahe klassisch zu benennende – Unterteilung der Grundwerte in Termen von 3 / 4 / 5, was umfassende Möglichkeiten in sich birgt:

				(♩³)				(♩³)			
♪ 3			.17	(♪)	.33		.50		.67	.83	1
♬ 4		.125	(♩⁵)	.25	.375		.50	.625	.75	.875	1
♬ 5	.10	.20		.30	.40		.50	.60	.70	.80	.90	1
♬ 8	.06					.44		.56			.94	

♩ = 120

1 = 𝅗𝅥 = 60

Der «grösste Fehler» wird für ein Ereignis = 0.05 (= ♬), was von der Perzeption her vernachlässigt werden kann. Für den *Einsatzzeitpunkt* stehen (im Idealfall) somit folgende Transkriptionsmöglchkeiten zur Verfügung:



Probleme tauchen allerdings dann auf, wenn kurzzeitig mehrere Töne hintereinander anfallen:

		Fehler:		
Beispiel: 0.28 / 0.42 / 0.67:		0.095	besser	schwerer spielbar
		0.14	schlechter	leichter spielbar
		0.04	gut	spielbar?

Die Skala der Höhen beginnt bei:

Kontra-B_b = 0 →	c_4 = 74.0	g_4 = 81	usw.
	c_3 = 62	g_3 = 69	
	c_2 = 50	g_2 = 57	
	c_1 = 38	g_1 = 45	
	c_0 = 26	g_0 = 33	
	C = 13	G = 21	
	Ç = 2	Ǧ = 9	

In *ST 10* und *Atrées* werden 1/4-Töne mitberücksichtigt (kleinster Fehler), in *ST 4* hingegen beschränkt sich die Skala auf Halbtonschritte; die Tonhöhe 43.4 wird also zu e_1 (statt zu: ↑ e).

2. Im Bereich der *Dynamik-Zuordnung* treten Probleme auf, wenn zu einer sehr kurzen Dauer eine mehrgliedrige Dynamikfolge hinzutritt. Dies lässt sich nicht ausschliessen (vom Programm her ist keine Dauer-Dynamik-Abstimmung vorgesehen) und verlangt vom Komponisten einen diesbezüglichen Entscheid, möglicherweise in Berücksichtigung des Kontextes der Stimmenführung.

Tritt beispielsweise Dynamik «Nr. 62» auf eine Ganze Note, gibt es folgende Möglichkeiten zur Umschrift:

62: *ff* > *p* < *f* 1. vgl. z. B.: Atrées T. I/1

2. vgl. z. B.: Atrées T. III/30f

trifft diese Dynamik auf ♪ pizz.:

1. *p* ♪ 2. *ff* ♪ etc.

3. Treten für ein Instrument zweistimmige Partien auf (überlappende Dauern), so wird ihre *Spielbarkeit* abzuklären sein und gegebenenfalls sich eine Korrektur aufdrängen.

In der Tat erscheinen in *ST 10* vereinzelte Doppelklänge, die zuweilen unterschiedliche Klangfarben (pizz./arco) oder Dynamikstufen aufweisen.

Bsp.: T. 15/16, A:

T. 128f, Arpa:

4. Die Spielbarkeit der *Glissandi* ist in Übereinstimmung mit der geforderten Dynamikform zu gestalten. *fff*-Glissandi mit langer Dauer würden durch den häufigen Bogenwechsel (beispielsweise) beeinträchtigt. Xenakis behilft sich in dieser Lage offensichtlich mit dem Tremolo (z. B. *ST 10* T. 65 ff.),

fff

obwohl diese Klangfarbenklasse konzeptuell (oder lediglich numerisch?) in der disponierenden *E-Tabelle* nicht vorgesehen ist.

5. Die Reihenfolge der Berechnung der *Sequenzen* (*JW*) scheint für Xenakis nur bedingt als bindend betrachtet zu werden:

Schon die erste Komposition *ST 10* weist eine leichte Abweichung auf; offenbar kann die Umstellung einer Sequenz, oder gar deren Weglassen, im Ermessen des Komponisten liegen.

ST 10: Reihenfolge der Sequenzen:

JW: 1 3 2 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 .

Während in *ST 10* die Manipulationen in relativ engen Grenzen auftreten und in überwiegendem Masse die formale Anlage des Werks unangetastet lassen, ist in *Atrées* das freie Zusammenspiel der Sequenzen zum Prinzip erhoben: Das ganze Werk wurde in fünf selbständige Teile – Sätze – gegliedert, innerhalb welcher die Reihenfolge der Sequenzen allerdings der Rechenlogik entspricht. Aus den ursprünglich 50 berechneten Sequenzen (laut Eingabe-Werte s. *Anhang*) wurden 25 ausgewählt und nach subjektiven Kriterien zusammengestellt. Die «Doppelnummern» können überdies nur in der Weise interpretiert werden, dass die Ereignisse *zweier* Sequenzen überlagert sind:

Atrées. Anlage der Sätze:

I	II	III	IV	V
JW 1	*JW* 3	*JW* 30	*JW* 38	*JW* 8
2	4	31	39	9
	6	32	40/41	10
	7	33/34	42	11
			43	12
			44	13
				14
				15
				16

Wie eine Anmerkung in der Partitur von *Atrées* überdies vermerkt, darf die Reihenfolge der fünf Sätze beliebig vertauscht werden: «La décision est laissée au chef d'orchestre.»[43]

3.2 AUFFÄLLIGE ZUFÄLLIGKEITEN

Neben der theoretisch begründbaren Feststellung, dass im Transkriptionsprozess eine gewisse Unschärfe auftritt, die vom Komponisten interpretierend aufgehoben wird, stösst man beim gewiss problematischen Versuch, diese «Interpretationen» in der Partitur aufzustöbern, auf weitere Phänomene, die in einem stochastisch strukturierten Werk nicht ohne weiteres erwartet werden. Es handelt sich um relativ extreme Ausprägungen der klanglichen Phänomene, welche beim Hören auffallen (und zugleich die Andersartigkeit dieser Musik gegenüber serieller oder aleatorischer Musik offenbaren). Diese «Auffälligkeiten» lassen sich freilich innerhalb des Rahmens der stochastischen Gesetze erklären und sind durchaus als aus dieser Logik entstanden zu betrachten; dennoch ist ihr Vorhandensein oft überraschend und damit zumindest der Anlass, sie zu erwäh-

43 XEN: *Atrées*, Part.: Vorwort.

nen – es erübrigt sich dabei keineswegs die Frage, wie wahrscheinlich derartige Episoden in der Gesamtmenge aller Möglichkeiten überhaupt zu veranschlagen sind. An solchen Stellen liessen sich Anhaltspunkte dafür gewinnen, ob und wie durch eine heuristische Validierung der Eingangsdaten dem Endprodukt Komposition ein ganz eigener, persönlich bestimmter Wille aufgezwungen wird.

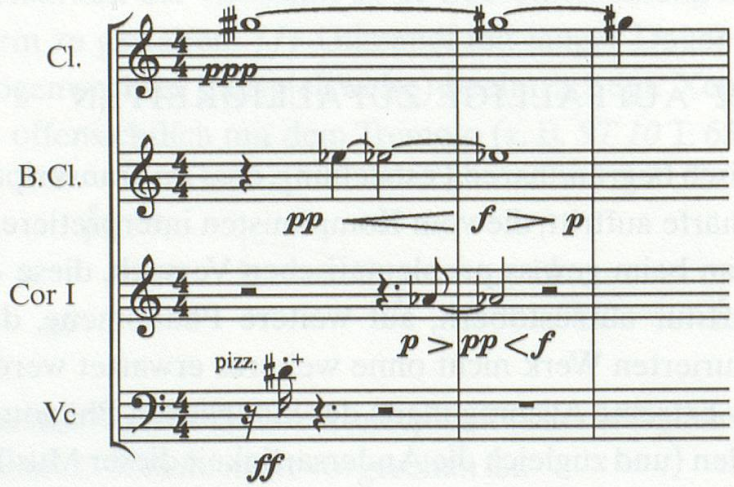
Wir nehmen diese Überlegungen zum Anlass, prägnante klangliche Ereignisse in *ST* Revue passieren zu lassen und auf die im Rahmen des kompositorischen Konzeptes ermöglichte Vielfalt von Formen hinzuweisen.

1. Das Zustandekommen der Tonhöhen der ephemeren Klangereignisse kann bisweilen dazu führen, dass im polyphonen Gefüge *harmonische Spektren* erscheinen. Wesentlich für ihr Auftreten ist allerdings der Grad an Diffenzierung, welcher der Höhenskala zukommt. Bei einer Unterteilung in 1/4-Töne treten harmonische Intervalle naturgemäss weniger in Erscheinung; es wird überdies zu einer Frage der instrumentalen Ausführung, ob harmonische Spektren, welche «auf dem Papier» vorhanden sind, überhaupt wahrgenommen werden können, und umgekehrt. Bei 1/2-töniger Skala werden solche unvermittelt und recht deutlich vernehmbar, wie etwa der Höreindruck von *ST 4 bestätigt.*

Einige Beispiele aus *ST 10* seien angeführt:

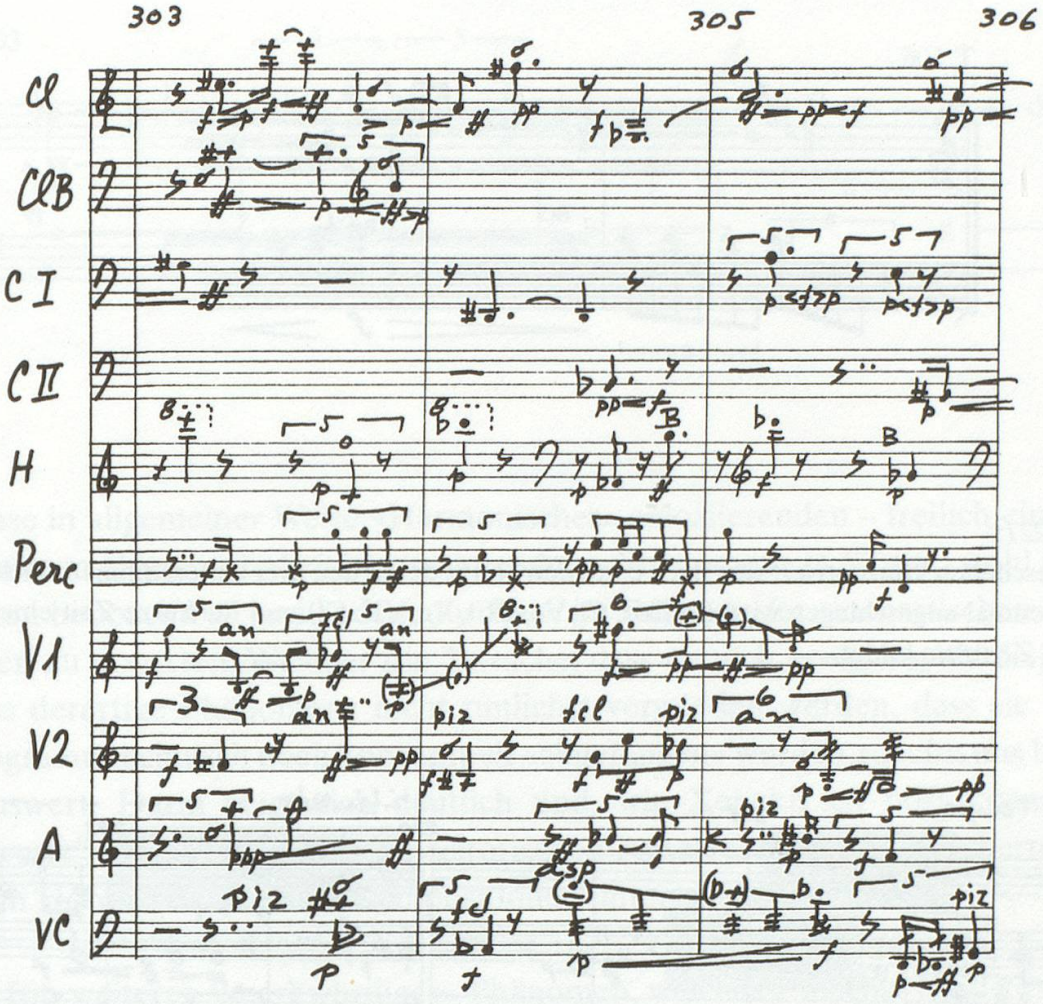
T. 293

entsteht ein Quintklang zwischen CorI und B.Cl, der allerdings infolge des g#+ in Cl getrübt wird:



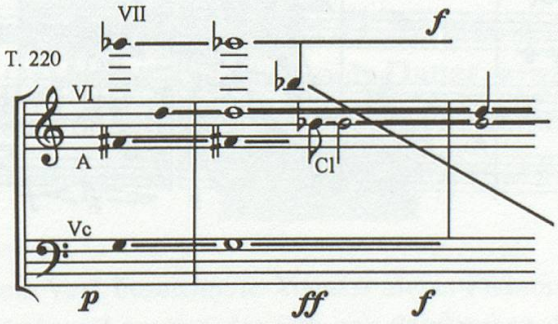
T. 303

Der Quintklang zwischen A und VII ist durch Forte gut hörbar:

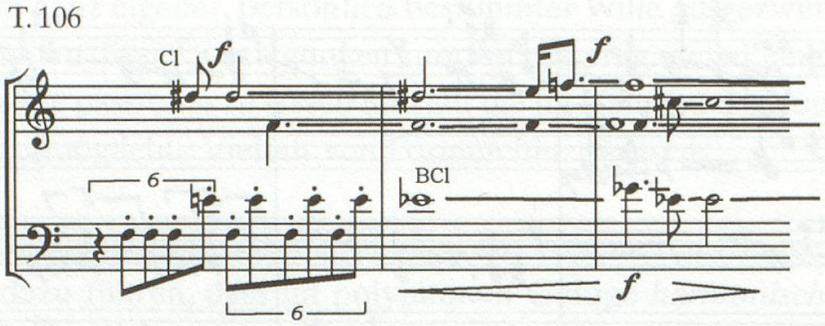


T. 220

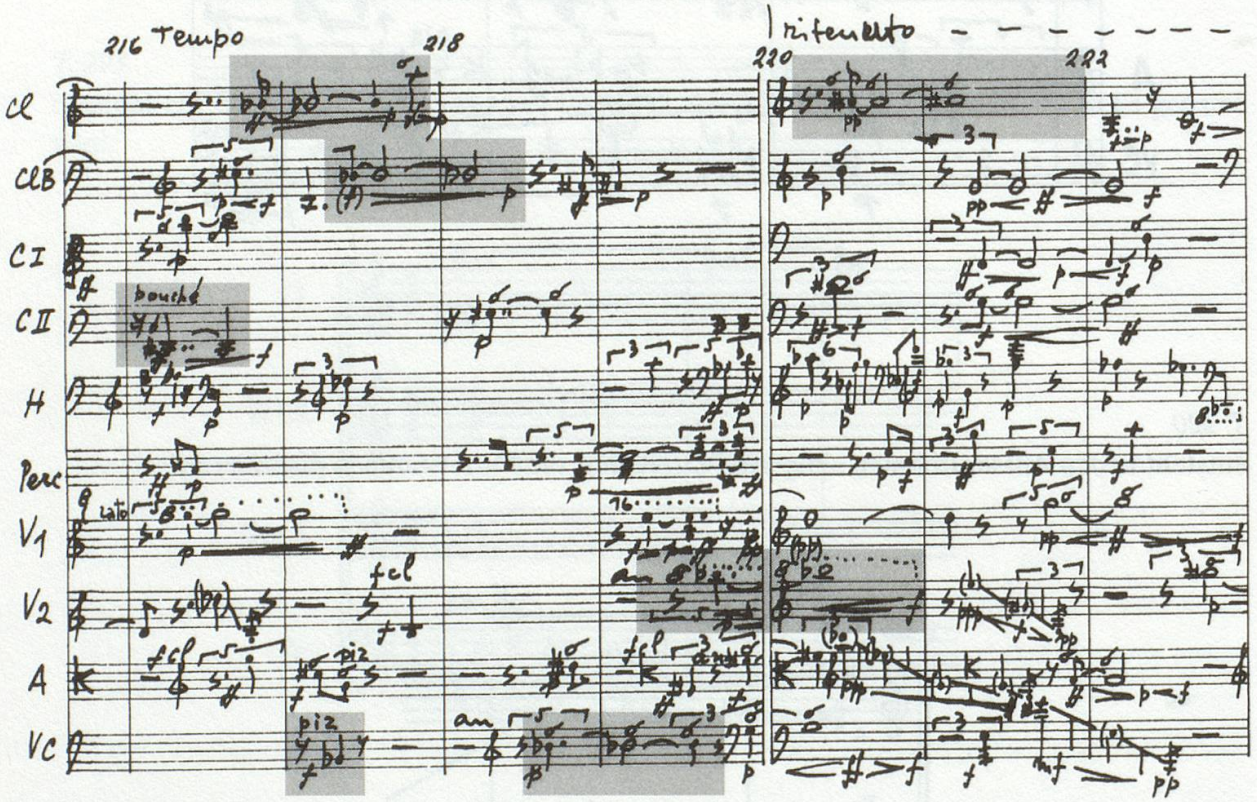
entsteht in den Aussenstimmen ein g-moll-Dreiklang; die Mittelstimmen dissonieren.



T. 106 ff:
Eine «harmonische Assoziation», die durch die herausragende Terzfigur in der B.Cl unterstrichen wird:

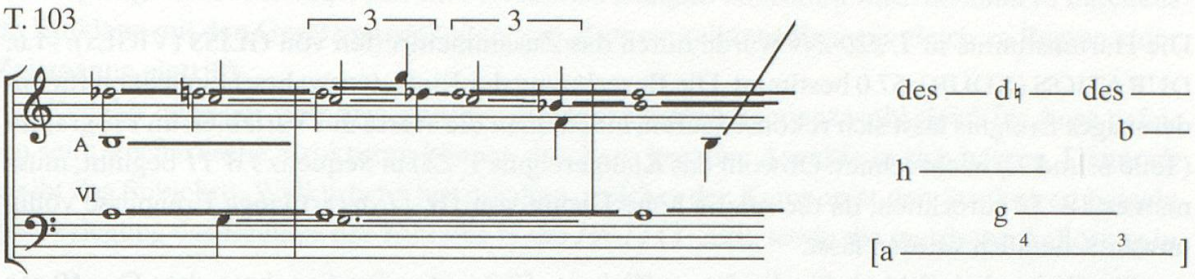


T. 216-221:
Das Geschehen konzentriert sich nach d auf den Ton b, der in den drei Unterstimmen sukzessive siebenmal angeschlagen wird (in Cor, Cl, Vc, BCl, Vc, VII, Cl) und für kurze Zeit eine Art tonales Zentrum bildet.



In der Fassung *ST 4* treten durch die 1/2-Ton-Skala mehr harmonische Spektren auf, die in *ST 10* zumindest stark getrübt erscheinen.

T. 104
überlagern sich (in *ST 4*) zwei Klänge «vorhaltsmässig» (was beim Hören relativ stark hervortritt):



Diese in allgemeiner Weise «Harmonisches» assoziierenden – freilich einer bestimmten Hörgewohnheit innewohnenden – Phänomene in *ST* sind wohl relativ selten beobachtbar und zudem durchaus im Rahmen der stochastischen Strukturen zu erwarten. Weniger die Tatsache, dass sie sich ereignen, als diejenige, dass derartige Phänomene nicht tunlichst vermieden werden, dass sie weder programmtechnisch noch konzeptuell «abgefangen» werden, scheint uns bemerkenswert. Darin zeigt sich deutlich und, wie Xenakis ex post konzediert, bewusst[44] eine Folge des kompositorischen Ansatzes, der sich, gleichermassen beim Hören, von seriellen Kompositionen unterscheidet.

2. Ein weiteres, «merkwürdiges» Phänomen, welches zunächst höchst überraschend wirkt, erscheint in Sequenz *JW* = 11, *T. 220* und tritt ab T. 224 solistisch hervor: Über 29 T. hinweg erstreckt sich eine regelmässig in Halbtönen und metrisch in Halben absteigende Tonfolge in der *Harfe*. Wie ist diese etwas hanebüchene Tonleiter mit stochastischer Musik in Verbindung zu bringen? Recht gut, wie es sich nachrechnen lässt: Diese Erscheinung kann vom mathematischen Programm her wohl begründet werden.

Dass jedoch innerhalb der Variationsbreite dieser Sequenz genau dieses Glissando dem mathematischen Roulette des *ST*-Programms entfallen würde – mit der erforderlichen Datenstruktur für lange Dauer sowie genau dieser Gleitgeschwindigkeit –, muss anbetrachts der überaus asymmetrischen Konstellation der klanglichen Elemente zunächst als reichlich seltenes Ereignis taxiert werden.

44 Im Gespräch mit dem Verf. bezeichnete *Xenakis* dieses Phänomen als Konsequenz seines globalen, massenmässigen Ansatzes, der sich von demjenigen der Seriellen Musik gerade dadurch unterscheide, dass nicht die Vermeidung tonaler oder gar harmonikaler Anklänge à tout prix im Vordergrund stehe.

Der Verdacht, der Komponist habe versucht, durch eine ausgeklügelte Version der Eingangsdaten derartige Erscheinungen zu generieren, ist dennoch unrichtig. Andererseits lässt sich das Vergnügen des Komponisten ob eines solchen Fundes in den Auswertungen nachempfinden.[45]

Die Harfenstimme in *T. 220-249* würde durch das Zusammentreffen von GLISS (VIGLx): –1.0; DURATION (XDUR): 57.0 bestimmt. Die Berechnung der Eintretenswahrscheinlichkeit für ein derartiges Ereignis lässt sich rekonstruieren, indem man die Werte der Variablen im Programm (Teile 6. und 7.) nachrechnet. Obwohl das Klangereignis T. 220 in Sequenz *JW 11* beginnt, muss man es *JW 12* zurechnen, da die relativ hohe Dichte von *JW 11* derart lange Ereignisse völlig unwahrscheinlich werden lässt.

Die Wahrscheinlichkeit für die *Dauer* P{x}, x = 57.0, unter der Annahme, dass G = 60 sec (bzw. = 120, alternativ) – das heisst, der «längste Atemzug» wird sehr günstig vorausgesetzt –, ergibt folgende Variablen-Konstellation:

JW 11 $c_{a_i} = 3.7$ $q_{r_i} = .10$ $P\{x; x = \tau + m = 57\}$, s. Form. /20/, /22/, /23/

Σq_r	A_{max}	V3	p_n	z_{max}	G	r_0	z	z'	s	m	τ	λ	Θ	P{x}
.48	2.083	0.11	1.0	18.94	60	20.40	2.70	20.28	5.07	10.11	46.86	6.54	.9999	0
					120			40.52	10.14	20.28	36.72	2.56	.9998	2‰

sehr unwahrscheinlich!

JW 12 $c_{a_i} = 0.37$ $q_{r_i} = .10$

Σq_r	A_{max}	V3	p_n	z_{max}	G	r_0	z	z'	s	m	τ	λ	Θ	P{x}
.48	2.083	0.11	1.0	18.94	60	20.40	27.03	67.26	16.81	33.63	23.37	0.98	.834	16 %
					120				33.63	67.26	-10.00	-0.21	.235	76 %

Bei einem G = 60 wäre in *JW 12* die Wahrscheinlichkeit für eine Tondauer von mindestens 57 sec. 16 Prozent (~1:6), somit zu erwarten.

Die Wahrscheinlichkeit für die *Gleitgeschwindigkeit* v = –1.0.
JW 12 $a : s\sqrt{2}$, $v = a \cdot \lambda$, s. Form. /13/, /14/, /15/, /16/

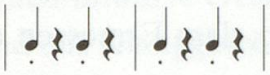
V3	c_{a_i}	R	a1	a2	a3	s1	s…→	λ	Θ	P{j}
0.11	0.37	7.2	23.69	17.7 / 53.2	47.20	16.76	…	.043	.058	~5 %

45 Vgl. Barraud (1981: 42): «Il reste ainsi au compositeur, qui a ainsi économisé des dizaines d'années de travail, à trier parmis les œuvres produites, à selectionner celles qui lui semblent les plus intéressantes, voire à les arranger un peu. Ainsi, pour donner un simple exemple, un glissando que l'ordinateur prévoit de faire exécuter par un instrument discret tel que la harpe, se transforme en une montée ou une descente chromatique, qui peut d'ailleurs être du plus bel effet.»

Die Wahrscheinlichkeit für die geforderte Glissando-Geschwindigkeit ist mit *fünf Prozent* (1:20) etwas gering, aber das Ereignis ist keineswegs auszuschliessen.

Das *Gesamt-Phänomen* (Dauer und Geschwindigkeit gleichzeitig) muss als relativ unwahrscheinlich eingestuft werden. Nun liegt es jedoch in der Natur von Zufallsprozessen, dass nie vorhergesagt werden kann, wann ein bestimmtes Ereignis eintreffen wird. So kann es durchaus im Einklang mit den Gesetzmässigkeiten sein, dass ein seltenes Ereignis gleich zu Beginn einer Zeitspanne eintrifft.

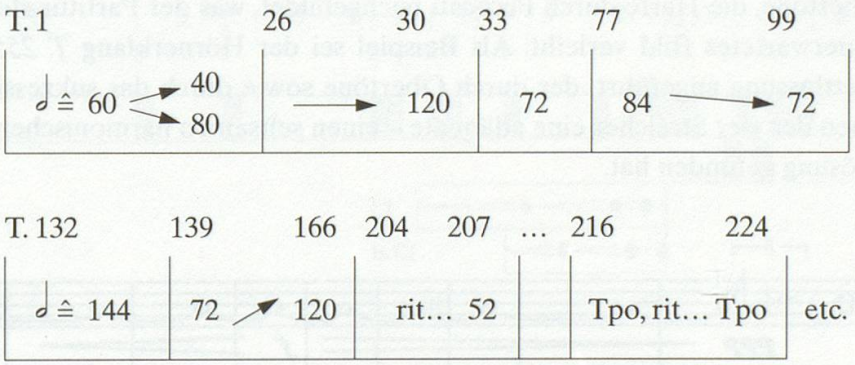
Xenakis muss der Reiz dieser aus der Reihe tanzenden Sequenz wohl gleich ins Auge gefallen sein; stochastische Strukturen können durchaus kreative Aspekte in sich bergen. Dennoch bleibt das Subjektiv-Willkürliche festzuhalten, welches der Komponist den Strukturen beigab: die Verlegung des Beginns der Tonreihe in die *JW 11* (T. 220), sowie die metrische Auflösung in



3. Das *Tempo*, welches zwar grundsätzlich demjenigen zeitlichen Ablauf folgt, der vom Programm erstellt wurde, wird von Xenakis in den *ST*-Œuvres in flexibler Weise vorgeschrieben. Das Grundtempo beträgt in der Regel 𝅗𝅥 = 60 M.M.; nach dieser Regel erfolgt die Umschrift vom Output.

In *ST 10*, beispielsweise, kommt allerdings ein ständiger Tempowechsel zum Tragen, welcher den zeitlichen Prämissen der stochastischen Strukturen kaum mehr entspricht. Es scheinen hier in grossem Masse Eingriffe zulässig zu sein, deren subjektive Kriterien aus dem fertiggestellten Klangbild bezogen werden dürften.

Beispiel: ST 10



Auch in *ST 4* ist das Tempo als modifizierbar bezeichnet, «𝅗𝅥 ≅ 60 en moyenne».

Der Ausarbeitung der Tempoverläufe durch Xenakis kommt lediglich die Rolle zu, zur flexiblen Gestaltung des Tempos aufzufordern, wie in *ST 10* ausdrücklich vermerkt wird: «… les différents tempi ne sont pas impératifs. Ils peuvent être modifiés au gré du chef sans trop d'écart cependant.»[46]

46 S. *ST 10*, Part. S. 2, Fussnote.

4. In der Instrumentierung werden zum Teil *besondere Spieltechniken* berücksichtigt, die in der Instrumentalmusik des 20. Jahrhundets mittlerweile gebräuchlich sind. In den Streichern finden sich etwa:

asp	arco sul ponticello
	arco sul ponticello con tremolo
an	arco normale
fcl	frappé col legno
piz	Pizzicato.

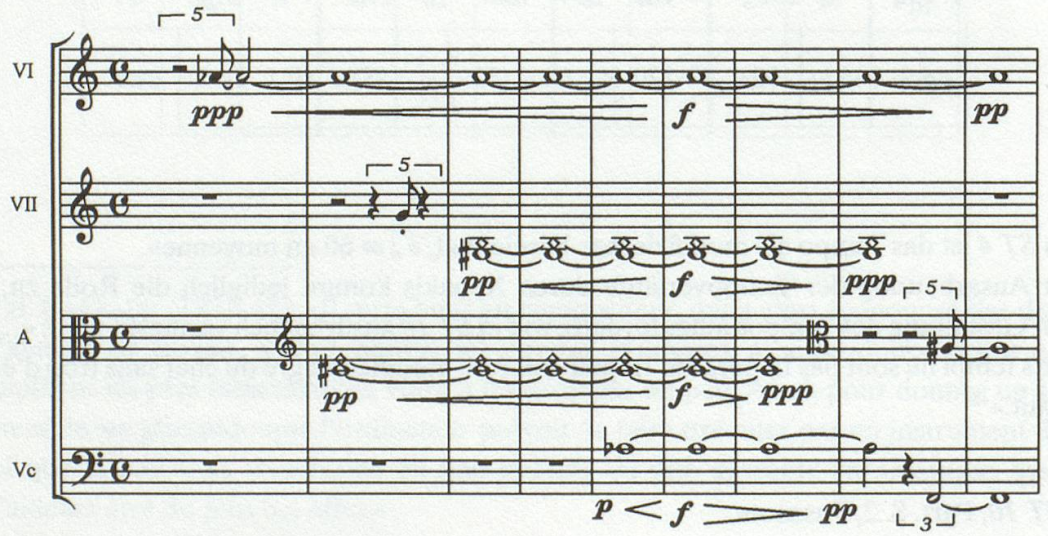
Sofern ihre Verwendung nicht durch eine Klangfarbenklasse r definiert ist, unterliegt ihre Wahl, etwa *asp* statt *an* in der Klasse *Tremolo*, dem Ermessen des Komponisten.

In der Harfe treten ebenfalls drei ungewöhnliche Anschlagsarten auf:

A	pincer près de la table d'harmonie
B	son étouffé (staccato)
D	avec l'ongle: effleurer la vibration.

Die starken klanglichen Kontraste, die mit ihrer Hilfe geschaffen werden können, unterliegen ebenfalls der subjektiven Wahl des Komponisten.

Besonders vielfältig sind die angesprochenen Spieltechniken – einzeln, wie auch in Verbindung zueinander – in *ST 4*, der Streichquartettfassung von *ST 10*. In diesem Werk, in welchem Xenakis genauestens versuchte, die Klangfarben der weggefallenen Instrumente zu substituieren, führt die Verwendung verfremdender Anschlagsarten zu einer teilweisen Re-Komposition der ursprünglich vorgegebenen (und programmierten) Klangfarben. So werden Pekussions-Instrumente durch Klopfen auf Boden oder Zarge, Blasinstrumente durch Oktavierung und hinzugefügte Obertöne, die Harfe durch Pizzicati nachgebildet, was der Partitur stellenweise ein neues und unerwartetes Bild verleiht. Als Beispiel sei der Hörnerklang *T. 255* ff. in seiner Streichquartettfassung angeführt, der durch Obertöne sowie durch das sukzessive Einsetzen und Verlöschen der vier Streicher eine adäquate – einen seltsamen harmonischen Pol im Werk bildende – Lösung gefunden hat.



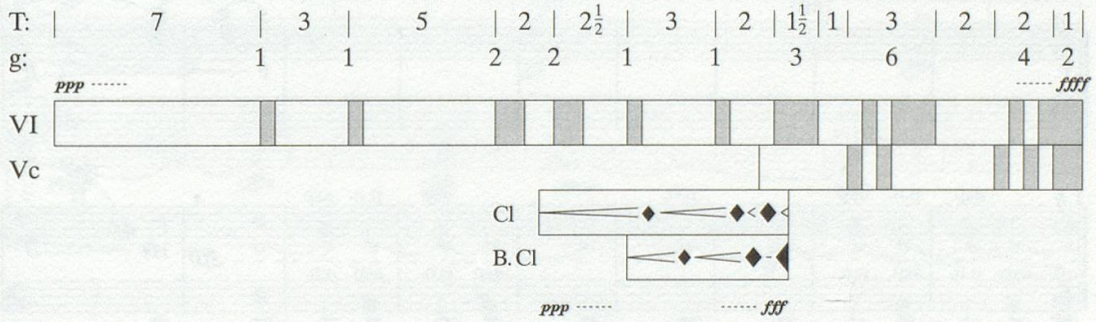
Gerade in *ST 4* manifestiert sich ein Bemühen Xenakis' um feine Nuancierung der Farben zueinander – ein Unterfangen, welches er nur seinem subjektiven Empfinden anvertrauen wollte. Die Rolle des freien Entscheids in der klanglichen Ausarbeitung und Fixierung darf demnach nicht zu gering eingestuft werden. Dennoch ist diese Ausarbeitung letztlich nichts anderes als ein Versuch, die prädeterminierten Klangfarben des Konzepts – entsprechend ihrer Kodifizierung in der *E-Tabelle* – zu bewahren.

In *Atrées*, dem Werk, in welchem sich der Komponist ausdrücklich ein grösseres Mass an Freiheit gegenüber dem Programm eingeräumt hat, tritt die persönlich-intuitive Gestaltung stellenweise in den Vordergrund und prägt entscheidend das Klanggeschehen.[47]

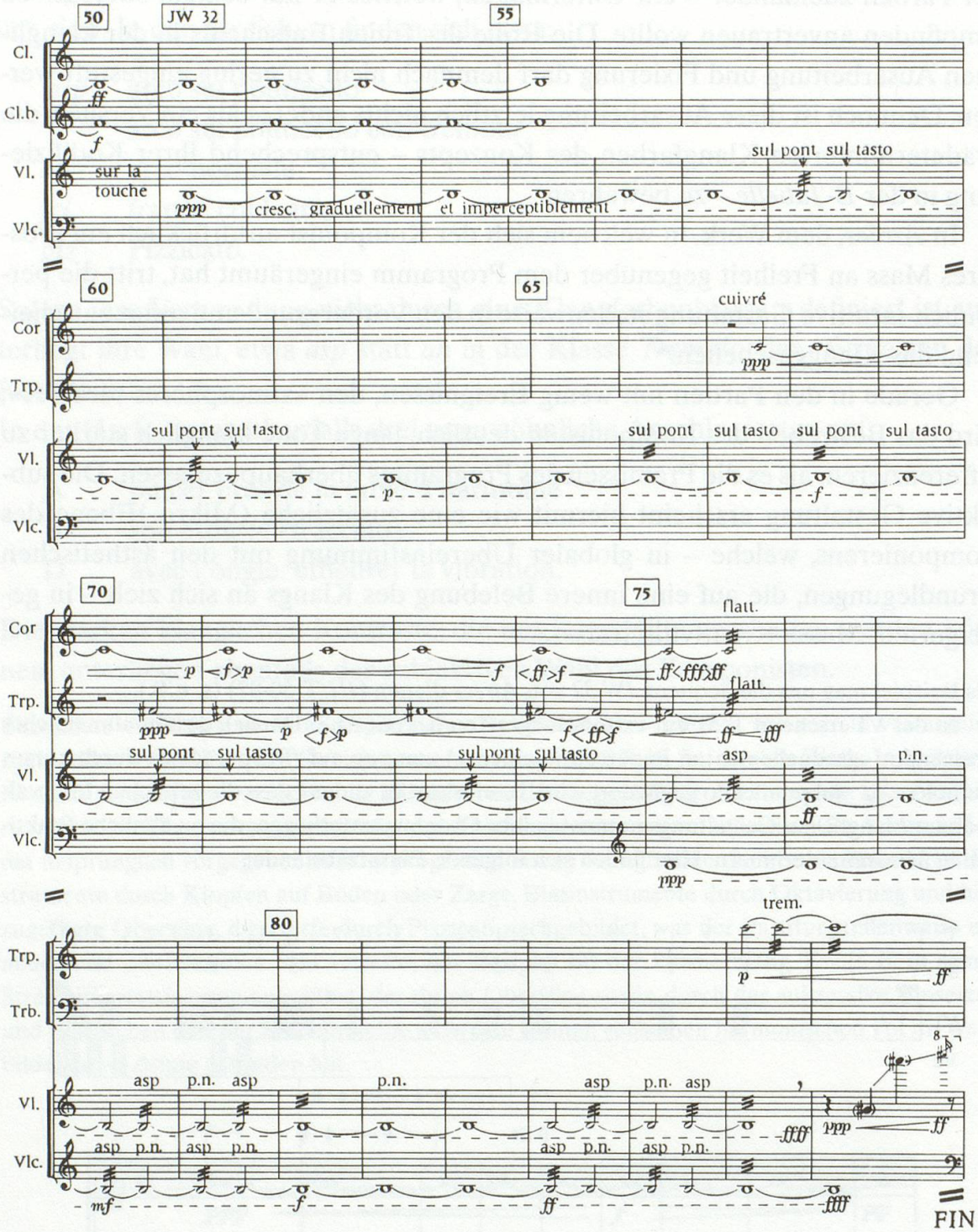
Gerade in den Partien mit wenig Ereignissen, den «atmosphères rarifiées», wird das Bestreben des Komponisten deutlich, lange Töne klanglich stärker zu differenzieren, als es die Prämissen des Programms überhaupt zulassen. Die subjektive Gestaltung erscheint hiermit wie eine zusätzliche (Mikro-)Ebene des Komponierens, welche – in globaler Übereinstimmung mit den ästhetischen Grundlegungen, die auf eine innere Belebung des Klangs an sich zielt – in gesteigertem Masse Kreativität freisetzt.

Als Beispiel mag uns die Sequenz *JW 32* von *Atrées* dienen (*III*: T. 50-87) (s. n. S.).

In der VI erscheint T. 51 ein extrem langer Ton h_0 (mit 35 T. Dauer), dessen allmähliches Crescendo («graduellement et imperceptiblement») von *ppp* auf *ffff* sporadisch durch kurzes Tremolo sul ponticello gegliedert wird. Interessant ist zudem, dass die zeitlichen Intervalle dieser klanglichen Gestaltungsmomente einer Ordnung unterliegen, die an ähnliche Praktiken in *Metastaseis* erinnern. Hier finden sich folgende Einsatzabstände:



47 S. Fn. 39 zu den «licences introduites». Die Gesamtform von *Atrées* wird von *Xenakis* (s. S. 497) als variabel betrachtet (laut Vorwort zur Partitur): «L'ordre des 5 parties peut être modifié. Par exemple III V IV I II ou I III IV II V etc. La décision est laissée au chef d'orchestre. Avec ou sans arrêt entre les parties, durée environ 15'.» – Vgl. MATOSSIAN (1981: 195/1986:160): «Il utilisa à soixante-quinze pour cent le matériel informatique, et compose le reste lui-même.» Dies dürfte allerdings auf einem Missverständnis beruhen: *Xenakis* verwendete vermutlich nur 75 Prozent (?) des Output-Materials für die Komposition (25 Sequenzen von 50; s. dazu S. 470). Überdies komponierte er konzeptuelle «Freiräume» *innerhalb* dieses Materials nach eigenem Gusto aus – wie im folgenden gezeigt wird (s. Text).



Atrées III: T. 50-87

Als zusätzliche Klangverstärkung tritt in T. 75 unmerklich das Vc auf demselben Ton ein, welches mit zeitlich versetzten Tremoli die Klangsteigerung bis zum 4 *f* verdichten.

Eine analoge, frei entworfene Behandlung erfahren Cor und Tp, deren lange Liegetöne mit <*f*> und <*ff*>-Stössen – bedrohlichen Signalen gleich – klangliche Akzente setzen (T. 70-76). Die Elaboration der Zusammenklänge scheint überdies ebenfalls subjektiven Kriterien zu gehorchen. So ist anzunehmen, dass diejenigen Klänge, die mit gleicher oder analoger dynamischer

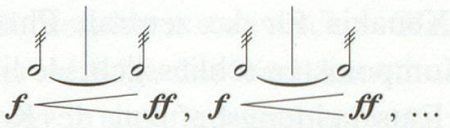
Entwicklung zeitgleich enden, einem einzigen stochastischen Ereignis zuzurechnen sind; paarweise verstärkte und klanglich erweiterte Haltetöne sind somit als deren Resultat zu betrachten:

T. 49 ff.: *Cl/B.Cl*: g_0, f_1; T. 70 ff.: *Cor/Tp*: c_1, $f\#_1$; *VI/Vc*: unisono.

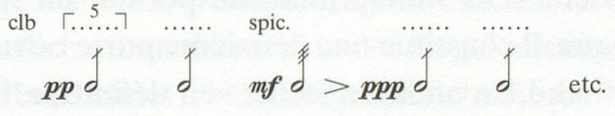
Auf diese Weise stehen Klangreichtum harmonischer Art (durch Tonhöhendifferenzierung) und «obertöniger» Art (durch variierte Spieltechniken) im Dienste von Xenakis' Bemühen, musikalische Abläufe mit «sons riches» zu beleben.

Ähnliche Manipulationen finden sich in der Sequenz *JW 40/41* (*IV*: T. 22-53):

– In der Perkussion wird ein 6 T. andauernder Wirbel (Trem.) auf dem *Tom 2* rhytmisch gegliedert:

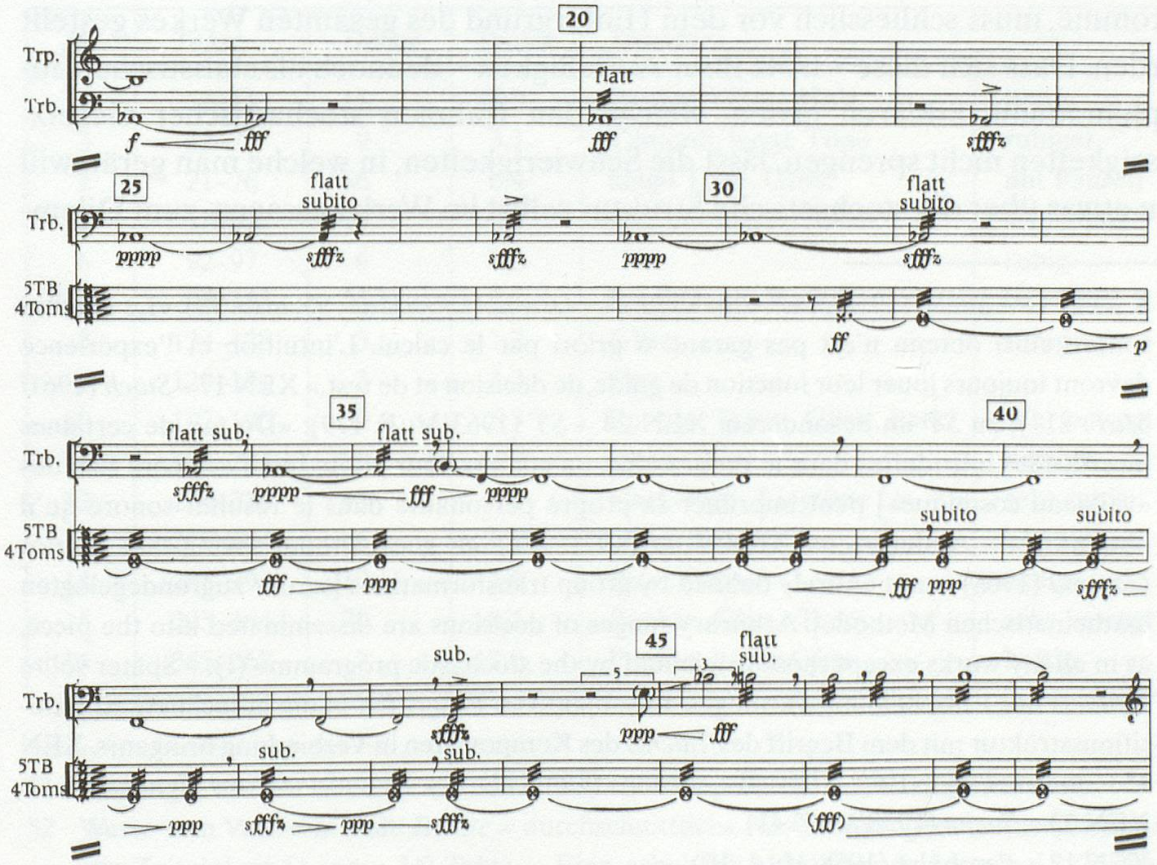


– Ähnlich die col legno battuto-Stelle in *VI*, die durch spiccato klanglich verändert wird (Obertonreichtum!):



– Beschleunigtes Vibrato gestaltet einen langen Ton in der Tb:
sans vib. – lent – accel. – molto – rallentir – nul
(insgesamt 10 T.; vgl. *ST 10* T. 205 ff.).

Als dritte Stelle für frei klangliche Gestaltung sei der Beginn des V. Satzes angeführt (*JW 8*; *V*: T. 1-61); interessant wiederum die *Tb*-Stimme sowie *Temple-Block 1*:



Wie wir gesehen haben, können die meisten der «auffälligen Zufälligkeiten» als genuine Phänomene der mathematischen Problemstellung interpretiert werden. All diesen Erscheinungen ist zu konzedieren, dass sie aus den konzeptuellen Prämissen der Komposition entspringen; sie bilden gleichsam ephemere Bestandteile und Episoden der klanglichen Vision und sind gesamthaft im Rahmen der stochastischen Gesetze verteilt.

Dass dem «Auffälligen» etwas nachgeholfen wird, dass also «interessante» Daten bevorzugt werden, ist konform mit der Forderung nach formaler *Asymmetrie*. Dass die Instrumentierung eine subtile, zuweilen manipulierende Behandlung erfährt, liegt in der Präokkupation Xenakis' für das zentrale Phänomen *Klang* begründet. Die Subjektivität des Komponisten schliesslich, «le libre arbitre du compositeur»,[48] die letztinstanzliche Entscheidungsbefugnis des Komponisten über die formale Materie, ist auf das Vorhandensein von *Freiheitsgraden* im Formalisierten angewiesen und befördert sie erst zum Kunstwerk. Xenakis erklärt dies folgendermassen: «Cet indéterminisme permet un libre arbitre au gré de l'inspiration artistique. Il constitue une deuxième porte ouverte au subjectivisme du compositeur»,[49] und, an anderer Stelle: «en définitive, l'instinct et le choix subjectif sont les seuls garants de la valeur d'une œuvre».[50] Wir sollten diese drei Aspekte fortan im Auge behalten.

3.3 DIE STOCHASTISCHE STRUKTUR IM WERK

Die Frage, welche Bedeutung den oben beschriebenen Phänomenen im Werk zukomme, muss schliesslich vor dem Hintergrund des gesamten Werkes gestellt werden. Dass sich diese – trotz ihrer Auffälligkeit – dennoch als statistische Einzelphänomene erklären lassen, welche den Rahmen stochastischer Gesetzmässigkeiten nicht sprengen, lässt die Schwierigkeiten, in welche man gerät, will man etwas über die stochastische Struktur selbst im Werk aussagen, zum Dilem-

48 S. XEN 13 – *Suche* (1958/*MuF*: 41), XEN 14 – *Grund* (1960/*MuF*: 95, insb. 98): «Le résultat sonore ainsi obtenu n'est pas garanti a priori par le calcul. L'intuition et l'expérience devront toujours jouer leur fonction de guide, de décision et de test.» XEN 17 – *Stoch* (1961/*MuF*: 211); zu *ST* im besonderen: XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 179): «Du fait de certaines incertitudes introduites dans le programme, un compositeur pilote [man erinnere sich des «vaisseau cosmique»] peut imprimer sa propre personalité dans le résultat sonore qu'il obtiendra.» – Andererseits: XEN: *FoM* (1971: 238): «It goes without saying that *Nomos Gamma* (1968) is not entirely defined by group transformations [sc. der zugrundegelegten mathematischen Methode]. Arbitrary ranges of decisions are disseminated into the piece, as in all my works except those originated by the stochastic programm» (!). – Später sollte *Xenakis* das Entscheidungsvermögen zu subjektiven Eingriffen in die berechnete Kompositionsstruktur mit dem Begriff des *Talents* des Komponisten in Verbindung bringen; s. XEN 45 – *univers* (1977: 198), XEN 48 – *chemins* (1981: 13).

49 XEN 13 – *Suche* (1958/*MuF*: 41).

50 XEN 12 – *Paraboles* (1958/*MuA*: 19).

ma werden: Einerseits sind Phänomene dieser Art zweifellos als aus dem Klangduktus des gesamten Werks herausragend zu bezeichnen – bildet doch gerade deren hervorragende Hörbarkeit das Kriterium ihrer Erörterung. Andererseits stellen sie lediglich regelkonforme Abweichungen vom Mittelmass dar, was – unter Annahme des bei statistischen Verteilungen gültigen Gesetzes der Grossen Zahl – im formalen Kontext des gesamten Werks von untergeordneter Bedeutung wäre und von den ästhetischen Prämissen her eine durchaus gewollte Episode bilden mag.

Die formalen Dimensionen von *ST 10* entsprechen gesamthaft durchaus den Erfordernissen statistischer Gleichverteilung. Die fünfzehn Sequenzen, die in ihrer Abfolge das Werk konstituieren, werden durch Parameter geformt, deren Werte in der Streuung um die Mittelwerte denjenigen nahezu gleich kommen,die bei zufälliger Gleichverteilung theoretisch ewartet werden.

Primär zeigt sich dies in der *Verteilung der Sequenzdauern* in Relation zu den zugeordneten *Dichten*: Beginn und Ende einer Sequenz sind im Partiturbild deutlich erkennbar und in der Regel mit einem «Klimawechsel» verbunden (mit *JW* bezeichnet).[51] Dies unterstreicht die *formbildende Bedeutung* der Sequenz in ihrer Abfolge, als zeitlicher Ordnung von «nuages de sons». In programmtechnischer Hinsicht entspricht dies einer Verarbeitungseinheit im Rechenprozess, als Zeitraum mit konstanter Dichte der Ereignisse.

Die folgende Aufstellung aller Sequenzen gibt darüber Aufschluss:

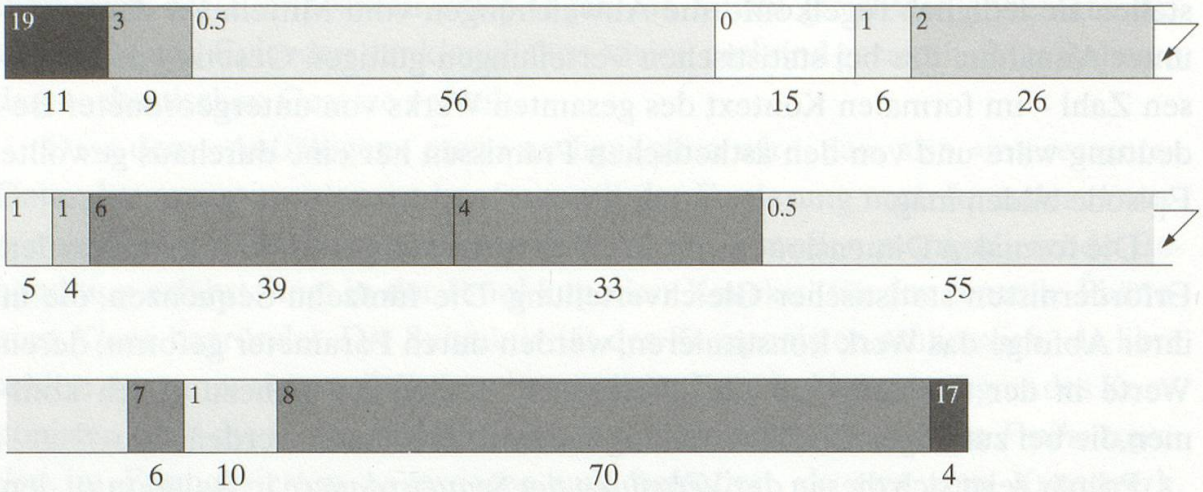
ST 10: Verteilung der Sequenzdauern und -dichten:[52]

JW	*Takte*	*Dauer*	*Dichte*	*Struktur*	
1	1–11	11	19.0	Punkte, Gliss., Holz	heftig
3	12–20	9	3.1	Tempoli, lange Töne	ruhiger
2	21–76	56	0.4	lange Töne, Gliss.	mit Pausen
5	77–91	15	0.2	Harfenostinato, Gliss.	sehr ruhig
6	92–97	6	0.8		ruhig
7	98–123	26	2.1	Liegklänge, Harfe	bewegter
8	124–128	5	1.2	Gliss.	ruhig
9	129–131	3	1.3	Pizz.	
10	132–190	59	5.5	Punkte, Trem., Gliss., Perk.	sehr bewegt
11	191–223	33	3.7	mehr Gliss.	bewegt
12	224–278	55	0.4	Harf.-Pizz., Liegtöne	sehr ruhig
13	279–284	6	6.8	Gliss., Bläser	bewegter
14	285–294	10	1.0	Pizz., Gliss.	ruhig
15	295–364	70	8.1	Punkte, Gliss., Trem.	sehr bewegt
16	365–368	3	17.0	Punkte, kurze Gliss.	heftig

51 Abhängig von der oben (S. 453) diskutierten «Temperatur» des Klanggemisches.

52 Werte vom Verf. ermittelt: *Dichte* = durchschnittliche Anzahl Klangereignisse (Einzeltöne) pro Zeiteinheit (1 sec = 1/2 Takt). – Eine erheblich abweichende Liste bei /227/ Sward

Schematische Darstellung von *ST 10* als Zeitdiagramm mit Angaben von Dichtegraden:



Dass, wie aus der vorstehenden Graphik ersichtlich ist, sowohl die Verteilung der Dichten als auch diejenige der Sequenzdauern einzeln betrachtet wie in gegenseitiger Abhängigkeit keinerlei Tendenzen (Korrelationen) aufweisen, lässt sich mit statistischen Erhebungen nachweisen.[53]

Der «Klimawechsel» von einer Sequenz zur anderen ist zudem nicht nur als Änderung der Dichte der klanglichen Ereignisse wahrnehmbar, sondern auch als qualitative Änderung der Instrumentierung; in Abhängigkeit von der mittleren Dichte einer Sequenz vollzieht sich jedesmal ein Wechsel der dominierenden Klangfarben.

Der *E-Tabelle*, als Eingabe-Matrix der Klangfarben-Erwartungswerte, kommt die Aufgabe zu, die von der mittleren Dichte abhängige Instrumentierung dem Programm vorzugeben. Durch den stochastischen Rechenprozess bedingt (Zufallszahlen, überdies durch eine kleine Zahl von Probanten), wird das Resultat um einiges von den Eingangsdaten abweichen – nämlich um den Unsicherheitsfaktor der statistischen Erwartung. Es erweist sich aber – geht man der Sache analytisch auf den Grund –, dass, sowohl in *ST 10* wie auch in *Atrées,* die intendierte Klangfarben-Charakteristik mit der reellen stets eine gemeinsame Tendenz bewahrt, zuweilen gar mit ihr übereinkommt (und somit lediglich mit dem statistischen Fehler behaftet ist).

(1981: 335) soll auf den Ereignisdichten von *ST 4* beruhen (?) und wird nichtsdestoweniger für Dichteuntersuchungen an *ST 10* als geeignet betrachtet; s. (ib.: 465 ff.).

53 Die Daten der Dauern und der Dichten der ephemeren Tonereignisse können wahlweise als abhängige oder unabhängige Variablen einer Korrelationsanalyse unterworfen werden, mit dem Resultat, dass eine relative Nähe zu einer Zufallsverteilung (Variationskoeffizient und Entropie) sowie die praktische Nichtexistenz einer Korrelation postuliert werden kann. Auf die Wiedergabe der Berechnungen wird hier verzichtet.

Methodisch lassen sich der Ist- und Soll-Wert der prozentualen Häufigkeit einer Klangfarben-Klasse (Soll/Ist-Vergleich) vergleichen. Die Ist-Zahlen erhält man aus der Partitur, die Soll-Zahlen aus der *E-Tabelle*, aufgrund der Dichte c_{a_i}.

Für *JW 12* erhält man folgende Häufigkeiten (s. Tafel):

ST 10: *JW 12*: Klangfarbenhäufigkeiten S/I:

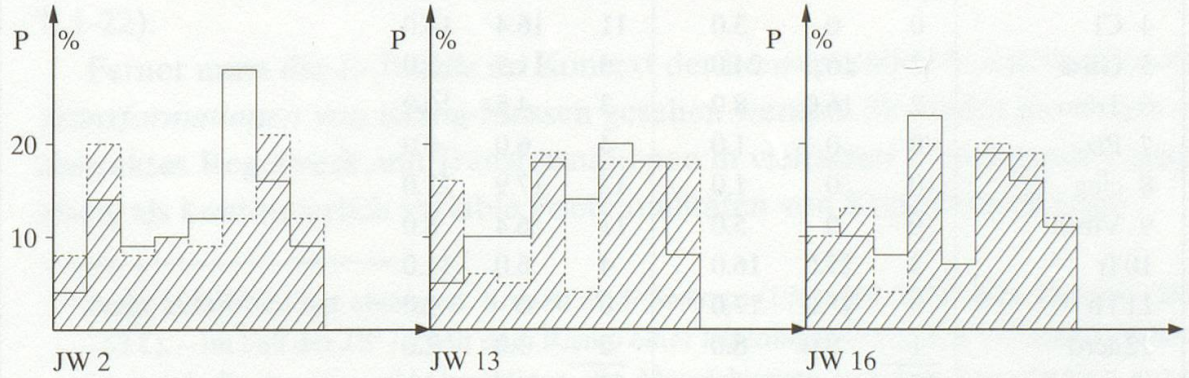
$\upsilon = 1.21$, $c_{a_i} = 0.37$

Klangfarbe (r)		Az	I (%)	S (%)
1	Perc	1	2,4	6,1
2	Cor	11	26,8	21,9
3	Arpa	5	12,2	7,4
4	Cl	4	9,8	10,3
5	Gliss	2	4,9	8,4
6	Trem	2	4,9	12,4
7	Piz	10	24,4	21,6
8	cleg	6	14,6	12,1
		41	$\chi^2 = 13.63$	

mit 5 % signif. level (v = r-1 = 7):
$\chi^2_{.95} = 14.1 > 13.63 \rightarrow$ Test knapp positiv

In der *JW 12* dominieren das *Horn* (r = 2) sowie *Pizz.* (r = 7) mit je elf und zehn Tönen. In der Tat sind schon in der *E-Tabelle* diese Klangfarbenklassen bevorzugt (mit 21.9 % bzw. 21.6 % laut Formel /9/). Das Histogramm veranschaulicht, was die I/S-Zahlen wiedergeben: eine ziemliche Übereinstimmung der Klangfarben-Tendenzen in Absicht und Realisation.

Die Statistik bietet als Überprüfungsmethode der Übereinstimmung von beobachteten und erwarteten Daten den χ^2-*Test* (dessen sich auch Xenakis bedient[54]), welcher in diesem Fall (*JW 12*), wenn auch nur knapp, eine nicht zufällige Übereinstimmungstendenz bejaht.[55] Dass die Übereinstimmung nicht «allzu gut» ist, kann dem Umstand zugeschrieben werden, dass bei einer kleinen Zahl von Tönen (hier: 41) die zufallsbedingten Abweichungen stärker ins Gewicht fallen als bei einer grossen Zahl von Probanten. Dieselbe mit unterschiedlicher Deutlichkeit hervortretende Tendenz zwischen erwarteten und beobachteten Klangfarben-Häufigkeiten lässt sich auch in anderen Sequenzen nachweisen, in Auswahl:



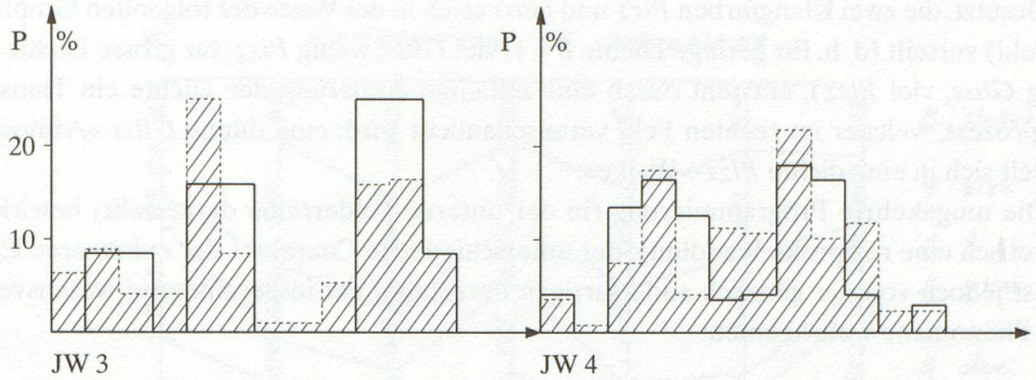
54 S. XEN 5 – *Wkt* (1956: 29).

55 Der χ^2-*Test* (Chiquadrattest) gibt Auskunft darüber, mit welcher Fehlerwahrscheinlichkeit wir die Abweichung von beobachteten und theoretischen Ereignisfrequenzen (I:S) als nicht

	JW 2			*JW 13*			*JW 16*		
	$ca_i = 0.44$			$ca_i = 6.83$			$ca_i = 17.0$		
	$\upsilon = 1.39$			$\upsilon = 4.13$			$\upsilon = 5.0$		
Klangfarbe (r)	Az	I (%)	S (%)	Az	I(%)	S (%)	Az	I (%)	S (%)
1 Perc	2	4.1	7.0	2	4.9	14.2	12	11.9	9.0
2 Cor	7	14.3	20.0	4	9.8	6.0	10	9.9	13.0
3 Arpa	4	8.2	7.0	4	9.8	4.7	7	6.9	3.0
4 Cl	5	10.2	10.0	7	17.1	18.3	23	22.8	20.0
5 Gliss	6	12.2	8.0	6	14.6	5.0	6	5.9	5.0
6 Trem	13	26.5	12.0	8	19.5	17.4	18	17.8	20.0
7 Piz	8	16.3	21.0	7	17.1	17.3	15	14.8	19.0
8 cleg	4	8.2	12.0	3	7.3	17.1	10	9.9	11.0
				41			101		
				$\chi^2 = 38.41 > 14.1$			$\chi^2 = 8.57 < 14.1$		
				verworfen			positiv		

Für *Atrées*, dem eine anders gestaltete, prägnantere Klangfarben-Charakteristiken hervorbringende *E-Tabelle* zugrundeliegt, kann die tendenzielle Übereinstimmung zwischen Eingabe und Resultat ebenfalls nachgewiesen werden:

	JW 3			*JW 4*		
	$ca_i = 0.21$			$ca_i = 1.76$		
	$\upsilon = 1.4$			$\upsilon = 3.56$		
Klangfarbe (r)	Az	I (%)	S (%)	Az	I(%)	S (%)
1 Perc	0	0	6.0	3	4.5	4.0
2 Cor	1	8.3	8.0	0	0	1.0
3 Fl	1	8.3	3.0	9	13.4	8.0
4 Cl	0	0	3.0	11	16.4	14.0
5 Gliss	2	16.0	24.0	8	11.9	5.0
6 Trem	2	16.0	8.0	3	4.5	10.0
7 Piz	0	0	1.0	4	6.0	9.0
8 cleg	0	0	1.0	12	17.9	21.0
9 Vibra	0	0	5.0	11	16.4	8.0
10Tr	3	25.0	16.0	4	6.0	11.0
11Tb	3	25.0	17.0	0	0	2.0
12acro	1	8.0	8.0	2	3.0	2.0
	12			67		
				$\chi^2 = 20.33 > \chi^2_{.95} = 19.7$		



Es wird hiermit offensichtlich, welche Bedeutung der *E-Tabelle* für die klangliche Erscheinungsform des Gesamtwerks zukommt. Nicht umsonst hält Xenakis fest, «que la composition de ce tableau est un travail de précision très délicat et complexe»[56]. Ein wesentlicher Teil der Kompositionsarbeit, will sagen der Umsetzung von klanglichen Vorstellungen in fixierte Notation, geschieht beim «Komponieren» der *E-Tabelle*.

Weitere für das klangliche Ergebnis einflussreiche Daten sind in der *HA-Min-Tabelle* vereinigt (s. *Anhang*). Hier werden gesondert die Tonumfänge der einzelnen Instrumente hinterlegt. In Anbetracht der parametrisierenden Wirkung des *Ambitus* eines jeden Instruments steht in diesen Daten ebenfalls ein Steuerungsinstrument zur Verfügung, wenn auch von geringerem Wirkungsgrad als das oben besprochene. Zu beachten ist jedenfalls der programmtechnisch bedingte – und nicht unproblematische – Wirkzusammenhang zwischen Ambitus und Grösse der Folge-Intervalle (laut Formel /8/, S. 442). Dieser hat etwa zur Folge, dass in der Klasse der Tb-Pedaltöne – wegen ihres geringen Ambitus – in den Tonfolgen kleine bis kleinste Intervalle auftreten (Beispiel: *Atrées*, Teil IV, T. 1-22).

Ferner muss die *E-Tabelle* im Kontext der konzeptuellen Vorstellungen von *Transformationen* von Klang-Massen gesehen werden. Sie bildet gleichsam ein abstraktes Regelwerk, um Transformationen in vielfacher Überlagerung auszulösen, als kontinuierlich variable Pontentialitäten von Klangfarbenklasen.

---

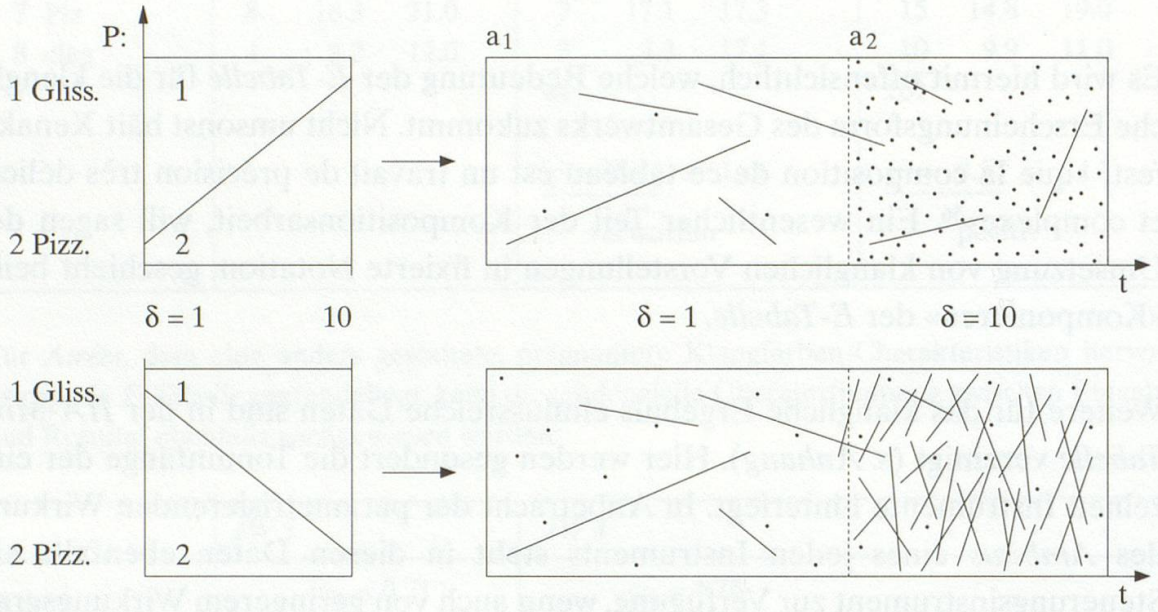
mehr zufallsbedingt ablehnen. S. dazu /814/ Spiegel (1961: 201-207), /805/ Menges (1972: 253 f.). – Im Fall der *JW 12*: Mit dem Risiko einer Fehldiagnose von 5 % (= Signifikanzlevel) lässt sich die Aussage *nicht* bestätigen, die Abweichungen zwischen Erwartungen aus der *E-Tabelle* und den sich ereignenden Klangfarben-Häufigkeiten (S:I) seien nicht zufälliger Art; somit darf man annehmen, sie seien in der Tat zufällig bedingt (die doppelte Negation entsteht aus der mathematischen Hypothesenbildung!). – Mehr Details im *MATH EXK* 14.

56 XEN 24 – *ST* (1963/*MuF*: 171).

Dieser (stochastische) Mechanismus sei an einem Zwei-Klangfarben-Modell noch einmal in Erinnerung gerufen:

Gesetzt, die zwei Klangfarben *Pizz* und *Gliss* seien in der Weise der folgenden Graphik (linkes Feld) verteilt (d. h. für geringe Dichte $\delta = 1$: viel *Gliss*, wenig *Pizz*; für grosse Dichte $\delta = 10$: wenig *Gliss*, viel *Pizz*), entsteht durch eine allfällige Änderung der Dichte ein Transformationsprozess, welcher im rechten Feld veranschaulicht wird: eine dünne *Gliss*-»Atmosphäre» wandelt sich in eine dichte *Pizz*-»Wolke».

Die umgekehrte Programmierung (in der unteren Felderreihe dargestellt) bewirkt zwar theoretisch eine reziproke Wandlung; der unterschiedliche Charakter der ephemeren Elemente lässt jedoch von der gänzlich andersartigen Perzeption her insgesamt zwei wesensverschiedene Phänomene wahrnehmen:



Wenn wir unter diesem Aspekt die *E-Tabelle* von *ST 10* etwas eingehender betrachten, werden differenzierte klangliche Verbindungen erkennbar, die in je verschiedenen Dichtegraden ausgeprägten Vorstellungen des Komponisten verpflichtet sind (s. n. S).

Freilich sind die Veränderungen der Klangfarben-Kombinationen in Abhängigkeit von der jeweiligen Dichte einer Sequenz – der Orchesterzusammensetzung – gradueller Art; sie sind aber dennoch vernehmlich. Bei mittlerer Dichte entsteht beispielsweise ein Zusammenwirken von *Gliss*, *Cl*, *Arpa* und *Cor*; andererseits kann die *Cl* in Sequenzen mit «seltenen» Ereignissen geradezu dominieren (durch lang ausgehaltene Töne, zusammen mit Streicher-Glissandi), ebenfalls in ganz dichten Teilen.

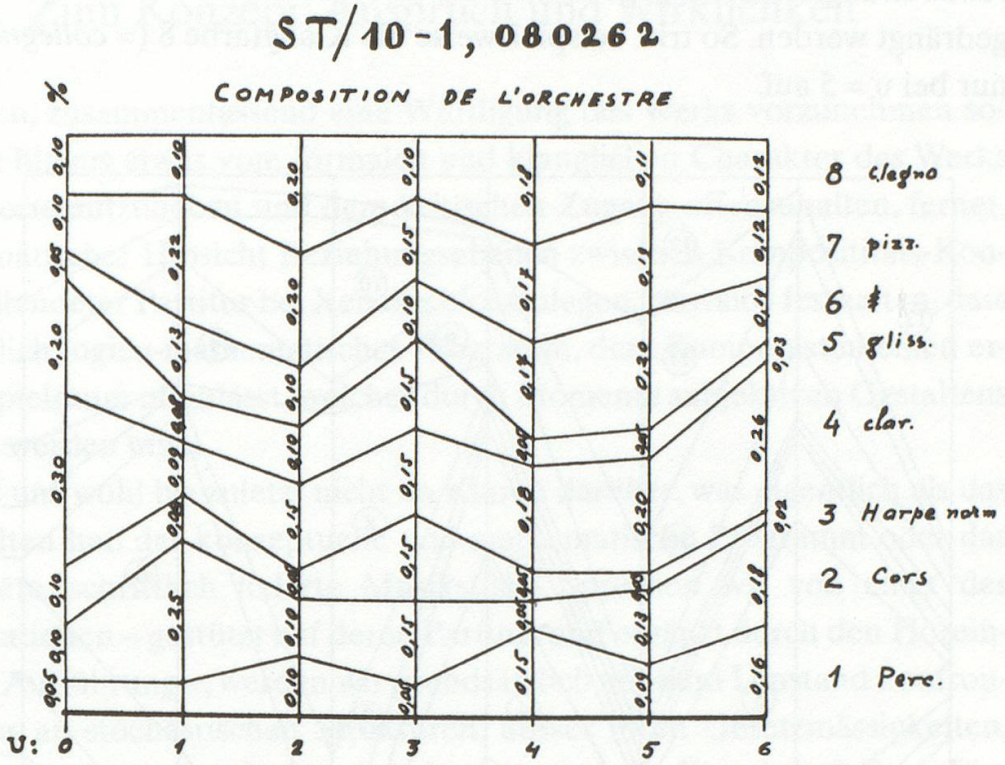
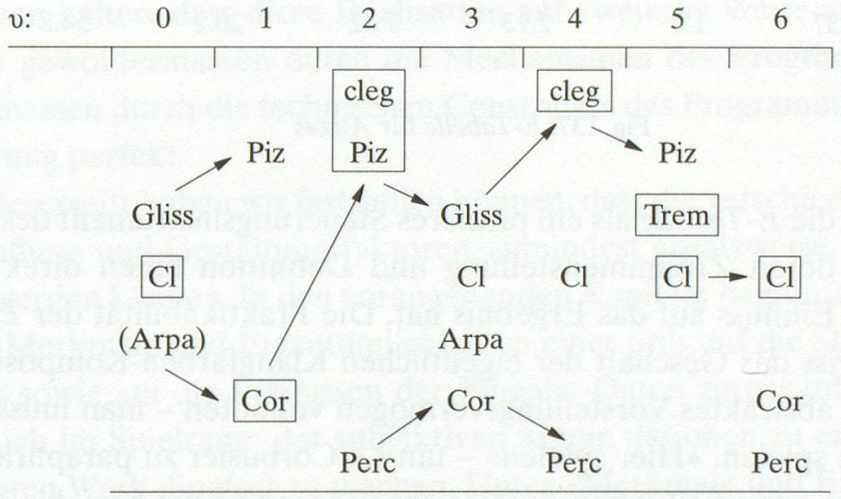


Fig. 3 bis. — *Diagramme de la composition de l'orchestre. ST/10.*

Die Hauptklangfarben für bestimmte Durchschnittsdichten sind folgende:



Dass in der Gestaltung der Klangfarben im Werk auch andere Wege beschritten werden können, erweist die *E-Tabelle* für *Atrées*,[19] welche ihrerseits von einem Willen zum Kontrast getragen scheint: Auf jeder Dichtestufe werden dominie-

19 Rekonstruiert aufgrund der FORMAT-Anweisungen im *ST*-Programm sowie der Input-Daten zu *Atrées*, in: *FoM* (1971: 152).

rende Klangfarben vorgegeben, die auf anderen Stufen stark in den Hintergrund gedrängt werden. So tritt beispielsweise die Klangfarbe 8 (= *collegno*) praktisch nur bei $\upsilon = 5$ auf.

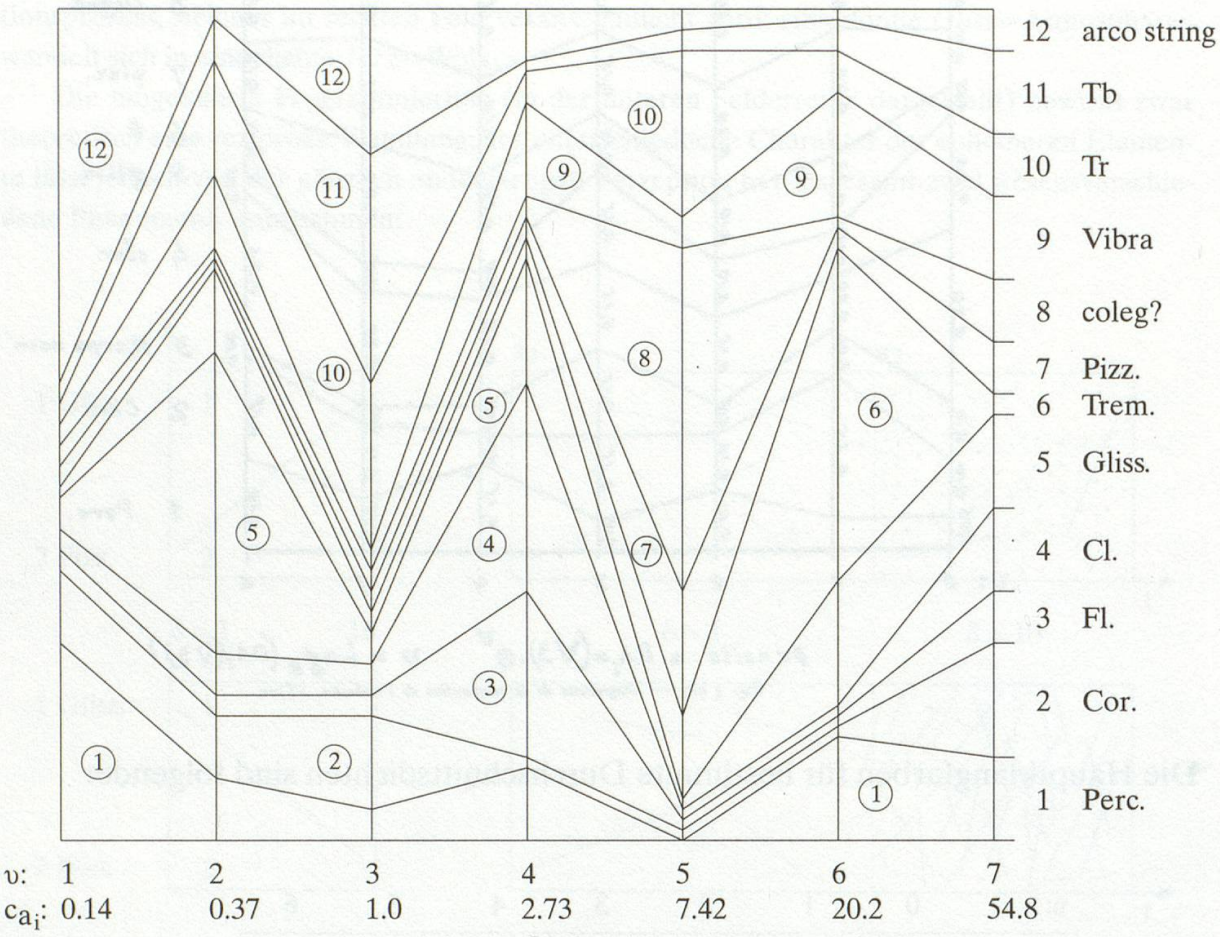


Fig. 137: *E-Tabelle* für *Atrées*

So erweist sich die *E-Tabelle* als ein primäres Steuerungsinstrument des klanglichen Ablaufs, deren Zusammenstellung und Definition einen direkten und massgeblichen Einfluss auf das Ergebnis hat. Die Praktikabilität der *E-Tabelle* erleichtert gewiss das Geschäft der eigentlichen Klangfarben-Komposition; allerdings ist ein abstraktes Vorstellungsvermögen vonnöten – man muss wissen, wie die Zahlen spielen. «Hier spielen» – um Le Corbusier zu paraphrasieren – für einmal nicht nur «die Götter»[58]. Bezeichnenderweise hat Xenakis in seinen eigenen Skizzen die *E-Tabelle* farbig ausgestaltet, um sich den Ablauf der «évènements sonores» besser vor Augen führen zu können. In gedanklicher Kontinuität hat Xenakis die Grundvorstellung von Transformationen klanglicher Zustände auf eine höhere, abstrakte Ebene verlegt und formalisiert.

58 *Le Corbusier* beschliesst das Nachwort zum ersten Band des *Modulor* (1950: 238) mit der Emphase: «Et encore: ICI, les DIEUX jouent!»

4. Zum Konzept: Anspruch und Wirklichkeit

Im Bestreben, zusammenfassend eine Würdigung des Werks vorzunehmen sowie darüber hinaus etwas vom formalen und klanglichen Charakter des Werks für die Historie aufzuheben und dem kritischen Zugang offenzuhalten, ferner, um in pragmatischer Hinsicht Beziehungsebenen zwischen Kompositions-Konzept und vollendeter Partitur bei Xenakis blosszulegen, lässt sich festhalten, dass *ST*, als letztlich logico-mathematisches Programm, dem Komponisten einen erheblichen Spielraum offenlässt, welcher durch Momente subjektiven Gestaltens geschlossen werden muss.

Wir sind uns wohl bis zuletzt nicht im Klaren darüber, was eigentlich als das Werk zu gelten hat: das konzeptuelle und mathematische Programm oder das ausgearbeitete, schriftlich fixierte Musikstück. Sprechen wir von einer der Einzelrealisationen – gestützt auf deren Partitur und ergänzt durch den Höreindruck einer Aufführung –, werden wir grundsätzlich mit dem Umstand konfrontiert, dass es an stochastischen Strukturen, ausser ihren Gesetzmässigkeiten, nichts zu beschreiben gibt als (beschränktermassen) die Eigenschaft ihrer Elemente. Halten wir uns andererseits an Bedingungen und Formalisierungen des Programms, wird sogleich einsichtig, dass zwar die logische Kohärenz des Prozederes umfänglich aufgedeckt werden kann, das musikalisch Relevante hingegen – gleichsam zwischen den Zeilen – in der Verwirklichung der Prämissen des ästhetischen Konzeptes gesucht werden muss. Wenn wir uns überdies noch vor Augen halten, dass diese Realisation auf zweierlei Weise zustandekommt, nämlich gewolltermassen durch die Mechanismen des Programms und ungewolltermassen durch die technischen Constraints des Programmierbaren, ist die Verwirrung perfekt.

Andererseits haben wir feststellen können, dass die verschiedenen Schichten von Einfluss- und Gestaltungsfaktoren, zumindest ansatzweise, auseinandergehalten werden können. In den vorangehenden Kapiteln bemühten wir uns, nicht nur die Merkmale und Eigentümlichkeiten eines Stils auf die Struktur des Programms sowie auf die Prämissen der Eingabe-Daten zurückzuführen, sondern diese auch im Spielraum der subjektiven Manipulationen zu ermessen und im realisierten Werk dingfest zu machen. Unter «Merkmale und Eigentümlichkeiten des Stils» sind die im kompositorischen Konzept entworfenen Massenphänomene von Einzelereignissen – Wolken, Galaxien, Glissando-Verteilungen usw. – zu verstehen, welche durch das Programm numerisch generiert werden können, das heisst, welche durch ein mathematisches Regelsystem im Klangraum von Tonhöhe und Zeit örtlich bestimmt werden. In Verbindung mit den charakteristischen Formen der vorgegebenen Lautstärken-Verläufe (aufgrund des Katalogs von Dynamik-Formen) prägen diese die Erscheinungsform der Kom-

position entscheidend. Die Manipulationen andererseits – als schwer erfassbare Qualität subjektiver Faktoren – beginnen bei der heuristischen Validierung der Eingangs-Daten zum Zweck der Gestaltung der Komposition nach Präferenz-Vorstellungen persönlich-intuitiver Art. Man findet ihren abschliessenden Niederschlag in der Ausarbeitung der unterschiedlichsten klanglichen Erscheinungen in aufführungspraktischer Hinsicht, etwa durch spieltechnische Verstärkung eines klanglichen Effektes.

Die Kernfrage der Analyse bleibt jedoch weiterhin im Raume stehen: Wie wesentlich ist letztlich dieser Spielraum – grundsätzlicher Art zwischen stochastischer Logik und Realisation – für die definitive Gestalt der Komposition?

Angesichts der oben beschriebenen «auffälligen» Phänomene, welche nur als Extremwerte mit einer Zufallsverteilung in Übereinstimmung gebracht werden können, kommt man nicht umhin, festzustellen, dass durch die sowohl starre als auch bedingt zufällige mathematische Berechnung hindurch etwas wie ein gestalterischer Wille die Dinge direkt zu regeln vermag. Entscheidend ist jedoch, dass die Manipulationen sich insgesamt im Rahmen des kompositorischen Konzepts abwickeln lassen. Die stochastische Formulierung der Kompositionsregeln beinhaltet somit einerseits eine Flexibilität, welche das Einfliessen persönlicher Präferenzen nicht ausschliesst, andererseits lässt sie durch ihren übergreifenden Gültigkeitsbereich die Komposition zum Produkt einer einzigen, formalisierten Logik werden. Jener Logik nämlich, welcher zur Aufgabe gestellt worden ist, mit einem Minimum an Kompositionsregeln grösstmögliche Asymmetrie der klanglichen Ereignisse zu gewährleisten.

Freilich hat es mit dem «Minimum an Regeln» durchaus eine bedenkenswerte Bewandtnis: Grundsätzlich gibt es unzählige Möglichkeiten, ein beliebiges Minimum an Kompositionsregeln (im Sinne einer Formalisierung des schöpferischen Gestaltungsprozesses) zu definieren, liegt dieses doch in den variablen gedanklichen Prämissen begründet und nicht im Sachverhalt an sich. Wenn Xenakis ausdrücklich nach *dem* Minimum strebt («Quel est le minimum de contraintes logiques nécessaires à la fabrication d'un processus musical?»[59]), kann dies somit nur im Kontext seines eigenen Musikdenkens Gültigkeit beanspruchen. Nur im Rahmen eines apriorischen Regelsystems stochastischer Prozesse, welches als hinreichende Formalisierung des kompositorischen Konzepts von kontinuierlichen und diskontinuierlichen Transformationen von Klangmassen errichtet wurde – von dichtesten Klangwolken bis zum Ablauf seltenster Ereignisse –, kann letztlich ein determiniertes «Minimum» sinnvoll definierbar sein. Hinzu kommt, dass naturgemäss nur stochastische Prozesse innerhalb eines – zwangsläufig deterministischen –Regelsystems zugleich ein Maximum an Asymmetrie der gerechneten Elemente hervorzubringen vermögen.

59 XEN 17 – *Stoch* (1961/*MuF*: 33).

Das formulierte «Minimum an Kompositionsregeln» gewinnt dadurch für Xenakis auf dem Wege zu den «*musiques formelles*» an Bedeutung; der Formulierungsakt wird zum unerlässlichen Nadelöhr der Erkenntnis. In ihm liegt die eigentliche Bedeutung des Schritts von der noch wesentlich von subjektiven Faktoren dominierten Anwendung stochastischer Regeln in *Achorripsis* (was sich primär in der numerischen Determinierung der das Gesamtwerk formal wie strukturell bestimmenden *Matrix M* manifestiert) zum gleichsam autonomen Rechenprozess in *ST*, welcher nach Eingabe der geforderten Constraints ungestört abläuft.

Ein naturwissenschaftlich orientierter Ansatz liess bei Xenakis unweigerlich das Prinzip des Minimums im Prozess des formalisierenden Verdichtens und Ordnens auf den Plan treten[60] – als Angelpunkt einer «asymmetrischen» Formalisierung. In der Folge konnte er, aufgrund der in *ST* gewonnenen Erkenntnisse, das «Minimum» in Richtung einer Öffnung zu einer *deterministischen Formalisierung* hin verlassen. Voraussetzung dafür war allerdings die Setzung einer *musikalischen Axiomatik*. Deren Begründung und Darstellung bildet den

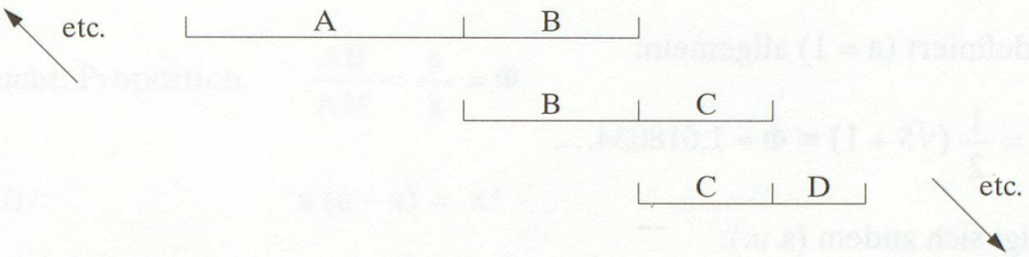
60 Das von E. Mach (/756/ *Die Ökonomie der Wissenschaft* [1883/1963: 457 ff.]) zum Prinzip des Erkenntnisprozesses erhobene «Minimum an Denkmitteln» – im Sinne einer Rückführung komplexer Sachverhalte in der Natur auf einige wenige Begriffe, um durch Verdichtung und Ordnung des Wahrgenommenen in möglichst einfacher und exakter Beschreibung in eine Theorie aufgenommen zu werden – bildet den Kern seiner These der «*Ökonomie des Denkens*». Die beträchtlichen erkenntnistheoretischen und begrifflichen Probleme, welche diese These aufwirft, bilden den Gegenstand einer Kontroverse, die bis heute andauert. So haben etwa die Positivisten des Wiener Kreises den erkenntnistheoretischen Anspruch der Denkökonomie abgelehnt (M. Schlick: *Allgemeine Erkenntnislehre* [1925: 91 ff.]) und dieser den Stellenwert eines rein logischen Prinzips zugewiesen, welches die Beziehungen von Begriffen beschreiben kann; überdies wurde in diesem Kontext den Begriffen selbst lediglich der Charakter von Zeichen zugestanden, die für wahrgenommene Objektarten stehen. In einem anschaulichen Erkenntnisbegriff muss freilich das «Minimums an Begriffen zur eindeutigen Bezeichnung aller Tatbestände der Welt» weiterhin als oberstes Prinzip wissenschaftlicher Erkenntnis Gültigkeit beanspruchen; es handelt sich dabei jedoch lediglich um eine *wissenschaftstheoretische Regel*.
So wird einsichtig, dass in den Naturwissenschaften, in den Sozialwissenschaften, überall dort, wo mathematische Methoden den Lösungsweg bestimmen, das Prinzip des «Minimums an Regeln» nach wie vor die Theoriebildung bestimmt. Offensichtlich scheint jegliche mathematische Formulierung eines Sachverhalts nach einfachster Deskription zu streben – die Faszination der «eleganten Lösung» in der Mathematik ist weiterhin ungebrochen. Dass *Xenakis* dieses Prinzip in der Formalisierung der musikalischen Komposition zur Anwendung gelangen lässt, wird in diesem Kontext nachvollziehbar, selbst wenn es in erster Linie von ästhetischen Prämissen geleitet war (s. dazu den Artikel «Denkökonomie» von G. Koenig im *HWPh* II, 108, sowie ders. /750/– «Der Wissenschaftsbegriff bei Helmholtz und Mach» [1968: 90-114], /768a/ Stegmüller [1978: II, 362-366]; ferner *Albert Einstein* in einem Gespräch mit /746/ Heisenberg [1979: 33-35], welches zeigt, dass das «Minimum an Denkmitteln» an wesentliche Fragen unseres Weltbilds anknüpft).

Gegenstand von Xenakis' Abhandlungen «Vers une métamusique» (1967) und «Vers une philosophie de la musique» (1965-1968); die Frucht dieser Erkenntnisse bildet die Komposition *Nomos* α (1966). Die gedanklichen Leitbilder dazu, sozusagen das Paradigma eines deterministischen Kosmos, fand Xenakis – dies wird schwerlich Verwunderung erregen – in der algebraischen Zahlentheorie.

MATHEMATISCHE EXKURSE

Exkurs 1
Die Stetige Teilung, «Goldener Schnitt» und Fibonacci-Zahlen

Man stelle sich ein Teilungsverhältnis so vor, dass mit stets gleichem Verhältnis diese Teilung unendlich weitergeführt werden kann:

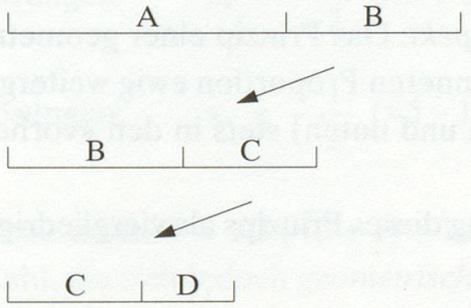


(A:B) = (B:C) = (C:D) = … etc.

Derartige Teilungsprinzipien gibt es unendlich viele, zum Beispiel:

$$(1:\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}:\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4}:\frac{1}{8}) = \ldots \text{ usw.}$$

Man fordere zudem, dass die Teilung so erfolgt, dass



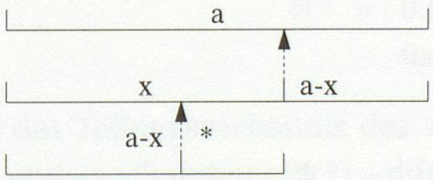
A = B+C («Minor»)

B = C+D («Minor»)

C = D+E etc.

Gesucht ist somit ein Wert x, der die Teilung einer Strecke a, mathematisch ausgedrückt, die Proportion *(a:x)* ins Unendliche weiterführt und dabei die Summenregel $x + b = a$ berücksichtigt. Dies nennt man die *Stetige Teilung*:

Es sei (a:x) = (x : (a−x)) = {(a−x) : (x−(a−x))} = usw. = Φ



* = x − (a−x) = 2x−a

Der einzige Wert der die Gleichung $(a : x) = (x : (a - x))$ löst, ist wegen

$$a(a - x) = x^2$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$$

Man definiert $(a = 1)$ allgemein:

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \equiv \Phi \approx 1{,}618034\ldots,$$

Es zeigt sich zudem (s. u.):

$$x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{\Phi} \approx 0{,}618034\ldots, \text{ das heisst } \Phi - 1 = \Phi^{-1}$$

Diese «wunderbare» Zahl Φ hat im Laufe der Geschichte schöne Namen erhalten: «*Divina Proporzione*» (Luca Pacioli 1509), «*Sectio aurea*» (Leonardo da Vinci), «*Nombre d'or*», «*Goldener Schnitt*».

Wie man sieht, sind in der Gesetzmässigkeit des «Goldenen Schnitts» zwei Dinge in glücklicher Fügung vereinigt:

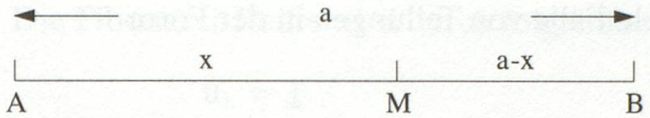
- ein *geometrisch-anschaulicher Aspekt*: Das Prinzip einer geometrischen Teilung, die unter Bewahrung ihrer inneren Proportion ewig weitergeführt werden kann, so dass sie (nach oben und unten) stets in den «vorhergehenden Rahmen» passt (Summenregel);
- die *logisch-abstrakte* Formulierung dieses Prinzips als viergliedrige Proportion, als *Analogie*.

Diese Umstände führten dazu, dass an diese Zahl in Geschichte und Gegenwart mancherlei Spekulationen philosophischer, ästhetischer und mystischer Art geknüpft wurden (s. u., 4.).

1. DIE MATHEMATISCHE FORMULIERUNG

Allgemeine Herleitung von Φ:

Teilung von $\overline{AB}$, so dass $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$, das heisst



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \qquad /1/$$

Gesucht: Proportion $\frac{AB}{AM} = \frac{a}{x} = \Phi$ /2/

Aus /1/: $a\,(a-x) = x^2$

$$a^2 = x\,(a+x)$$

Aus /2/: $a^2 = \frac{a}{\Phi}\,(a + \frac{a}{\Phi}) \smile a\,\Phi = \Phi + \frac{a}{\Phi}$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

entsteht die quadratische Gleichung $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ /3/

mit den Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2}\,(\sqrt{5}+1) = \Phi$ /4/

mit den Lösungen: $x_2 = -\frac{1}{2}\,(\sqrt{5}-1) = \Phi^{-1}$ /4a/

Die «Goldene Zahl» $\Phi = 1/2\,(\sqrt{5}+1) = 1.618\ldots$ ist eine irrationale (inkommensurable) Zahl, die sich jedoch *geometrisch* exakt und einfach konstruieren lässt (s. u.).

Sie hat überdies folgende verblüffende Eigenschaften:

da $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi - 1 = \Phi^{-1}$$

numerisch:

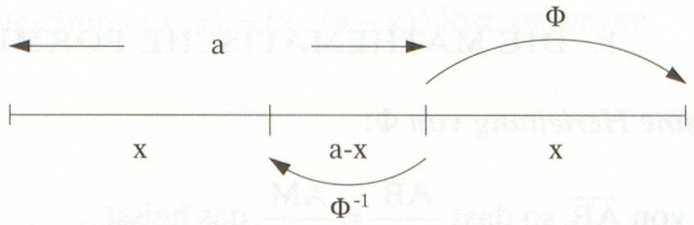
$\Phi = 1.61803398875\ldots$ /5/

$\Phi^{-1} = 0.61803398875\ldots$

usw.,

das heisst: das Teilungsverhältnis des «Goldenen Schnitts» – gemessen «nach oben» (Φ) und «nach unten» (Φ^{-1}) – differiert genau um den Betrag 1!

/5/: $\Phi - \Phi^{-1} = 1$



Theoretisch gibt es unendlich viele Fälle von Teilungen in der Form

$$x^2 - px - 1 = 0, \text{ aber}$$

die Form $x^2 - x - 1 = 0$ ist die *einfachste* überhaupt: der «Goldene Schnitt».

Erweiterung zur *Stetigen Teilung*:

/5/:
$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \Phi + 1 \\ \Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi \\ \Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Phi^n &= \underbrace{\Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Eigenschaft: Die Summe bleibt proportional stets erhalten, für irgend ein

$u_n = a\Phi^n$, a: beliebige Konstante,

gilt: $\underline{u_n = u_{(n-1)} + u_{(n-2)}}$ /6/

Die Stetige Teilung bildet eine nichtabbrechende *Geometrische Reihe*, in der allgemeinen Form:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, \ldots; \quad a_n = a_1q^{(n-1)},$$

wobei $q = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \Phi^{-1}$, a_1: beliebige Konstante

Grenzwert der Summe: $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-(\sqrt{5}-1)} = \frac{a_1}{q^2}$!

Weitere Besonderheiten der Zahl Φ,

etwa dass: $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$

s. bei GHYKA (1927: 40-45).

Allgemeines zur Herleitung s.: /826/ CLEYET-MICHAUD (1982), /862/ MONTEL (1961), /879/ TIMERDING (1919), /836/ GHYKA (1927:31-79); allgemein: /837/ GHYKA (1931); ferner: /878/ LE LIONNAIS (1983: 40), /886/ WARUSFEL (1961: 98-107).

2. DIE ZAHLENREIHE DES LEONARDO DA PISA, DETTO FIBONACCI

Die berühmte *Fibonacci-Reihe* ist mit der Stetigen Teilung nicht identisch, wie es oft vereinfachend formuliert wird, sondern strebt der Φ-Proportion mit steigenden Werten zu und ereilt sie im Unendlichen.

Die Fibonacci-Reihe wird durch folgende rekursive Operation generiert:

$$u_1 = \underline{1}$$
$$u_2 = \underline{1}$$
$$u_3 = u_2 + u_1 = \underline{2}$$
$$u_4 = u_3 + u_2 = \underline{3}; \qquad \underline{5}, \underline{8}, \underline{13}, \underline{21}, \underline{34}, \underline{55}, \underline{89}, \underline{144} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

allgemein: $u_n = u_{(n-1)} + u_{(n-2)}$, für $n > 2$: wie oben /6/
für $n < 2$: $u_{1,2} = 1$

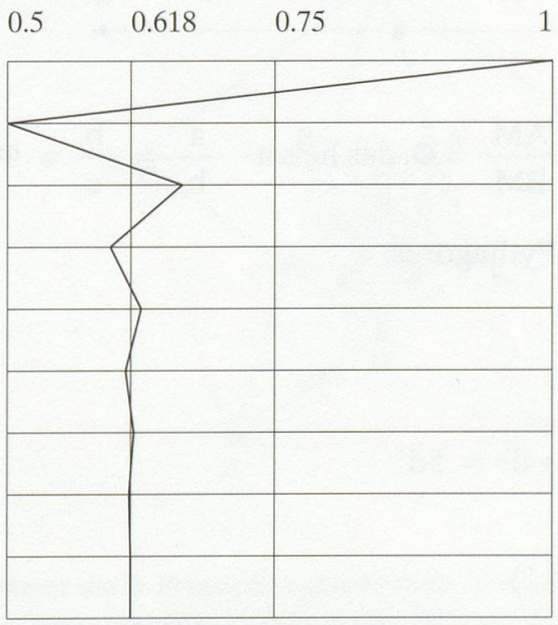
Es kann bewiesen werden, dass die daraus resultierende Reihe von Proportionen

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots \text{ usw.}$$

allgemein: $f_n = \dfrac{u_{(n+1)}}{u_n}$ für $n \to \infty$ gegen Φ strebt

(zum Beweis s. unter anderem CLEYET-MICHAUD [1973:73 ff.]).

Die folgende Graphik illustriert den Übergang: Mit steigenden Werten der *Fibonacci-Reihe* nähert man sich dem Mass des *Goldenen Schnitts*:



1 : 1 = 1
1 : 2 = 0.5
2 : 3 = $0.6\overline{6}$
3 : 5 = 0.6
5 : 8 = 0.625
8 : 13 = 0.6153
13 : 21 = 0.619
21 : 34 = 0.6176
34 : 55 = 0.61818

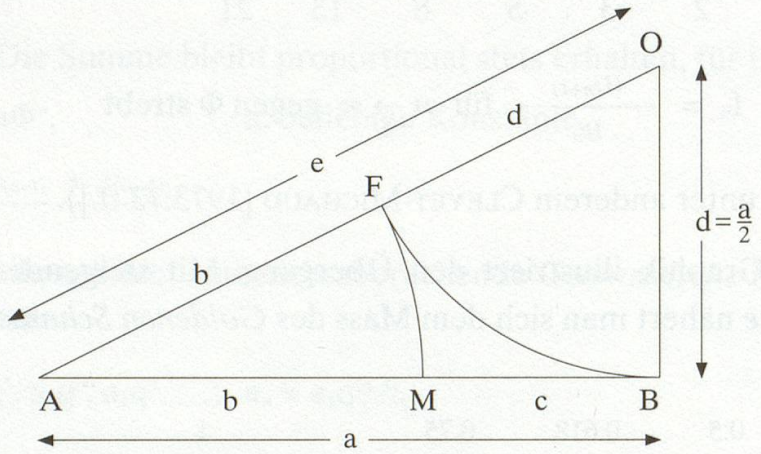
Die Fibonacci-Reihe wird deshalb oft als arithmetische Näherung von Φ verwendet. Ihr besonderer Reiz liegt in ihrem anschaulichen, rekursiven Aufbau (jeweils die Summe der zwei präzedenten Elemente ergeben das neue Element); darin ist das Wesen und – mit zunehmender Genauigkeit bei steigenden Werten – die mathematische Relation des «Goldenen Schnitts» einbeschlossen.

3. GEOMETRISCHE KONSTRUKTION DES GOLDENEN SCHNITTS

Einfachste geometrische Darstellung als Kreistangente am Kreis mit Radius a/2 (diese Konstruktion geht auf EUKLID zurück: *Elem.* II, 11; ed. THAER (1975: 41 ff.), s. dazu /841/ HAGENMAIER (1963: 35), /729/ CANTOR [1907: 240 f.]).

Die Strecke AB = *a* soll im Verhältnis Φ geteilt werden: Man errichte in B eine Senkrechte mit der Strecke BO = a/2. Punkt O wird Kreismittelpunkt, mit Radius B0 = a/2; Schnittpunkt mit AO = F. Von A schlägt man einen zweiten Kreisbogen, Radius AF = *b* auf AB und erhält den Schnittpunkt M.

Die Behauptung ist, dass M die Strecke AB im Goldenen Schnitt Φ teilt:



Vor.:
2d = a
a = b+c
e = b+d

Behauptung: $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{BM} = \Phi$, das heisst $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \Phi$

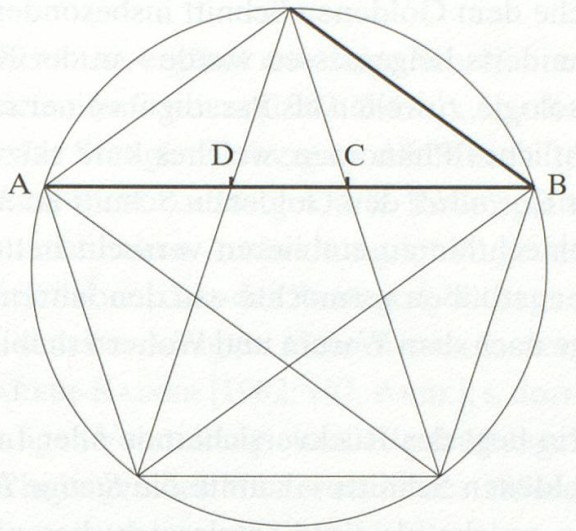
Beweis über den Satz von Pythagoras:

Da:
$$2d = a$$
$$a = b + c$$
$$e = b + d$$
$$e^2 = a^2 + d^2 = 4d^2 + d^2 = 5d^2$$
$$e = d\sqrt{5}$$

ist $b = e - d = d(\sqrt{5} - 1)$

$$\frac{b}{a} = \frac{d(\sqrt{5}-1)}{2d} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \Phi^{-1}, \text{ beziehungsweise } \frac{a}{b} = \Phi$$

Besonders anregend wirkte sich die Entdeckung aus, dass die Euklidsche Konstruktion des Goldenen Schnitts Φ im *regelmässigen Fünfeck* inkorporiert ist:

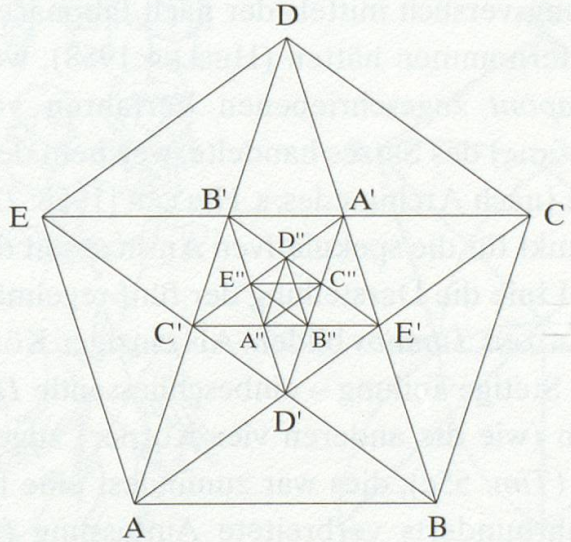


$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{DF} = \frac{BD}{CD} = F$$

$$(BD = DF)$$

(zum Beweis s. TIMERDING [1919: 7-12], CLEYER-MICHAUD [1982: 35 ff.]).

Die Unterteilung des Pentagons durch Diagonalen ergibt eine stetige Verschachtelung von *Pentagrammen* und *Pentagonen*, in denen der Goldene Schnitt omnipräsent ist.



In dieser Figur kommt die Φ-Proportion geometrisch in unzähligen Kombinationen vor (nach v. NAREDI-RAINER [1982: 196] etwa 6'000mal); das Pentagramm wurde gewissermassen zum Inbegriff des Goldenen Schnitts.

4. ZUM MYTHOS DES GOLDENEN SCHNITTS UND SEINER GESCHICHTE

Die Bedeutung, welche dem Goldenen Schnitt insbesondere auch in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts beigemessen wurde – in der Kunsttheorie, der Architektur, der Morphologie, zuweilen als Paradigma einer rationalen Ästhetik –, ist ein kunstgeschichtliches Phänomen, welches kurz skizziert zu werden verdient. Denn wenn *Le Corbusier* den Goldenen Schnitt im *Modulor* zum universalen Masssystem schlechthin zu etablieren versucht hatte und dabei starken Einfluss auf *Xenakis* auszuüben vermochte – in den Jahren des Anfangs zumindest –, so ist die Frage nach dem Warum und Woher erheblich.

1. Die Antike – darin liegt das Rückversichernde aller Investigationen in das «Geheimnis» des Goldenen Schnitts – kannte die *Stetige Teilung*: Es waren die griechischen Denker, welche als erste erfolgreich dieses Phänomen, welches einerseits arithmetrisch *inkommensurabel* (irrational) bleibt, sich andererseits geometrisch exakt konstruieren lässt, als rational darstellbares Theorem zu fassen versuchten und die entsprechenden geometrischen Sätze formulierten. Bei EUKLID (*Elem.* II, 11 [1975: 41 f.] sowie erweitert: XIII, 1-5 [1975: 386 f.]) ist die Konstruktion der Stetigen Teilung festgehalten. Das Fünfeck war allerdings schon den *Pythagoräern* bekannt und diente Eingeweihten als Erkennungszeichen (s. dazu CANTOR [1907: 177 f.]; zur Konstruktion mittels «Einschiebung» s. /846/ HELLER [1958: 10]).

Es wird vermutet, dass schon die älteren Pythagoräer die Stetige Teilung gekannt hatten und durch eine kontinuierliche Näherungskonstruktion einen arithmetischen Lösungsversuch mittels der nach Fibonacci benannten rekursiven Zahlenreihe unternommen hätten (HELLER 1958), wobei es sich bei dem *Hippasos von Metapont* zugeschriebenen Verfahren vorerst nur um eine «Aufzeigung» (ἀπόφᾶσις) des Satzes handelte, welchem der Beweis (ἀπόδειξις) noch zu folgen hätte (nach Archimedes, s. HELLER [1958: 23]).

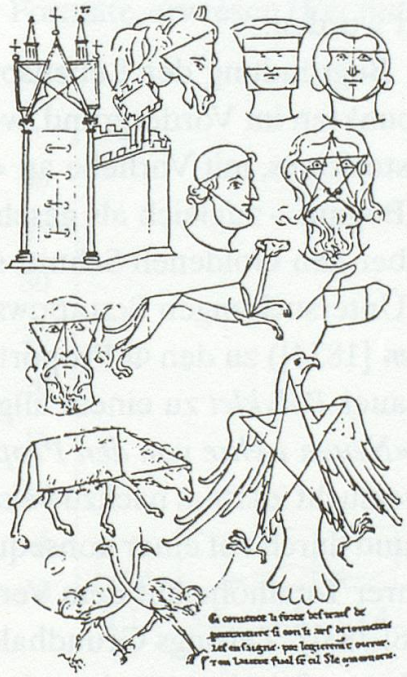
Den Ausgangspunkt für die spekulativen Ansätze seit dem Ausgang der Antike dürfte in erster Linie die Darstellung der fünf regelmässigen und vollkommenen Körper in PLATONS *Timaios* bilden: Als einziger Körper ist der das Fünfeck – und somit die Stetige Teilung – einbeschliessende *Dodekaeder* nicht den irdischen Elementen (wie die anderen vier Körper) zugeordnet, sondern der «himmlichen Welt» (*Tim.* 55c); dies war zumindest eine in der Rezeption des ausgehenden 19. Jahrhunderts verbreitete Auffassung (etwa bei TIMERDING [1919: 32], /843/ HAMBIDGE [1924], /839/ GHYKA [1946: 114]; vgl. auch CLEYET-MICHAUD [1973: 28 f.]).

Dass bei Platon der (nicht eindeutig zugewiesene) «Schnitt» grösste Bedeutung besass, wird allgemein vermutet (bei CANTOR [1907: 240 f.]), auch aufgrund

der Bemerkung im Mathematikerverzeichnis des *Proklos*, dass «Eudoxos von Knidos die Lehre vom Schnitt (περι την τομην), die Platon grundgelegt hatte», weitergeführt habe (PROKL. *Komm.*, ed. STECK [1945: 212]; s. dazu HELLER [1958: 12 f.]).

Die *Elementa* des EUKLID, ergänzt um einige Scholien, welche das Φ-Verhältnis arithmetisch vertiefen (s. CANTOR [1907: 261 f.]), überlieferten die geometrischen Eigenschaften der Stetigen Teilung an das Mittelalter, wo sie im Schosse der Dombauhütten eine nicht restlos geklärte Rolle spielten. Als ihrer praktischen, das heisst bautechnischen Ausbreitung im Wege stehend mag der Umstand eine Rolle gepielt haben, dass das Pentagon, bedingt durch seinen komplizierten Riss, nicht zu den bevorzugten Grundrissen in der Architektur werden konnte (s. dazu v. NAREDI-RAINER [1982: 197, Anm.]; s. dort auch dessen Bedenken zur vordem geläufigen Vorstellung eines «Bauhüttengeheimnisses», welches etwa anhand der Zeichnungen des Musterbuchs des *Villard de Honnecourt* [um 1235] zu entschlüsseln versucht wurde [ib.: 216 f.]).

Der fünfeckige Treppenturm des Martinsturms am Basler Münster (von *Hans von Nussdorf* Ende des 15. Jahrhunderts erbaut) dürfte eines der raren Beispiele für einen pentagonalen Grundriss im Spätmittelalter darstellen. Es sei noch beigefügt, dass die einfachste Konstruktionsmethode für ein regelmässiges Fünfeck, welche nach *Albert Dürer* benannt ist (erstmals erwähnt 1487 in der «*Geometria Deutsch*» von *Matthäus Roritzer*), zwar ausserordentlich elegant, jedoch nicht stimmig ist – der Fehler ist in der Praxis allerdings vernachlässigbar (s. CLEYET-MICHAUD [1973: 46 f.], CANTOR [1910: II, 450]).



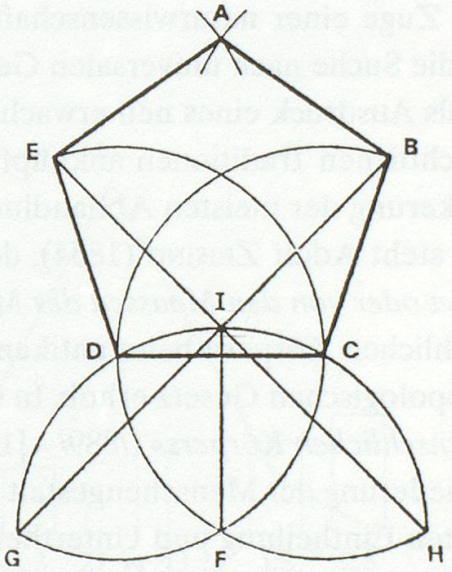


Fig. 138: (Links) Aus dem Skizzenbuch des Villard d'Honnecourt (um 1235).
(Rechts) Näherungskonstruktion des Fünfecks (aus «Geometria Deutsch» 1487/88).

2. Im Jahre 1202 veröffentlichte der Mathematiker *Leonardo da Pisa*, vulgo *Fibonacci* («Filius Bonacji Pisanus»), in seinem *Liber Abaci*, als Lösung der ihm von Kaiser Friedrich II. gestellten «Kaninchenaufgabe», die nach ihm benannte rekursive Zahlenreihe (s. CANTOR [1910: II, 257]). Dieser wurde in der Folge – bis heute – in der Proportionierung von Kunstwerken, in der Architektur, in der bildenden Kunst wie auch in der Musik grosse Bedeutung beigemessen.

Das Wesen des Goldenen Schnitts wurde in der Zeit der Renaissance mitunter durch die umfassende Darstellung des Theologen und Mathematikers *Fra Luca Pacioli* wieder in Erinnerung gerufen, welcher sie «*Divina Porportione*» nannte (gedruckt 1509; NA: /865/ PACIOLI, ed. WINTERBERG [1889]) und mit ihr theologische Spekulationen verband. Es wird berichtet, dass *Leonardo da Vinci* zu Paciolis Buch die Zeichnungen entworfen haben soll und dass zudem die Bezeichnung «*sectio aurea*» auf ihn zurückgehen soll (was bezweifelt wird: s. HAGENMAIER [1963: 17]; *Winterbergs* Einl. zu PACIOLI [1889: 2]). Die Bedeutung des Goldenen Schnitts für die Malerei und die bildende Kunst ist in jener Zeit zweifellos gross, muss aber im Kontext einer theoretischen und mathematischen Fundierung der Perspektive – der Darstellung von Objekten der (plastischen) Raum-Kunst in der (planen) Malerei – gewürdigt und relativiert werden.

3. Wenn der Goldene Schnitt zu Beginn unseres Jahrhunderts wiederum grosse Bedeutung erlangen und eine Flut von Veröffentlichungen – mehrheitlich apodiktischen Charakters – nach sich ziehen sollte, so sind dazu die Wurzeln in einer zunehmend normativen Grundhaltung in der Kunstbetrachtung zu suchen, unter deren Einfluss zu Beginn des 19. Jahrhunderts die antiken Kanones gleichsam als deren Naturgesetze wieder entdeckt wurden.

Im Zuge einer naturwissenschaftlichen Begründung der Lebensprinzipien stand die Suche nach universalen Gesichtspunkten im Vordergrund, welche zudem, als Ausdruck eines neu erwachten Historismus, mit Vorliebe an «ewigen» geschichtlichen Traditionen anknüpfte. Zu Beginn – zugleich als geschichtliche Verankerung der meisten Abhandlungen über den Goldenen Schnitt seit jener Zeit – steht Adolf ZEISING (1854), der die Untersuchungen SCHADOWS (/867/ – *Polyclet oder von den Maassen des Menschen* [1834]) zu den Φ-Proportionen an menschlichen Körpern beim antiken Bildhauer *Polyklet* zu einem allgemeinen anthropologischen Gesetz erhob. In seiner «*Neuen Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*» (/889/ – [1854]) versucht ZEISING nachzuweisen, «dass die Gliederung der Menschengestalt durch und durch auf einer konsequent fortgesetzten Eintheilung und Untertheilung ihrer Totalhöhe auf dem Verhältnisse des goldenen Schnitts beruht» (/890/ – [1858: 783]). Zeisings Grundhaltung manifestiert sich deutlich, wenn er dem Goldenen Schnitt attestiert, dass «überhaupt das Grundprinzip aller nach Schönheit und Totalität drängenden Gestaltung im Reich der Natur wie im Gebiet der Kunst enthalten ist und dass es von

Uranfang an allen Formbildungen und formellen Verhältnissen, den kosmischen wie den individualisierenden, den organischen wie den anorganischen, den akustischen wie den optischen, als höchstes Ziel und Ideal vorschwebt, jedoch erst in der Menschengestalt seine vollkommene Realisation erfahren hat» (zit. n.: TIMERDING [1919: 35]). In der Darstellung der Φ-Proportionen an menschlichen Gliedmassen bedient sich *Zeising* der «rückläufigen Reihe» (sc.: der Fibonacci-Reihe), in der Weise, dass aus deren positiven und negativen Abweichungen vom exakten Φ-Mass (da 3:5 < Φ < 5:8) entsprechend «männliche» und «weibliche» Proportionen abgeleitet wurden.

Dies alles hatte freilich mit den antiken Kanones der menschlichen Gestalt, wie sie uns von *Vitruv* und *Polyklet* überliefert sind, keinen direkten Bezug mehr. Bei allen noch ungeklärten Problemen der Überlieferung scheint es doch eindeutig, dass gerade der Goldene Schnitt in der Proportionierung des menschlichen Körpers nie zur Anwendung gelangte (s. dazu BRAUNFELS [1973: 43 ff.] und besonders v. NAREDI-RAINER [1982: 92 ff.]). Andere Autoren folgten auf *Zeising* mit Abhandlungen ähnlicher Art: BOCHENEK (1875, 1885), GOERINGER (1893).

Wesentlich nüchterner verfolgte G. Th. FECHNER (/831/ – *Vorschule der Ästhetik* [1876]) einen neuen Ansatz, indem er sich «gegen die Übertreibung des Principes des Goldenen Schnitts» (1876: 8) wandte und sich auf das hervorstechende Merkmal des Goldenen Schnitts in der Wahrnehmung bezog, welches stets noch nachempfunden werden kann: das durch die Φ-Proportion ausgelöste «Wohlgefühl» der Proportioniertheit. Anlass zu der von ihm mitbegründeten *Experimentalen Ästhetik* (/832/- [1871]) bildeten Versuche mit Personen, welche die spontane, subjektive Präferenz für ein Rechteck im Goldenen Schnitt, innerhalb anderer Formate, erwiesen (FECHNER [1876: 184 ff.]; vgl. TIMERDING [1919: 46 ff.]).

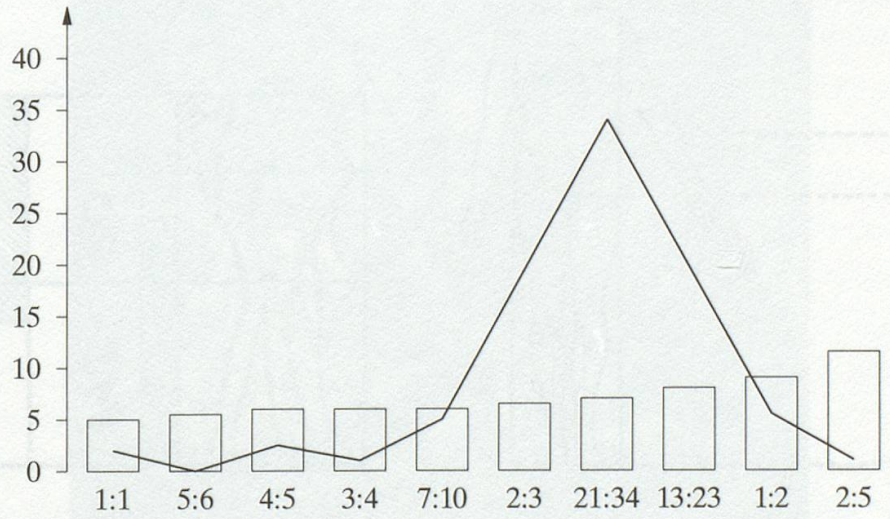


Fig. 139: Fechners Untersuchung
zur Festellung des «schönsten Rechtecks», Diagramm

Dieser Versuch wurde später mit ähnlichem Resultat häufig wiederholt, was den Spekulationen um das verborgene Wesen des Goldenen Schnitts stets neuen Auftrieb verlieh, lagen doch hiermit sozusagen «wissenschaftliche» Erkenntnisse vor (vgl. /851/ LALO [1908], /848/ HUNTLEY [1970], /878/ THEIS [1953: 502 f.]).

Diese gleichsam empirischen Beweise dafür, dass es mit der Φ-Proportion eine ästhetische Bewandtnis habe, vereint mit den Versuchen von anthropologischen und biologischen Messungen sowie einer übergewichteten historisch-kulturellen Relevanz, trugen zum «Siegeszug» des Goldenen Schnitts bei, welcher sich nach der Jahrhundertwende in weiten Kreisen anbahnte.

TIMERDING (1919) lieferte einen mathematischen und ästhetischen Abriss der Geschichte des Goldenen Schnitts im Rahmen einer kritischen Würdigung seiner Bedeutung. BOESENBERG (/895/ – *Harmoniegefühl und Goldener Schnitt* [1911]) versuchte gar die Φ-Proportion in der musikalischen Harmonik zu etablieren; er «löste» das grundsätzliche Problem der Inkongruenz mit harmonischen Proportionen durch die Definition einer «neuen» Φ-Proportion im Verhältnis der logarithmierten Quint-Frequenz («Φ» = log 3/log 2; s. [1911: 11, 38]).

SIR THOMAS COOK (/828/ – *The Curves of Life* (1914)) räumte in seinen biologischen Untersuchungen der *logarithmischen Spirale* eine zentrale Stellung ein; das in ihr verborgene Φ-Verhältnis erscheint für ihn in der Natur omnipräsent. Ähnlich geht SIR D'ARCY THOMPSON (/829/– *On Growth and Form* [1917]) in der Suche nach mathematischen Gesetzen des biologischen Wachstums auf die Φ-Zahl in der logarithmischen Spirale ein (1983: 227 ff.). J. HAMBIDGE findet den

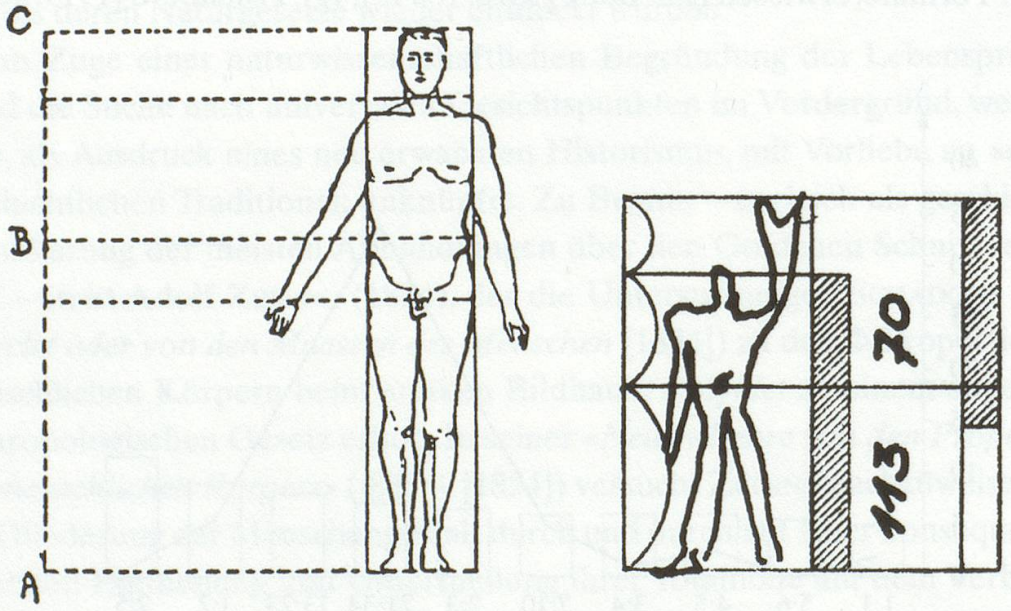


Fig. 140: (Links) A. Zeising, *Neue Lehre von den Proportionen.*
(Rechts) Le Corbusier, MODULOR

Goldenen Schnitt überdies in Riss-Schemata griechischer Vasen, in ägyptischen Bas-Reliefs (/842/ – *Dynamic Symmetry* [1917]) sowie im Bau griechischer Tempel vor (/843/ – *The Partenon* [1924]).

Schliesslich oblag es Matila GHYKA (/836/ – *Esthétique des proportions* [1927]) die verschiedentlichsten Meinungen zu sammlen und zu einer Gesamtschau des Goldenen Schnitts in Natur und Kunst zu vereinen. Die Wirkung seines Buches war – zumindest in Frankreich – beträchtlich (6 Aufl. bis 1934) und wurde durch die nachfolgenden Publikationen aufrechterhalten: /837/ – *Le Nombre D'Or* (1931), /838/ – *Essai sur le rythme* (1938), /839/ – *The Geometry of Art and Life* (1946). Es waren gerade diese Bücher, welche auf *Le Corbusier* einen nachhaltigen Einfluss ausübten und seinen kunsttheoretischen Konzepten im Rahmen des «Purisme» eine Bestätigung und mathematische Schlüssigkeit vermittelten (s. u.).

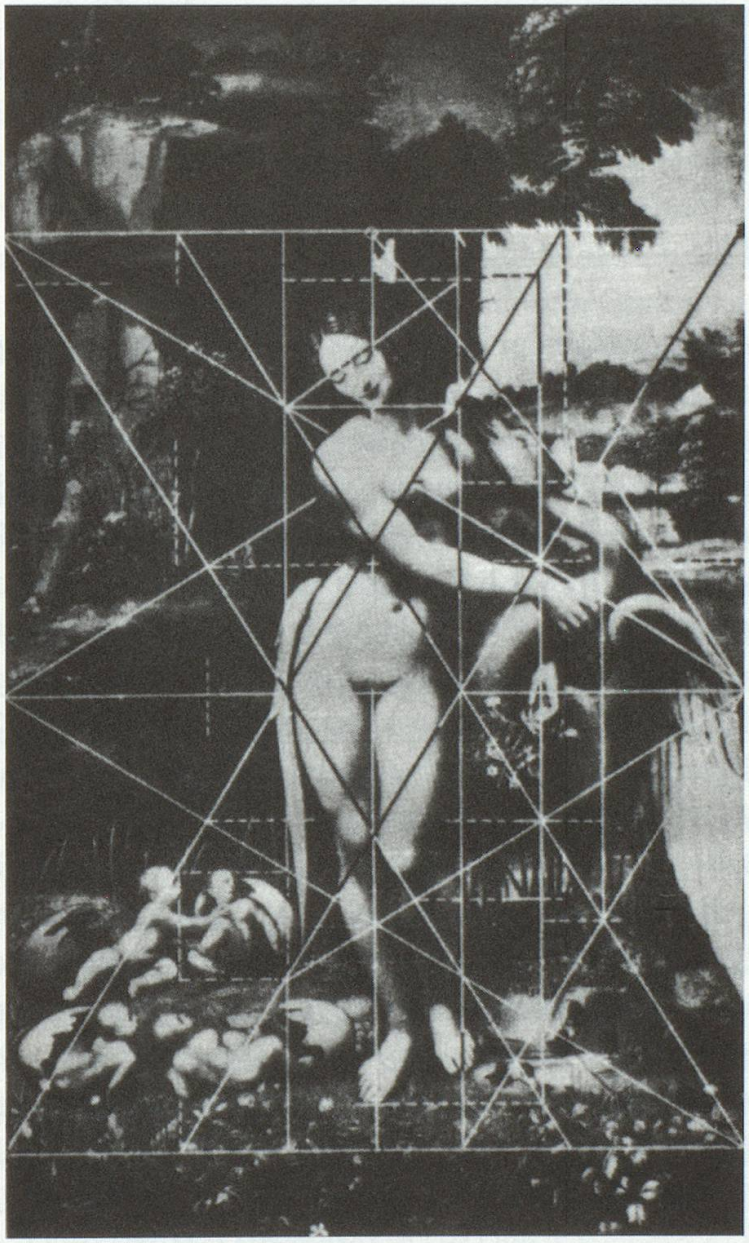


Fig. 141: *Harmonic Analysis of a Renaissance Painting* (aus: GHYKA, 1946:152)

Nachdem Ržiha (1883) die Steinmetzzeichen der mittelalterlichen Bauhütten geometrisch durch komplizierte Rasterkonstruktionen zu deuten versucht hatte und in diesen Rastern durchwegs auf Φ-Proportionen zu stossen glaubte (s. dazu Ghyka [1946: 120 ff.]), bildete sich innerhalb der Kunstwissenschaft eine Forschungsrichtung, welche sich vornehmlich damit beschäftigte, in Gemälden und Skulpturen aller Epochen nach mathematischen Gesetzmässigkeiten der Komposition zu suchen und diese in aufwendigen «tracés régulateurs» zu dokumentieren. Je nach Dogma huldigten Vertreter dieser Richtung beliebig gezogenen Rastern mit der Präponderanz von Hexagonen, Pentagonen, des Goldenen Schnitts usw., zuweilen auch von harmonikalen Proportionen (/834/ Funcke-Hellet [1932], /860/ Moessel [1938], /858/ Elisabeth Maillard [1960]; /841/ Hagenmaier [1963: 53]; vgl. den Überblick bei Ghyka [1946: 149 ff.]).

Die Debatten, welche seit den dreissiger Jahren die Entwicklung einer «*Esthétique Scientifique*» begleiteten, trieben unter dem Einfluss solcher Kräfte bisweilen seltsame Blüten (vgl. den Bericht /851/ *2e Congrès International d'Esthétique et de Science de l'Art*, Paris 1937; zur Kontroverse zwischen «Goldenen Schnittlern» und «Harmonikalen» s.: Haase: «Der Missverstandene Goldene Schnitt» [1975]; ferner Hagenmaier [1963: 7], kritisch: /844/ Hartlaub [1940/1963: 68 f.]).

4. Der Anwendung des Goldenen Schnitts *in der Musik* war stets der Umstand entgegengestanden, dass Φ keine harmonische Proportion darstellt und somit keiner harmonischen Saitenteilung entspricht. Wollte man dennoch den Goldenen Schnitt als harmonikales Grundprinzip etablieren, so wurde auf *Zarlinos* (unvollständige) Intervallfolge verwiesen (1558; als Fibonacci-Reihe: 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, – Unisonus, Diapason, Diapente, grosse Sexte, kleine Sexte; s. dazu Cleyet-Michaud [1973: 93]). Zwangsläufig konnte die Φ-Proportion nur durch «Zurechtbiegen» (meistens als kleine Sext, 8:5) mit harmonikalem Sinn befrachtet werden (vgl. Zeising [1855], Boesenberg [1911], Ghyka [1927: 57]); freilich ist eine Grundlegung der Harmonik ausgerechnet auf der kleinen Sexte – als «Goldenem Schnitt» – reichlich abstrus.

Auf dem Gebiet der musikalischen Komposition hingegen, in der Proportionierung der Abschnittslängen – gleichsam der formalen Architektur der Musik –, bot sich die Fibonacci-Reihe als regelndes Mass an; die Forschung hat einige Aspekte dieses Phänomens in der Musikgeschichte untersucht (s. /955/ Warren: «Brunelleschi's Dome and Dufay's Motet [1973], /934/ Neuwirth [1979] zu Johann Jakob Fux' *Te Deum* K 270; Studien, die besonders neue Musik betreffen: /926/ Kramer: «The Fibonacci Series in 20th Century Music» [1973], /944/ Pascoe: *Golden Proportion in Musical Design* [1973], /947/ Rogers: *The Golden Section in Musical Time* [1977]; ferner /917/ Hofmann: *Goldener Schnitt und Komposition* [1973]).

5. In der *Architektur*, in welcher das Streben nach *Proportioniertheit* seit je das (von A. CHOISY [1899] und A. THIERSCH [1904] in Erinnerung gerufene) zentral gestalterische Prinzip beinhaltete, wetteiferten unterschiedliche geometrische Doktrinen um die Vorrangstellung einer «richtigen Lösung» – jeweils im Kontext einer adäquaten kunstphilosophischen Idee. In seiner umfassenden Studie geht dazu V. NAREDI-RAINER folgendermassen ein (1982: bes. 215 f.): «Obwohl der Vorgang der geometrischen Bemessung in jeder Phase ohne weiteres nachzuvollziehen ist, folgt doch kein Schritt als konstruktionsimmanent einzig möglicher dem vorhergehenden, sondern wird jeweils von der übergeordneten Kompositionsidee bestimmt. Diese wesentliche Tatsache (...) erklärt letzlich das Scheitern aller Versuche, für die Architektur ganzer Zeitalter eine bestimmte geometrische Konstruktion, welcher Art auch immer, als generell gültigen Schlüssel nachzuweisen, dessen Kenntnis und Anwendung allein den Entwurf eines qualitätsvollen Bauwerkes garantiert hätten.» Zu den traditionellen, auf ganzzahlige, zuweilen harmonikale Proportionen beruhenden Verfahren (was schon rein bautechnisch durchaus sinnvoll sein konnte) gesellte sich das besonders von *Ghyka* propagierte Verhältnis des Goldenen Schnitts. M. BORISSAVLIÉVITCH, der in /972/ – *Les théories de l'architecture* (1926) die unterschiedlichen Proportionsmethoden in der Architekturgeschichte einer kritischen Würdigung unterzogen hatte, bekannte sich (in /822/ – «*L'esthétique scientifique*» [1937]) ebenfalls zum Goldenen Schnitt (s. auch /973/ – *Le nombre d'or* [1952]).

Für *Le Corbusier*, der sich seit seinen Anfängen in La Chaux-de-Fonds (unter dem Einfluss von *Choisy*) mit den Problemen der Proportionierung von Bauwerken auseinandergestzt hatte, bildete der «tracé régulateur» in (geometrischer) Verbindung mit dem Goldenen Schnitt ein wesentliches gestalterisches Mittel (s. die Studie zur Fassadengliederung der *Notre-Dame* in Paris in *Le Corbusiers* frühesten *Carnet* [I: 113] aus dem Jahre 1915 sowie eine ähnliche Skizze in /982/ CHOISY [1899: II, 404]). Als Le Corbusier 1917 in Paris als Maler eine neue Karriere beginnt, werden derartige Gesetze in seinen Gemälden virulent; diese bilden ein formgebendes Kriterium des von ihm mitbegründeten Stils des «*Purisme*»: «Deux ressources mathématiques y sont exploitées: le lieu de l'angle droit, la section d'or» (L-C: *ModI* [1950: 27]).

Schon im Geleitwort von «*L'Esprit Nouveau*» (Nr. 1, 1920), herausgegeben von *Le Corbusier* und *Amadée Ozenfant*, stehen die folgenden Sätze: «Pour faire comprendre par un exemple d'ordre de vérité auquel on aboutit, nous citerons les résultats des recherches de l'un de nous sur la ‹Section d'Or›. La ‹Section d'Or› est un rapport mathématique fort simple. L'expérience de laboratoire a montré qu'elle a cette particularité de satisfaire nos exigences esthétiques» (ib.: Vw).

Die Lektüre von GHYKA (1927) hat *Le Corbusier* schliesslich das Wesen des Goldenen Schnitts systematisch und historisch näher gebracht: «Quand, bien des

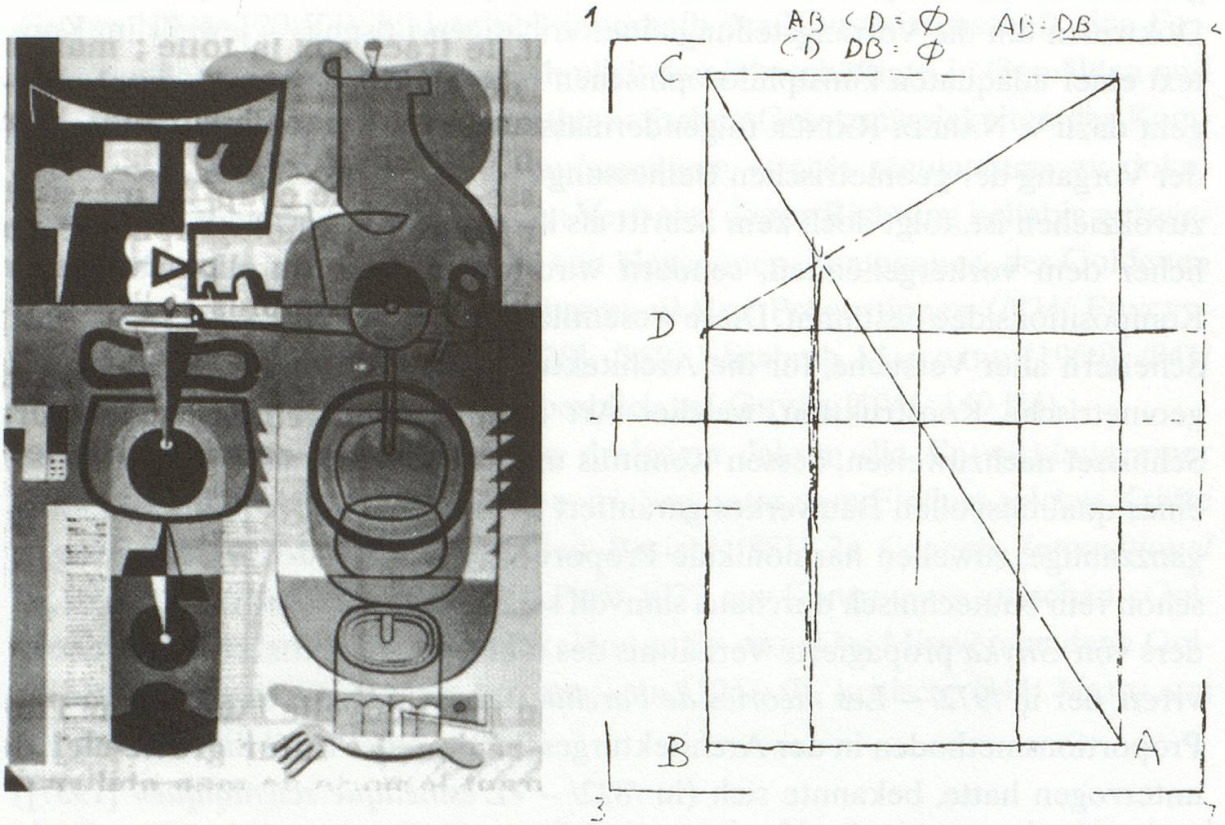


Fig. 142: Le Corbusier: Peinture (ModI:215)

années après son article de ‹L'Esprit Nouveau›: ‹Les Tracés Régulateurs› (1921), apparaissent les livres de Matila Ghyka sur les proportions dans la nature et dans l'art et sur le nombre d'or, il [= *L-C*] n'était pas préparé pour pouvoir y suivre pratiquement la démonstration mathématique (l'algèbre des formules); par contre, les figures qui, en fait, sont l'objet considéré, lui sont instantanément saisissables» (*Mod I*: 29). Durch ein Zitat, welches Le Corbusier explizit von Ghyka (1927) übernahm, wird einsichtig, dass Le Corbusier von den anthropometrischen Anwendungen des Goldenen Schnitts durch *Zeising* Kenntnis erhielt, was der Entwicklung des MODULOR den entscheidenden Impuls verlieh: «Les corps des animaux et des insectes décèlent aussi, dans beaucoup de leurs proportions le thème de la section dorée; dans les jambes de devant du cheval, de même que dans l'index de la main humaine, parait la série des trois termes consécutifs d'une série – descendante; cette triade est très importante, car du fait que son plus grand terme est égal à la somme des deux autres, elle réintroduit la dualité, le partage symétrique dont elle était à priori la contradiction; ceci aura son intérèt en architecture» (Ghyka, zit. in: L-C: *Mod I* [1950: 68]).

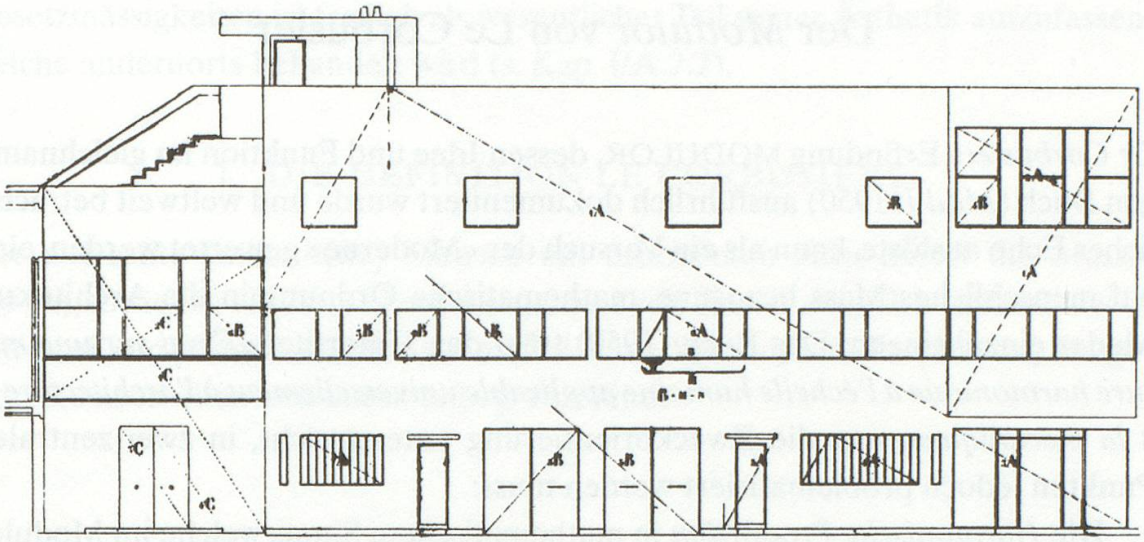


Fig. 143: Le Corbusier: Hôtel à Auteil (1921)

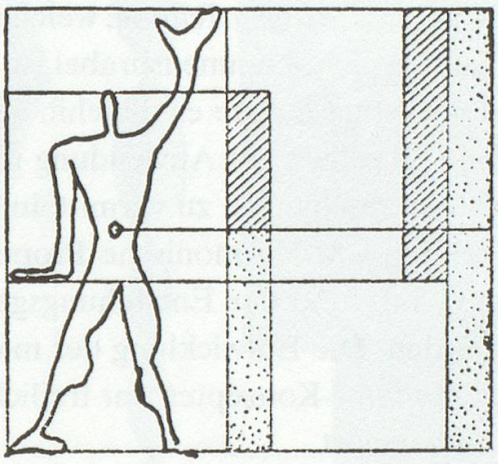


Fig. 144: Le Corbusier: MODULOR (1948)

Es hat sich gezeigt, dass auch *Xenakis* im Laufe seiner Tätigkeit bei Le Corbusier die im *Modulor* inkorporierte Lehre des Goldenen Schnitts vollumfänglich rezipiert hatte und diese in der Architektur wie in der musikalischen Komposition als formales und ideelles Grundprinzip zur Anwendung gelangen liess (s. dazu Kap. I/A.2).

Exkurs 2
Der *Modulor* von Le Corbusier

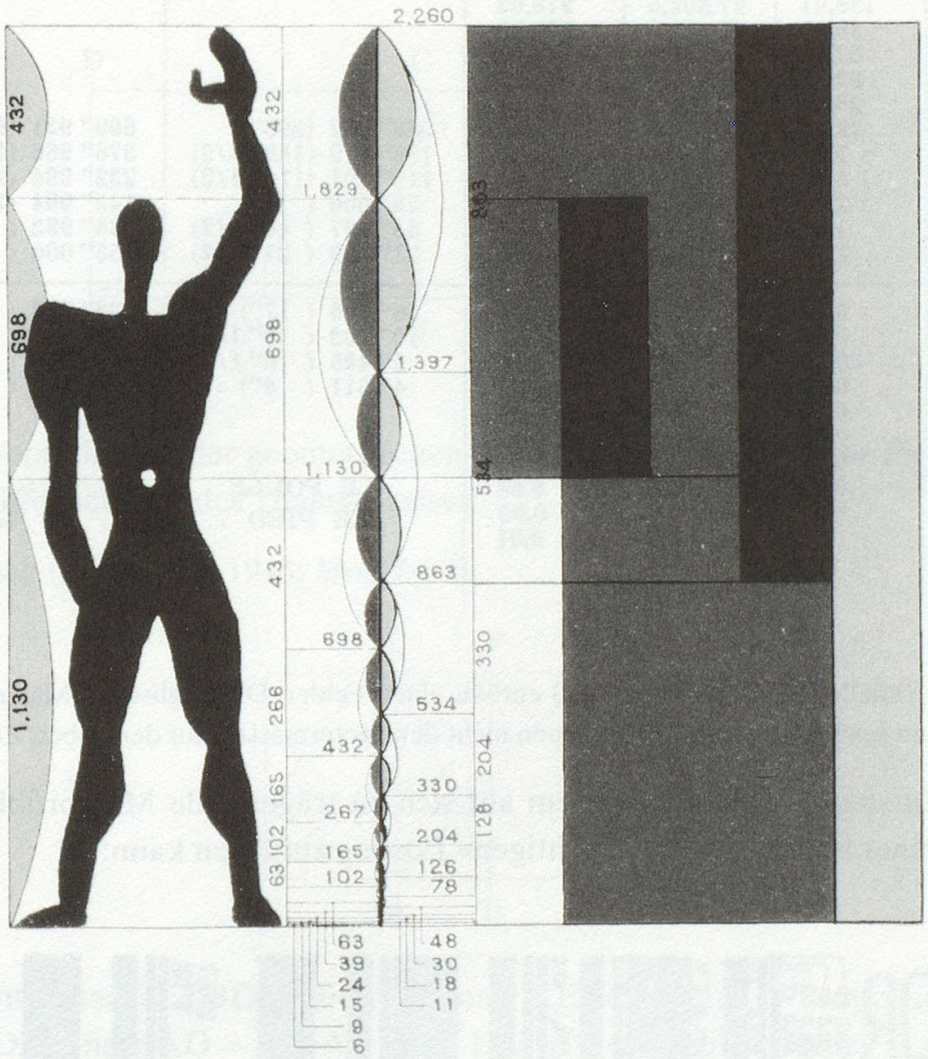
*Le Corbusier*s Erfindung MODULOR, dessen Idee und Funktion im gleichnamigen Buch (*Mod I*; 1950) ausführlich dokumentiert wurde und weltweit beträchtliches Echo auslöste, kann als ein Versuch der «Moderne» gewertet werden, eine auf menschliches Mass bezogene, mathematische Ordnung in die Architektur wieder einzubringen. Das Buch (1950) trägt den Untertitel «*Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*», was die Zweckorientierung unterstreicht, in zwei zentralen Punkten jedoch problematisiert werden muss:

1. Die *Harmonische Proportion* in mathematischem Sinne, welche im Modulor dank der Verschränkung *zweier* Skalen miteinander auftritt – und nur dadurch entstehen kann –, wird von *Le Corbusier* unbefangen zum Anlass genommen, das «harmonische Mass» in emphatischem Sinne, als ein Harmonie stiftendes Mass, aufzufassen. Das vordergründige Regelungsprinzip des *Modulor* fusst allerdings auf der *Stetigen Teilung*, welche für sich betrachtet mit der Harmonischen Teilung nicht kommensurabel ist. Für eine in kosmischer Harmonie gründender Emphase wäre es ohnehin gleichgültig, welches mathematische Prinzip im einzelnen zur Anwendung gelangt, sofern es Stetigkeit und Proportionalität anschaulich zu vermitteln vermag. Dass aber nun tatsächlich Stetige Teilung *und* Harmonische Proportion in einem System vereinigt wurden, darf aufgrund der Entstehungsgeschichte als glückliche Fügung betrachtet werden. Die Entwicklung der mathematischen und geometrischen Basis des *Modulor*-Konzeptes war freilich dornenvoll und bleibt in einigen Punkten unaufgelöst.
2. Das Postulat vom «menschlichen Mass» – wiederum die begriffliche Trennung der mathematischen von der emphatischen Komponente umgehend – reduziert sich schlicht auf die These, dass allein schon die numerische Festlegung der im Laufe ihrer «Errechnung» wiederholt neu definierten Skala (nach einer letztlich völlig willkürlich definierten Mannesgrösse) die Bestimmung ergonomisch korrekter Masszahlen hervorzubringen vermag. Wenn Le Corbusier zudem daran festhält, dass kraft dieses Vermögens allgemein eine «menschliche», will sagen eine «humanitäre» Dimension im Bau a priori verankert sei, so begründet er aller Rationalität zum Trotz einen Mythos, deren Vorgänger in einer sich zu allen Zeiten manifestierenden Tradition der *Anthropometrie* und des *Anthropomorphismus* zu suchen sind.

Was hier interessiert, ist die Stichhaltigkeit des logisch-mathematischen Instrumentariums; die emphatische Überhöhung der diesem Instrumentarium eigenen Gesetzmässigkeiten ist freilich als wesentlicher Teil seiner Ästhetik aufzufassen, welche andernorts behandelt wird (s. Kap. I/A.2.2).

1. DIE DEFINITION LE CORBUSIERS

Der aufrechte (männliche) Mensch mit erhobenem Arm liefert die *Masse*: *226* cm, sowie die Hälfte, *113* cm. Ausgehend von diesen zwei Grundmassen werden zwei komplementäre Skalen im *Goldenen Schnitt* (in Φ-Proportion) festgelegt, die nach oben und unten unbegrenzt sind:



Nach Le Corbusiers Vorstellung sollte der *Modulor* in zwei Gebrauchsformen zur Verfügung stehen:

– als *Wertetabelle*, von Null aufsteigend die Werte parallel in Meter wie in englischen Foot anzeigend:

VALEURS

Les valeurs numériques illimitées :

VALEURS EXPRIMEES EN SYSTEME METRIQUE				VALEURS EXPRIMEES EN SYSTEME PIED-POUCE	
SÉR. ROUGE : RO		SÉR. BLEUE : BL		SÉR. ROUGE : RO	SÉR. BLEUE : BL
Cent.	Mètres	Cent.	Mètres	Pouces	Pouces
95.280,7	952,80				
58.886,7	588,86	117.773,5	1.177,73		
36.394,0	363,94	72.788,0	727,88		
22.492,7	224,92	44.985,5	449,85		
13.901,3	139,01	27.802,5	278,02		
8.591,4	85,91	17.182,9	171,83		
5.309,8	53,10	10.619,6	106,19		
3.281,6	32,81	6.563,3	65,63		
2.028,2	20,28	4.056,3	40,56		
1.253,5	12,53	2.506,9	25,07	304" 962 (305")	609" 931 (610")
774,7	7,74	1.549,4	15,49	188" 479 (188" 1/2)	376" 966 (377")
478,8	4,79	957,6	9,57	116" 491 (116" 1/2)	232" 984 (233")
295,9	2,96	591,8	5,92	72" 000 (72")	143" 994 (144")
182,9	1,83	365,8	3,66	44" 497 (44" 1/2)	88" 993 (89")
113,0	1,13	226,0	2,26	27" 499 (27" 1/2)	55" 000 (55")
69,8	0,70	139,7	1,40	16" 996 (17")	33" 992 (34")
43,2	0,43	86,3	0,86	10" 503 (10" 1/2)	21" 007 (21")
26,7	0,26	53,4	0,53	6" 495 (6" 1/2)	12" 983 (13")
16,5	0,16	33,0	0,33	4" 011 (4")	8" 023 (8")
10,2	0,10	20,4	0,20		
6,3	0,06	12,6	0,12		
3,9	0,04	7,8	0,08		
2,4	0,02	4,8	0,04	LE POUCE	2 ‰ 539
1,5	0,01	3,0	0,03	LE PIED	30 ‰ 48
0,9		1,8	0,01		
0,6		1,1			
etc...		etc...			

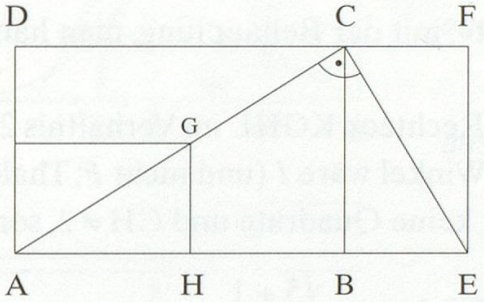
NB: Diese Tabelle (repr. aus Mod I: 84) enthält einen Fehler: Die englischen Masse sind alle eine Zeile zu hoch gesetzt und entsprechen nicht den Metermassen auf der selben Zeile.

– als *Massband*, welches, bequem auf sich zu tragen, alle Massprobleme am Bau einer spontanen und «richtigen» Lösung zuführen kann:

Aus diesem Vorrat an Masswerten lassen sich beliebig Masse entnehmen und auf das jeweilige Dimensionierungsproblem anwenden, in der Gewissheit, dass jegliche Kombination a priori ein «harmonisches» Ganzes ergeben – nach «menschlichem Masse». Dies liegt primär an der additiven Komplementarität der *Modulor*-Masse – durch die inhärente Stetige Teilung bedingt –, welche in freiem Umgang Kombinationsspiele aller Art zulässt.

2. LE CORBUSIERS VERSUCHE EINER GEOMETRISCHEN KONSTRUKTION

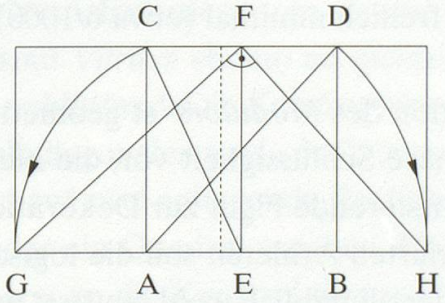
Ursprung aller geometrischen Missverständnisse bei Le Corbusier ist das von ihm aufgestellte Prinzip des «*lieu de l'angle droit*» (*Mod I*: 26 ff.): Die Proportion des Rechtecks wird durch parallele Diagonalen gewahrt sowie durch senkrechte Diagonalen ins Reziproke gesetzt. Das Φ-Verhältnis stellt sich allerdings nur dann ein, wenn das *erste* Rechteck diese Proportion schon aufwies:



$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BE} \left[= \frac{AH}{HG} \right]$$

Der Hauptfehler in der geometrischen Konstruktion der *Modulor*-Figur liegt in der Nichtbeachtung des Thales-Kreises:

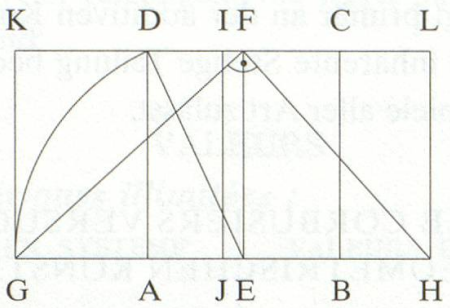
1. Versuch (25. August 1943; *Mod I*: 37):



Gegeben: Quadrat ABDC. Die Diagonale CE bildet eine Φ-Proportion zu AB auf *G*. Diagonale AD = $\sqrt{2} \cdot$ AB → H. Der «Tracé régulateur» GFM soll einen Rechten Winkel in *F* bilden: da jedoch

$$\frac{GA}{AB} = \Phi - 1 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \neq \frac{AB}{EH} = \frac{2}{2\sqrt{2}-1}, \text{ ist dies falsch!}$$

2. Versuch (26. Dezember 1943; s. *Mod I*: 38 ff.), an welchem Le Corbusier, trotz Einwänden, festhielt:



Gegeben: ABCD; Einführung Φ, wie oben → CE → G.

Bildung des «tracé régulateur» mit Rechtem Winkel in *F* → *H*, wobei

$$\frac{GE}{EF} = \frac{EF}{EH}$$

Nun wird GH im Punkt *J* «halbiert», mit der Behauptung, man habe zwei *Quadrate*: GJIK, JHLI ≅ ABCD.

1. Wäre dies der Fall, so wäre das Rechteck KGHL im Verhältnis 2:1; der einzig mögliche Ort für den Rechten Winkel wäre *I* (und nicht *F*; Thaleskreis!).
2. Die «Quadrate» sind in der Tat keine Quadrate und GH ≠ 2, sondern:

$$GH = GE + EH, \text{ für } AB = 1, GB = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

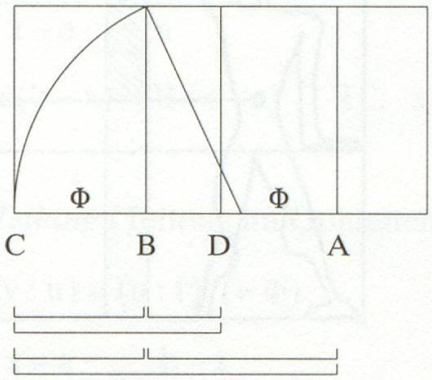
$$GH = [\Phi - {}^1/_2] + [\frac{1}{\Phi - {}^1/_2}] = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9}{10}\sqrt{5} = 2{,}0125$$

Somit ist diese Konstruktion falsch und beruht auf einer optischen Täuschung; der Fehler ist freilich minimal (etwa 6/1000).

Eine derartige Konstruktion des *Modulors* ist geometrisch generell nicht möglich und spiegelt eine innere Schlüssigkeit vor, die nicht vorhanden ist. Damit wird die gesamte, geometrisierende Figur zur Dekoration; der optische Reiz des im Quadratnetz inkorporierten Athleten soll die logische Insuffizienz verdrängen – was sich Le Corbusier allmählich wohl bewusst war (s. u.). Am *mathematischen Prinzip* des *Modulors*, insofern es die Stetige Teilung betrifft, ändert dies allerdings nichts; dessen Stimmigkeit ist davon ohnehin unberührt.

In der letzten zeichnerischen Fassung des *Modulors* durch Le Corbusier werden die zwei «verwandten» Φ-Reihen korrekt konstruiert, wobei die Konstruktion des 2. Versuchs nur teilweise übernommen werden konnte:

Alt:

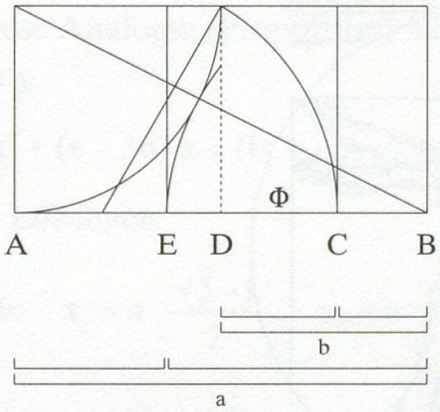


Ein Quadrat in *zwei* Quadrate (= Rechteck 2:1) einführen, so dass ihr Abstand = Φ, das heisst

$$\frac{AC}{AB} = \Phi = \frac{AB}{BC}; = \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{BD} = \Phi$$

usw.

Neu:



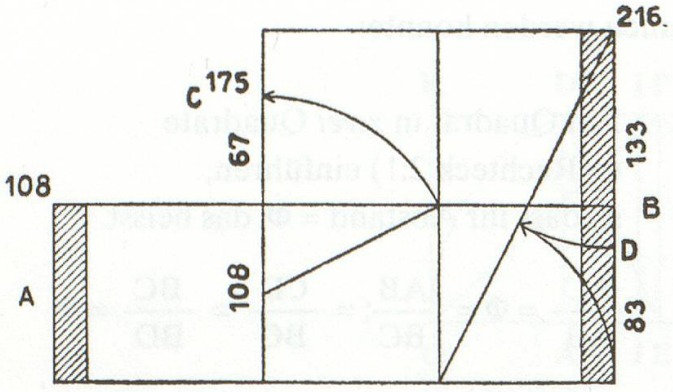
Rechteck 2:1 wird halbiert: zwei Quadrate,

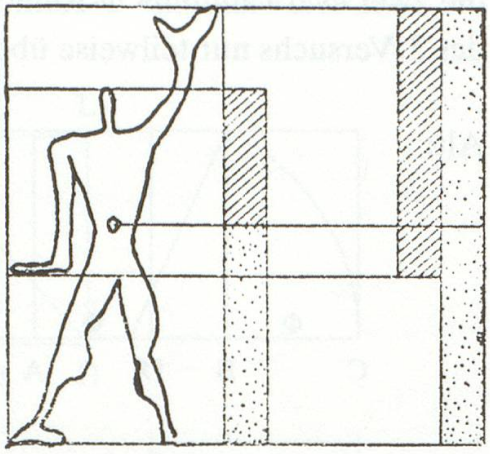
aus a: $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{AE} = \Phi$

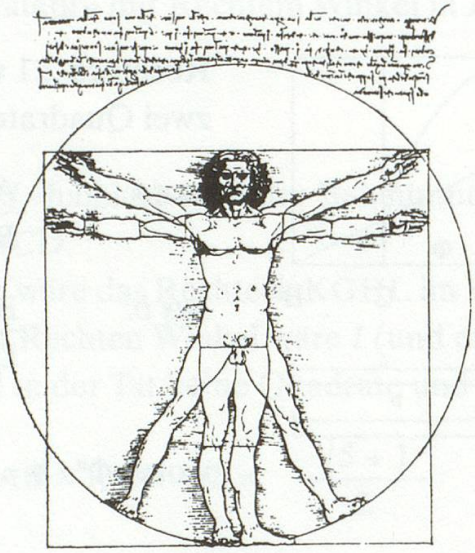
aus b: $\frac{BD}{DC} = \frac{DC}{BC} = \Phi$

wobei $\Phi^n \cdot b = \frac{\Phi^n \cdot a}{2n}$, (a, b, den zwei Reihen entsprechend)

Der Dreh, mit welchem Le Corbusier operiert, um seinen «homme-le-bras-levé» entgegen den konstruktiven Erfordernissen dennoch mit einem Quadrat zu umschliessen – und hiermit *Vitruvs* «homo ad quadratum» neu auferstehen zu lassen –, ist schliesslich verblüffend: Die Konstruktion der zwei Φ-Proportionen, mittels Klappung der Halbdiagonalen sowie der Doppeldiagonalen auf die Längsseite des Rechtecks, wird auf zwei anliegende Rechtecke verteilt, welche zusammen logischerweise wieder ein Quadrat ergeben. Damit scheinen logische und ästhetische Anforderungen an die Konstruktion in Übereinstimmung gebracht zu sein: Die Bedingung dazu bildete allerdings – für Le Corbusier nicht leicht zu verwinden – der Verzicht auf den vielsagenden «lieu dit de l'angle droit»:



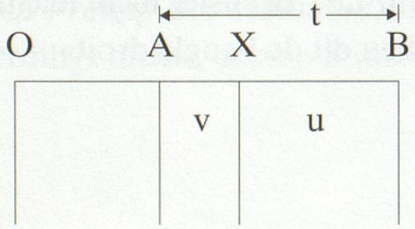




3. HARMONISCHE TEILUNG UND GOLDENER SCHNITT

Gegeben sei eine Zahlengerade mit beliebigen Punkten A, B, welche als Strecke a, b, vom Nullpunkt aus gedacht seien: a = OA, b = OB.

Durch eine mathematische Teilung soll die Strecke x bestimmt werden; als Medietät formuliert (was der klassischen, dreigliedrigen Analogie entspricht): ein inneres Glied x ist gesucht, zwei äussere a, b, sind gegeben:



$$a = OA,\ b = OB,\quad \frac{XB}{XA} = \frac{OB}{OA} = \Phi$$

$$t = b - a = u + v$$

$$u = b - x$$

$$v = x - a$$

Harmonische Teilung:

Def.: $(u : v) = (b : a)$ (= 'H')

$$\frac{b-x}{x-a} = \frac{b}{a}$$

$$a\,(b-x) = B\,(x-a) \qquad \text{'H':}\ x = \frac{2ab}{a+b}$$

Stetige Teilung (Teilung im Goldenen Schnitt):

Def.: $(v : u) = (u : \bar{t})$ $(= \Phi)$

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{b-x}{b-a}$$

Wird diese Analogie (Proportion) ausmultipliziert, erhält man die quadratische Geichung

$$x^2 + (a-3b)\,x + (b^2 + ab - a^2) = 0$$

mit den Lösungen

$$\Phi: \quad x_1 = a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad x_2 = a\,\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

Zum «harmonischen» Mass des *Modulors*: Kann eine harmonische Teilung zugleich im Goldenen Schnitt sein? In diesem Fall ist die Antwort ja: Entscheidend ist nur die Wahl des Nullpunkts 0; daraus folgt das Weitere: Die Strecken a, b weisen schon unter sich eine Φ-Proportion auf.

Harmonische Teilung: Stetige Teilung:

$$\frac{u}{v} = \frac{b}{a} = \frac{u}{v} = \frac{t}{u} \qquad = \Phi$$

$$= \frac{t}{u} = \frac{b}{a} = \Phi \qquad \Rightarrow\ b = \Phi \cdot a$$

Die harmonische Teilung teilt die Zwischenstrecke im Verhältnis der äusseren Strecken. Wenn die äusseren im Φ-Verhältnis zueinander stehen, ergibt sich logischerweise für die innere Teilung dasselbe Verhältnis.

Mathematisch interpretiert, handelt es sich beim *Modulor* um eine stetig wachsende Skala, die aus der Verkettung zweier Einzelskalen entsteht, die jeweils aufgrund einer Φ-Proportion anwachsen und untereinander durch das 1:2-Verhältnis bestimmt sind.

Es handelt sich hiermit um zwei *geometrische Reihen*, darstellbar durch:

1. (rot) $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots\ aq^n$ wobei n = ganze Zahl (±)

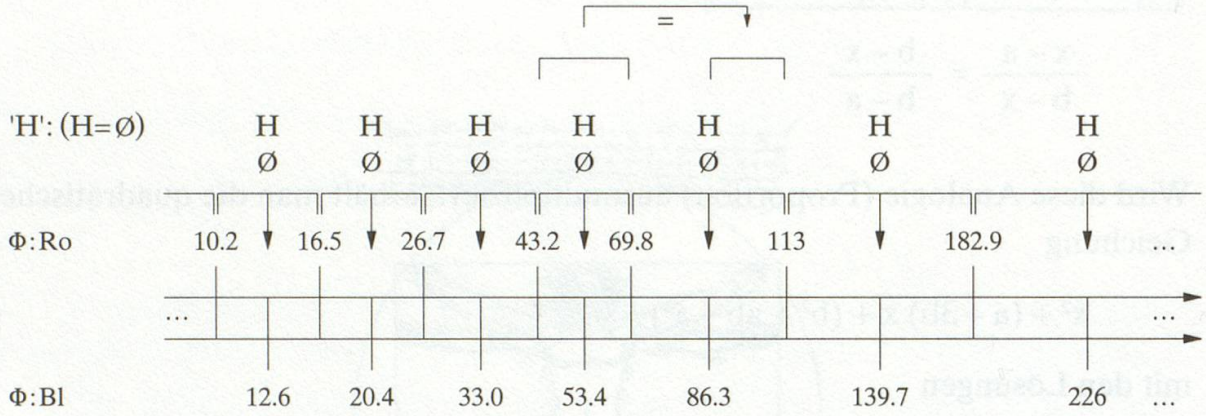
2. (blau) $b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3,\ \ldots\ bq^n$ $q = {}^1\!/_2\,(\sqrt{5}+1) = \Phi$

und $2a = b$ (def.)

numerisch: $a = 113$ cm

$b = 226$ cm

Die Doppelskala in schematischer Darstellung, numerisch:



Diese Skala hat «wunderliche» Eigenheiten:

– Bedingt durch das doppelte Verhältnis der Skalen (*Ro, Bl*) untereinander, teilt die *Bl* jeweils die Intervalle der *Ro* in Φ-Proportion und zugleich in Harmonischer Proportion ('H'). Umgekehrt ist dies nicht möglich: Die *Ro* teilt *Bl*-Intervalle weder in Φ- noch in 'H'-Proportion, denn die Harmonische Teilung ist keine stetige Teilung, was die Voraussetzung wäre dazu.

	Ro:	Φ^{-1} Δ a		
	Bl:	$\Delta \cdot 2\Phi^{-1}$ $\Delta \cdot \Phi^{-1}$		
	Bl	(2 : 1)	Ro	
	226		113	
226.0	2a		a	113.0
139.7	$\Phi^{-1}2a$		Φ/H' : $x = a + (a-b)\,\Phi^{-1}$	
86.3	$x = \Phi^{-2}2a$		$x = a + (\Phi^{-1}a - a)\Phi^{-1}$	86.3

$$(\Phi^n = \Phi^{n-1}+1) \qquad = -(\Phi-2)\,2a$$

$$= 4a - 2\Phi a = a - \Phi a + 2a - \Phi a + a$$

$$= a - (F-2)a - (F-1)a = a + \Phi^{-2}a - \Phi^{-1}a$$

$$x = a + (\Phi^{-1}a - a)\Phi^{-1}$$

- Das «obere» Teilungsintervall («Maior») ist kongruent mit dem nach unten nächstfolgenden Ganzintervall der *Ro* (s. Klammern und Pfeile).
- Mit der Etablierung einer zweifachen Φ-Reihe, durch Verdoppelung der Masse, wird jedoch ein von Le Corbusier wohl nicht besonders präferiertes Verhältnis von 2:1 omnipräsent; ($aq^n : bq^n$) ist für gemeinsames n = (1:2). Der Modulor muss somit von einem behutsamen Umgang begleitet werden, sollen nicht «unerwünschte» Proportionen im Projekt auftauchen.

4. DIE ADÄQUATION DER METER- UND ZOLL/FUSS-SYSTEME

Grundsätzlich sind das europäische und das britische Masssystem numerisch inkommensurabel. Eine pragmatische Lösung wurde bei Le Corbusier in der Vergrösserung der ursprünglich auf 175 cm festgelegten Menschengrösse (L-C: *Mod I*: 44; «une taille plutôt française») auf neu *6 engl. feet* gefunden: «… les ‹beaux hommes› … ont toujours SIX PIEDS de haut» (*Mod I* : 56).

Mit einer für praktische Belange weitaus genügenden Näherung ergibt sich nach diesem Rechenmodus in der Tat das *Modulor*-Urmass von 2 x 113 cm, bei einer Körperlänge von 6 ft = 182.88 cm.

Der Fehler, welcher bei exakter Berechnung zu Tage tritt, lässt sich dennoch nicht wegeskamotieren, ist er doch durch die Inkommensurabilität der beiden Systeme bedingt:

1. Definition: Ausgangsmass: 226.0 cm (= 2 x 113.0 cm)

nach *Modulor*:

Körperlänge: 113.0 x Φ = 182.84 cm

2. Definition: Ausgangsmass: 6 ft

6' x 12 x 2.54 cm = 182.88 cm

Erlauben es die Umstände, auf letzte Präzision zu verzichten, so sind die erstaunlichen Koinzidenzen kaum gravierender als etwa die Unstimmigkeiten, welche bei Substituierung des Φ-Verhältnisses durch die Fibonacci-Zahlenreihe auftreten.

In diesem Sinne stellte Le Corbusier fest – dies unterstreicht durchaus die Bedeutung der «glücklichen Fügung» –, dass auf allen Stufen des *Modulors* die Zoll/Fuss-Zahlen sich metrisch «en chiffres plains» ausdrücken liessen, das heisst, dass sich die Zoll-Werte mit minimalen Rundungen auf *ganze* und halbe Zoll-Einheiten festlegen lassen:

On lit alors les équivalences suivantes :

Métrique	Valeur d'usage	Pied-pouce	Valeur d'usage
101,9 m/m	102 millimètres.	4"012	4"
126,02 —	126 —	4"960	5"
164,9 —	165 —	6"492	6 ½"
203,8 —	204 —	8"024	8"
266,8 —	267 —	10"504	10 ½"
329,8 —	330 —	12"98	15"
431,7 —	432 —	16"997	17"
533,9 —	534 —	21"008	21"
698,5 —	699 —	27"502	27 ½"
863,4 —	860 —	33"994	34"
et ainsi de suite...		et ainsi de suite...	

Ob diese Feststellungen auf die Praxis des Bauwesens abgestimmt seien, wo bereits vorhandene Normensysteme nationaler Prägungen gewichtige Hindernisse bilden, blieb lange Zeit kontrovers; jedenfalls hat sich der *Modulor* in der Bauwelt – man mag es aus ideellen Gründen bedauern – nicht durchgesetzt.

In theoretischer Hinsicht bleiben Unvereinbarkeiten weiterhin bestehen; das Ganze erweist sich als Mythos – die universale Harmonie in menschlichen Konstruktionen bleibt weiterhin mit einem Lemma behaftet.

Exkurs 3
Regelflächen, Hyperbolische Paraboloide und deren Statik

Regelflächen («surfaces reglées») sind allgemein gewölbte Flächen im Raum, die durch Geraden (= die *Erzeugenden*) durch Bewegung längs *Leitlinien* oder *Leitkurven* erzeugt werden. Durch jeden Punkt einer Regelfläche gehen somit eine oder zwei Geraden, welche eine Tangentiale bilden, die *ganz* in der Fläche liegen.

Beispiele für Regelflächen:
- das allgemeine *Konoid* (Fig. 1)
- Kegelfläche (Fig. 2)
- Zylinder (Fig. 3)
- das *einschalige Hyperboloid* (Drehparaboloid) (Fig. 4)
- das *Hyperbolische Paraboloid* (*HP*) (Fig. 5)

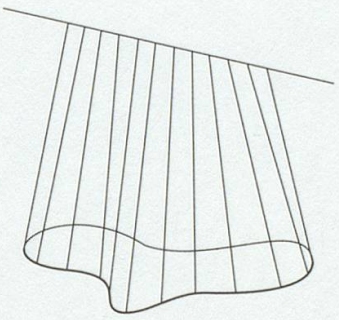


Fig. 1

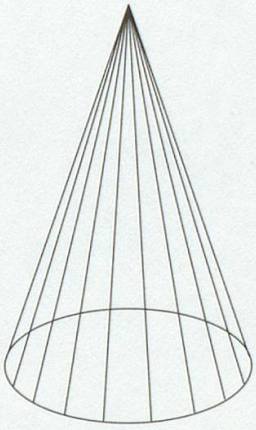


Fig. 2

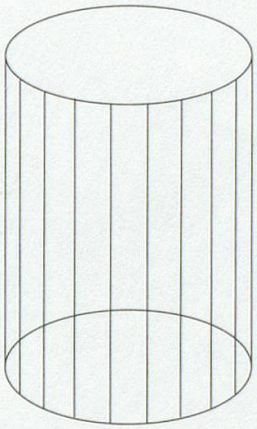


Fig. 3

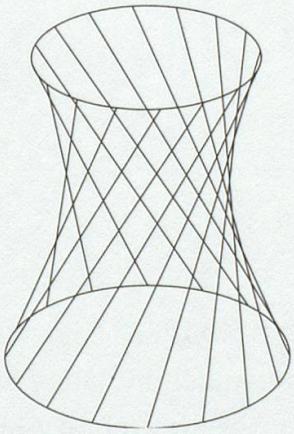


Fig. 4

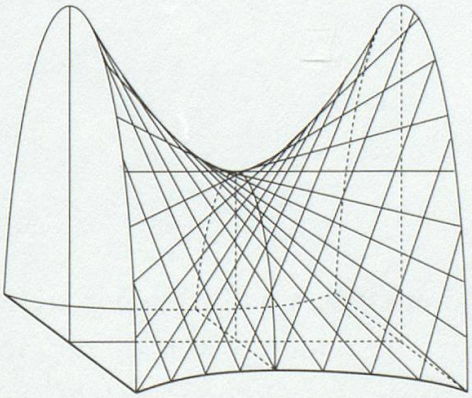


Fig. 5

Dabei handelt es sich bei obigen Beispielen um regelmässige Regelflächen, für die bestimmte Eigenschaften zutreffen: Sind die geradlinigen Erzeugenden alle parallel zu einer Ebene, spricht man von einer *Catalan-Ebene*.

- Wenn überdies alle Erzeugenden dieselbe Gerade schneiden, so erhalten wir ein *Konoid*. Ein *Konoid* ist eine Regelfläche, deren Erzeugende eine feste Achse (die Leitgerade) schneiden und zu einer festen Ebene (der Leitebene) parallel sind (Fig. 7).
- Handelt es sich bei den Leitlinien um drei Geraden, die zu zweien windschief sind, entsteht ein *Hyperbolisches Paraboloid* (Fig. 6). Das *Hyperbolische Paraboloid* ist ein Konoid mit zwei Achsen.
- Beim *Drehparalleloid* stehen die geradlinigen Erzeugenden windschief im Raum, es handelt sich also nicht um eine Catalan-Ebene; die Regelmässigkeit der Fläche entspringt seiner Entstehungsart durch Rotation um die Achse, zu der sie windschief stehen.

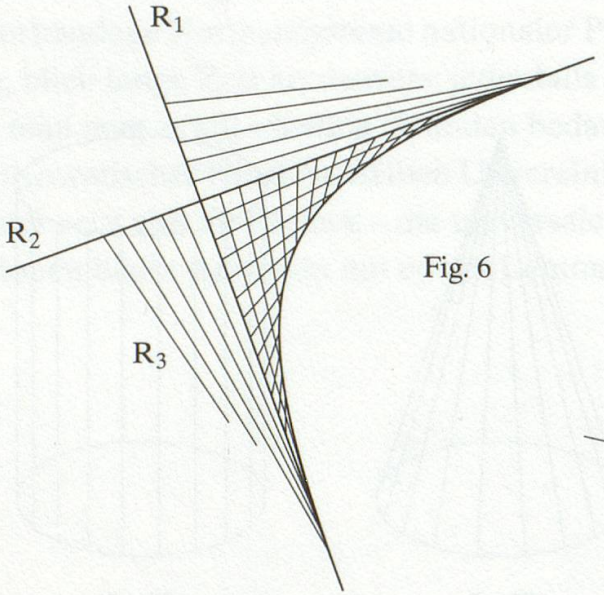


Fig. 6

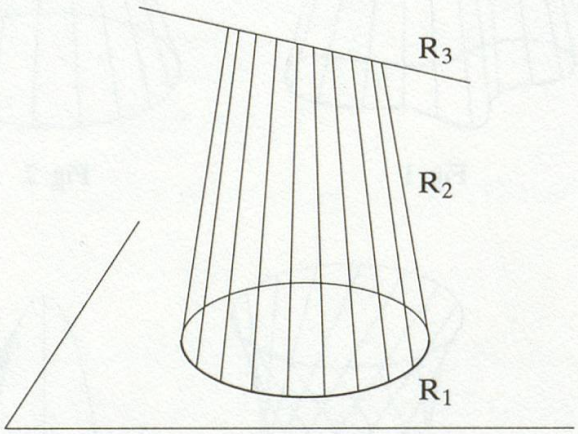


Fig. 7

Zu diesen geometrischen Merkmalen treten noch besondere Eigenschaften hinzu, welche den besonderen Reiz dieser Gebilde ausmachen: Das *Hyperbolische Paraboloid* sowie das *Drehparalleloid* sind in der analytischen Geometrie als *Flächen 2. Ordnung*, als sogenannte *Quadriken* darstellbar.

1. ANALYTIK DER FLÄCHEN 2. ORDNUNG

Ausgehend von der allgemeinen Gleichung 2. Grades mit drei Variablen x, y, z, (entsprechend den Raumkoordinaten):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2$$
$$+ \; 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ \; 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad /1/$$

a_{ij}: reell, Kartes. $\{0 \mid x; y; z\}$

wird eine Punktmenge beschrieben, welche eine Fläche 2. Ordnung, eine sogenannte *Quadrik* bildet.

Durch entsprechende *Hauptachsentransformation* wird die Gleichung umgewandelt, so dass sie keine gemischten Glieder mehr enthält (= Drehung des Koordinatensystems mit Verschiebung parallel zu den Hauptachsen des Körpers).

Wir erhalten somit Normalformen der Gleichung 2. Grades (zugleich subst. $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$):

$$b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 + b_4 = 0 \qquad /2/$$

oder $b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + x_3 = 0$ usw. /3/

Mit Hilfe der Normalformen lassen sich die Quadriken *klassifizieren* (s. /811/ REINHARDT/SOEDER [1982: I, 203]).

1.1 Hyperbolisches Paraboloid

Findet sich (auf /3/ rückführbar) folgende Normalform vor:

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_3^2}{b^2} - x_1 = 0 \qquad /4/$$

so erhalten wir als Flächen 2. Ordnung *Paraboloide*.

Für a = b sind dies Rotations- beziehungsweise symmetrische Paraboloide, die standardisiert unterschieden werden:

- Rotationsparaboloid: $x_1^2 + x_3^2 = 2x_2$ /5/
- *Hyperbolisches Paraboloid:* $x_1^2 - x_3^2 = 2x_2$ /6/

/6/: Schnittkurve durch Ebene («waagrecht») $x_2 = c$: $x_1^2 - x_3^2 = 2c$: = *Hyperbel*

Schnittkurve durch Ebene («senkrecht») $x_{3,1} = c$: $x_1^2 = 2x_2 + c^2$: = *Parabel*

Koordinatentransformation:

$$x_1 = x_1^{`},\ x_2 = x_2^{`} - \frac{c^2}{2},\ x_3 = x_3^{`} + c$$

$$x_3^{`} = 0,\ \underbrace{x_1^{`2} = 2x_2^{`}}_{\text{kein c! } \rightarrow \text{ Körper = Parallelverschiebung von Parabeln}} = \text{Parabel in Ebene } x_3^{`} = 0 \qquad /7/$$

Gesucht: G.O. {Scheitelpunkte aller Parabeln}:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{c^2}{2},\ x_3 = c, \qquad \text{durch Elimination c}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_3^2 = -2x_2 \qquad \rightarrow \text{wieder Parabel!} \qquad /8/$$

Wird eine Parabel /7/ parallel zu sich so verschoben, dass ihr Scheitel auf der Parabel /8/ wandert, so beschreibt sie das *Hyperbolische Paraboloid*.

Gleicherweise ist die umgekehrte Formulierung statthaft (/8/→/6/); man nennt dieses Gebilde eine *Sattelfläche*.

Untersuchung der *Tangentialebenen* im Flächenpunkt $\{c_1/c_2/c_3\}$:

$$\left| \begin{array}{lll} c_1x_1 \pm c_3x_3 & = & c_2 + x_2 \\ c_1^2 \pm c_3^2 & = & 2c_2 \end{array} \right|$$

$$\rightarrow (x_1 - c_1)^2 \pm (x_3 - c_3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - c_1 + x_3 - c_3)\,(x_1 - c_1 - x_3 + c_3) = 0 \qquad /9/$$

Lösung: zwei Geraden mit Schnittpunkt $c_i = x_i$

=> Die Tangentialebene eines *HP* hat somit mit diesem stets zwei sich schneidende *Geraden* gemeinsam.

1.2 Dreh-Hyperboloid (einschaliges Hyperboloid)

In Analogie zu oben erhalten wir aus der allgemeinen Quadriken-Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\text{: Kugel mit Einheitsradius} \qquad /10/$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\text{: } \textit{Drehhyperboloid} \qquad /11/$$

Schnittkurve durch Ebene $x_2 = 0$ («senkrecht»):

$$x_1^2 - x_3^2 = 1\text{: eine Hyperbel} \qquad /12/$$

Schnittkurve durch Ebene $x_3 = c$ («waagrecht»):

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 + c^2 \text{ ist ein Kreis, Radius} \geq 1,\ r = \sqrt{1 + c^2}$$

Tangentialebene:
Aus /4/ erhalten wir die Gleichung der Tangentialebene in einem Flächenpunkt $\{c_1, c_2, c_3\}$:

$$c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3 = 1 \qquad /13/$$

Schnitt der Tangentialebene mit Quadrikenfläche:

$$\left| \; c_1^2 + c_2^2 = 1 + c_3^2 \; \right| \qquad /14/$$

bestimmen Schnittpunkt:

$$\left| \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 = 1 + c_3x_3 \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} /15/ \\ /16/ \end{array}$$

Umformung:

Mult. (/14//15/): $\rightarrow c_1^2x_1^2 + c_2^2x_2^2 + c_2^2x_1^2 + c_1^2x_2^2 = 1 + c_2^2x_3^2 + c_3^2 + x_3^2$ /17/

Quadr. (16/): $\rightarrow c_1x_1 + c_2x_2 + 2c_1c_2x_1x_2 = 1 + c_2^2x_3^2 + 2c_3x_3$ /18/

Diff. (/17/-/18/): $(c_2x_1 - c_1x_2)^2 = (x_3 - c_3)^2$

$\rightarrow (c_2x_1 - c_1x_2 + x_3 - c_3)\,(c_2x_1 - c_1x_2 - x_3 + c_3) = 0$ /19/

Lösungen:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{entweder:} & c_2x_1 - c_1x_2 + x_3 = c_3; \quad c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3 = 1 \\ \text{oder:} & c_2x_1 - c_1x_2 - x_3 = -c_3; \quad c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3 = 1 \end{array} \right| \qquad /20/$$

(oder beide);

das heisst: Zwei Geraden, welche sich nur in einem Punkt schneiden, weil obiges System /20/ nur eine Lösung hat:

$$x_i = c_i; \quad i = 1, 2, 3.$$

=> Jede Tangentialebene des einschaligen Hyperboloides hat mit diesem ein sich schneidendes Geradenpaar gemeinsam.

(Literatur: /813/ SPERNER [1963: I, 316 ff.], /811/ REINHARDT/SOEDER [1982: 1, 201])

Zusammenfassung:

Sowohl das *HP* wie das *Drehhyperboloid* weisen eine doppelte Eigenschaft auf, welche den vielbeschworenen *ästhetischen* Reiz dieser geometrischen Gebilde begründen.

1. Sind sie *algebraisch* als *Flächen 2. Ordnung* darstellbar, in relativ einfachen Gleichungen, mit besonders anschaulichen Charakteristiken:
   - Das *Drehhyperboloid* entsteht – wie sein Name sagt – durch Rotation einer Hyperbel um die x_3-Achse. Ein Schnitt parallel zur Normalebene bildet somit immer einen Kreis (Fig. 9).
   - Das *HP* entsteht aus einer Schar von Parabeln, welche parallel auf einer (umgekehrten) Scheitelparabel verschoben werden und auf diese Weise eine «Sattelfläche» bilden. Normalschnitte bilden stets Hyperbeln um die Hauptachse x_3 (Fig. 8).

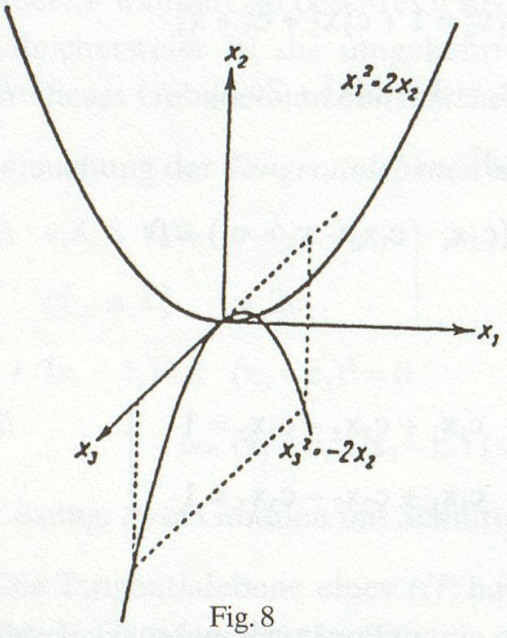


Fig. 8

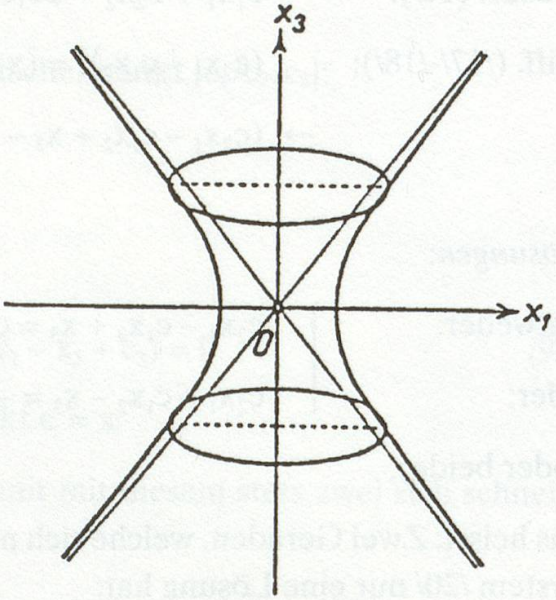


Fig. 9

2. Sind sie *geometrisch* zugleich als *Regelflächen* konstuierbar:
   - das *Drehhyperboloid* als doppelte Geradenschar an zwei zur Normalebene ($x_3 = 0$) parallelen Kreisen (Fig. 3)
   - das *HP* als doppelte Geradenschar an zwei windschiefen Geraden (Fig. 6).

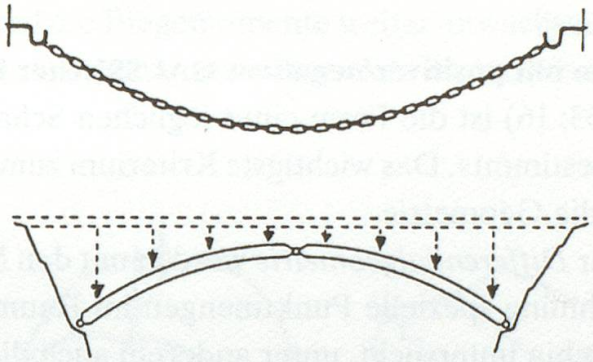
In dieser Verbindung regelmässiger geometrischer Eigenschaften, in letztlich eleganten Formen, mit einfachen Konstruktionsprinzipien ausschliesslich aus Geraden, liegt der Grund ihrer Beliebtheit in plastisch-künstlerischer wie in architektonisch-bautechnischer Hinsicht.

2. ZUR STATIK VON DOPPELT GEKRÜMMTEN SCHALEN

Die Statik von Schalenbauten gehört zu den mathematisch dornenvollen Aufgaben. Da jedoch die «besonders günstigen statischen Eigenschaften» der *HP*-Schalen allenthalben als Argument ihrer Verwendung vorgeschoben werden – so auch von *Xenakis* (XEN 10 – *Genèse* [1958: 2]) –, sei hier der Versuch unternommen, einige der grundlegenden Eigenschaften von Schalen zur Darstellung zu bringen – nicht ohne auf die Problematik des mathematischen Ansatzes zu deren Berechnung hinzuweisen.

2.1 Die ideale Stützlinie von Bogenkonstruktionen

Betrachten wir ein Seil oder eine Kette, die locker zwischen zwei Punkten eingehängt ist, so wird sie sich, nur durch ihr Eigengewicht belastet, in einen Gleichgewichtszustand begeben, in welchem auf die einzelnen Elemente *nur Zugkräfte* wirken: dann bildet die Kette eine Kurve, die einer Parabel recht nahe kommt:



Tatsächlich handelt es sich um eine sogenannte *Kettenlinie*, deren Verlauf durch die Funktion des Cosinus Hyperbolicus beschrieben wird:

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Betrachtet man umgekehrt einen *stehenden Bogen*, der nur durch sein Eigengewicht belastet wird, so ist kennzeichnend, dass die inneren Kräfte *nur Druckkräfte* sind. Diese kann somit anschaulich als Umkehrung der Hängelinie verstanden werden.

Obwohl der genaue Sachverhalt der Kettenlinie, der zwar noch von Galilei falsch beschrieben, aber schon von Jakob Bernoulli als Aufgabe gestellt worden war, die dann von Leibniz, Huygens und Johann Bernoulli gelöst wurde (*Acta Eruditorum,* 1691), hat sich in der Architektur die Sprachregelung von der idealen, «parabelförmigen» Stützlinie bis heute erhalten (vgl. /1057/ SIEGEL [1960: 164 ff.], /1009/ JOEDICKE [1962: 189]); Antonio Gaudí stellte etwa im *Palacio Güell* [1889] die Dachkonstruktion explizit auf stehende Parabeln aus Zement.

Der Grund der Vermischung mag im ähnlichen Verlauf der Funktionen von Parabel und Hyperbelkosinus liegen, so lange man sich in dem für den weitgespannten Brückenbau relevanten, «flachen» Bereich nahe beim Scheitelpunkt ($y' < 1$, für $a = 1$) befindet.

Für den Brückenbau erhielt mit der Einführung des Stahlbetons – einer beliebig formbaren, homogenen und primär auf Druck belastbaren Materie – die «parabelförmige» Stützlinie ihre Wichtigkeit. Die *Maillart-Brücken* folgten als erste dieser empirischen Gesetzmässigkeit; ihre Anpassung an die Stützlinie erlaubte eine sparsame Dimensionierung – und somit Leichtigkeit in der äusseren Formgebung, was als besondere ästhetische Qualität empfunden wurde.

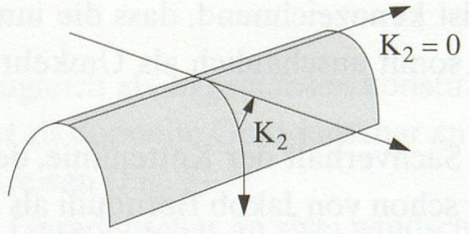
Im *HP*, welches sich als Sattelfläche aus der Translation von zwei Scharen von Parabeln zusammensetzt, wirken – durch ein gegebenes Eigengewicht – in Richtung der stehenden Parabeln ausschliesslich Zugkräfte: «Diese beiden Scharen von Parabeln verhängen sich miteinander (in der Schale) und erzeugen so die grosse Steifigkeit, die für eine in Form des *HP* gekrümmten Schale typisch ist» (JOEDICKE [1962: 189]).

2.2 Echte Schalen mit positiver/negativer GAUSS'scher Krümmung

Nach CANDELA (1963: 16) ist die Form einer jeglichen Schale «durch ihre konstruktive Leistung bestimmt». Das wichtigste Kriterium zum *statischen Verhalten* einer Schale liefert die Geometrie.

Im Rahmen einer *Differentialgeometrie* werden mit den Mitteln der Integral- und Differentialrechnung spezielle Punktmengen im Raum auf ihre geometrischen Eigenschaften hin untersucht, unter anderem auch die *Krümmungen* von Flächen. Zu ihrer Untersuchung zieht man Flächenkurven heran und beurteilt deren (immanente) Krümmungen.

Das *Mass* für die Krümmung einer Kurve sei κ. Für beliebige Punkte einer Fläche lassen sich zwei gegenseitig senkrechte Tangenten-Richtungen angeben, deren zugehörige Tangenten-Krümmungen gerade maximal sowie minimal sind: dies sind die *Hauptkrümmungen* der Fläche κ_1, κ_2.



Man bezeichnet:

den Mittelwert $\underline{H} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ = mittlere Krümmung

das Produkt $\underline{K} = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ = *GAUSS'sche Krümmung*

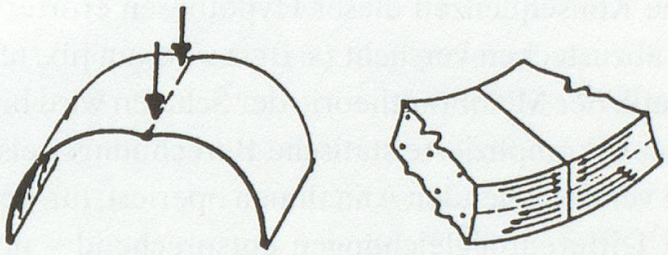
Die Gauss'sche Krümmung verrät folgende Eigenschaften der Fläche:

- Für $K = 0$ handelt es sich um eine abwickelbare Fläche (Zylinder, Kegel, Band).
- Für $K \neq 0$ handelt es sich um eine doppelt gekrümmte Fläche, die nicht abwickelbar ist (Sphäre, Quadrike); dies sind die sogenannten «echten Schalen» in der Bautechnik.

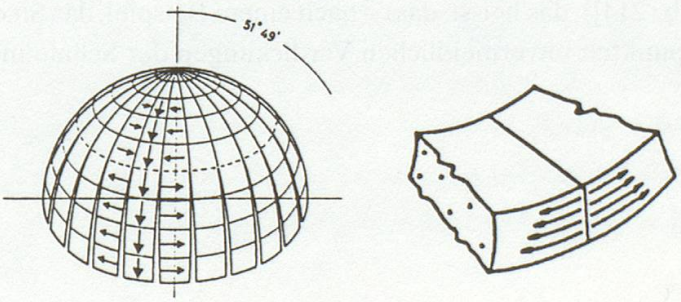
2.3 Zug- und Druckkräfte in der Schale

Die grundlegenden statischen Unterschiede zwischen «echten» und «unechten» Schalen lassen sich folgendermassen erläutern (s. dazu SIEGEL [1960: 215 ff., 238 ff.], CANDELA [1963: 16 ff.], BELES/SOARE [1971: 66 ff.]):

Die «unechte» Schale, mit einfacher Krümmung (z. B. Zylindergewölbe), absorbiert die Last über eine Deformation des Gewölbes durch *Biegekräfte*, das heisst, in der *Membrane* entstehen zugleich Druck- und Zugkräfte, welche zum Riss führen können. Aus diesem Grund muss – entsprechend dem Biegemoment – die Schalendicke beträchlich gross gehalten werden, was seinerseits die Eigenlast wieder erhöht und die Biegemomente weiter anwachsen lässt. Bei wechselnder Last (Verkehrslast) kommt man somit nicht umhin, Versteifungsrippen oder Binder vorzusehen.



Die «*echte*» Schale hingegen, mit doppelter Krümmung (z.B. Kuppel, *HP*), resorbiert die Last ausschliesslich mit Normalkräften (Druck *oder* Zug) in der Membrane, nicht mit Biegung. In der Sphäre zum Beispiel (Kuppel) wirken bei Last durch Deformation im oberen Teil ausschliesslich Druckkräfte, im unteren Teil ausschliesslich Zugkräfte auf die Membrane.



Die Schale muss somit lediglich so dick sein, dass sie die entsprechenden Druck- und Zugspannungen gefahrlos aufnehmen kann. Gerade für die *HP*-Schalen, deren statische Eigenschaften durch die Omnipräsenz parabolischer Stützlinien ideal erscheinen, gilt somit das scheinbar Paradoxe: Je dünner die Schale gebaut werden kann, desto vernachlässigbarer werden die noch vorhandenen, minimalen Biegekräfte durch Eigenlast.

2.4 Die mathematische Formulierung der Membrankräfte des HP

Die statische Berechnung, das numerische Resultat insbesondere, liefert die Angaben zur Dimensionierung des Bauwerks, damit es den mechanischen Beanspruchungen widerstehen kann (und den gesetzlichen Auflagen einer exemplifizierten Statikberechnung genüge).

Die *Membrantheorie* lässt sich allerdings nur dann anwenden, wenn eine Reihe *wesentlicher Voraussetzungen* an den Baustoff gestellt werden, ohne die das Membranverhalten nicht garantiert werden kann, das heisst Biegespannungen auftreten und deswegen die Statik nicht mehr exakt zu berechnen ist.

Die meisten Autoren (s. SIEGEL [1960: 239], BELES/SOARE [1971: 65]) geben im Vorfeld der mathematischen Entwicklung die vereinfachenden Hypothesen bekannt, unter welchen die Ableitungen erfolgen wie etwa Homogenität des Baustoffs, elastische Beanspruchung, Querschnittskonstanz bei Biegung usw. Dabei werden die Konsequenzen dieser Hypothesen erörtert und die Grenzen der Anwendung abzustecken versucht (s. BELES/SOARE [ib.: 65 f.]).

Die Problematik der Membrantheorie der Schalen wird hier deutlich: Die an sich schon ungemein komplizierte statische Berechnungsweise, welche gezwungenermassen mit vereinfachenden Annahmen operiert, für welche es schliesslich – der Natur von Differentialgleichungen entsprechend – nur näherungsweise numerische Lösungen gibt – etwa bei günstigen Spezialfällen, dies alles führt dazu, dass der Statiker es vorzieht, alles was die Sache erschwert, als «Störung» auszuräumen (s. dazu SIEGEL [1960: 214]).

Der Circulus vitiosus beginnt damit, dass der Statiker zur Berechnung der inneren Kräfte der Schale auf ihre mathematische Formulierung angewiesen ist. Nur wenn die Annahmen der Homogenität, der geringsten Schalendicke usw. erfüllt sind, kann er überhaupt eine Theorie aufstellen, welche die Membrankräfte ausschliesslich als Normalkräfte auftreten lässt. Um dem Statiker diesen Gefallen zu erweisen, bemüht sich der Ingenieur somit darum, dass «der wirkliche Kräftezustand in der Schale dem nahekommt, was zur Aufstellung der Theorie Voraussetzung war» (SIEGEL [ib.: 214]), das heisst, dass – nach einem Beispiel, das SIEGEL vorbringt – etwa die bei den Auflagepunkten unvermeidlichen Verdickungen der Schale möglichst nicht in Erscheinung treten.

So stellt sich die Frage, ob nicht allein die *technische Machbarkeit* der *HP*-Schalen, bedingt durch die geradlinigen Tagentialen als Vorspannkabel oder Armierungseisen, im Vordergrund gestanden habe, welche ihrerseits die statische Berechnung, die durch die gesetzlichen Vorschriften bindend ist, nach sich zog.

CANDELA (1963: 17) stellt die Notwendigkeit derartiger Berechnungen direkt in Frage und vertraut allein auf eine «erfassbare Geometrie». Dennoch hat auch er, wie andere, Berechnungen angestellt und in ihnen eingestandenermassen eine logische Bestätigung seiner geometrisch begründeten Konzepte erhalten (1963: ib.).

Für *Xenakis* stellte sich beim Bau des *Philips-Pavillon* das statische Problem allerdings in neuartiger Weise.

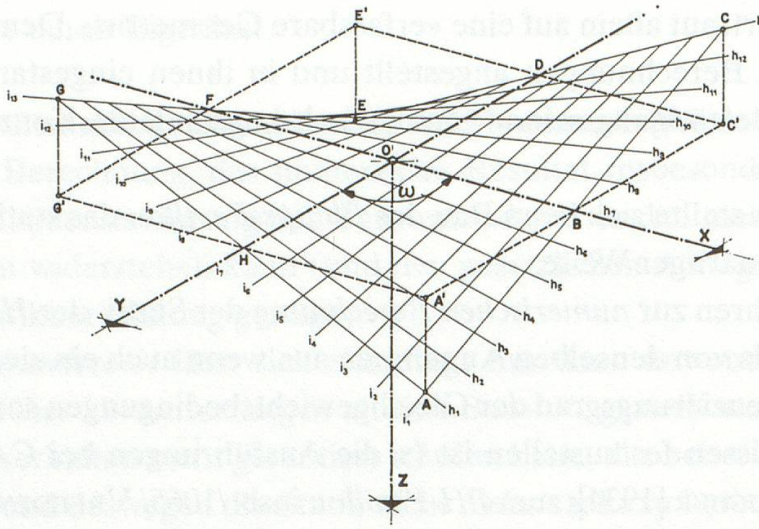
Beim Verfahren zur *numerischen Berechnung* der Statik der *HP*-Schalen gehen alle Autoren von denselben Annahmen aus, wenn auch ein ziemlicher Spielraum im Differenzierungsgrad der Gleichgewichtsbedingungen sowie in der Setzung der Prämissen festzustellen ist (s. die Ausführungen bei CANDELA [1963: 19-25], /1049/ PUCHER [1934]; zum *PH-Pavillon* insb. /1065/ VREEDENBURGH [1958], als Referenzwerk BELES/SOARE [1971]). Dabei wird folgender Weg beschritten:

Die Berechnung der inneren Kräfte und Momente erfolgt an einem aus der Schale herausgetrennten, windschiefen Viereck. Es zeigt sich (s. BELES/SOARE [ib.: 66-69]), dass bei einem Verhältnis der Schalendicke zum Schalenkrümmungsradius $\delta/R < 1/20$ Biegemomente und Torsionsmomente praktisch vernachlässigbar sind. Somit entsteht eine gleichmässige Verteilung der Spannungen über die Schalendicke, es entstehen lediglich Normalkräfte in der Membran (sogenannter *Membranspannungszustand* der Schale). Die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen der Membrankräfte im Rahmen der Membrantheorie führt zu einem System von partiellen Differentialgleichungen, deren Komplexität erheblich ist.

Die einzelnen Schritte der Ableitung können in extenso in der einschlägigen Literatur konsultiert werden; es sei besonders auf die konzise Darstellung bei CANDELA (ib.: 19 ff.) verwiesen. Die uns speziell interessierende Ableitung von VREEDENBURGH (1958: 179 ff.) zu Xenakis' *PH-Pavillon* ist etwas knapp gehalten.

Unser Anliegen ist es, an ein im Text zu den *HP*-Schalen am *PH-Pavillon* aufgeworfenen Problem zu erinnern: Im Rahmen der Membrantheorie kann nachgewiesen werden, dass die Lage der *Hauptachse* eines *HP* ausschlaggebend für die Komplexität des Lösungswegs ist. Steht diese senkrecht zur Normalebene, kann ein relativ einfacher Lösungsweg gefunden werden, da etliche Glieder wegfallen; liegt die Hauptachse des *HP* jedoch schräg im Raum – wie im *PH-Pavillon* der Fall –, muss von einer rein deduktiven numerischen Lösung des statischen Problems abgesehen werden (diese Fälle sind bei CANDELA [ib.: 22] ausgeführt und kommentiert).

Die statischen Probleme beim Bau des *PH-Pavillon* waren jedenfalls numerisch nicht mit Sicherheit zu lösen; nur mit umfänglichen *Modellversuchen* konnten echte statische Werte ermittelt werden (s. i. Text, S. 153 f.).



Exkurs 4
«Stochastik» – zur Begriffsgeschichte

1. «*Stochastik*», als moderner Sammelbegriff, umfasst in der Mathematik und Statistik alles, was mit Wahrscheinlichkeitsrechnung zu tun hat. Sie beschäftigt sich mit der mathematischen Analyse zufälliger Ereignisse und trägt damit zur Instrumentalisierung der erkannten Gesetzmässigkeiten zum Zwecke statistischer Untersuchungen bei.

«Stochastisch» heisst somit «*zufallsabhängig*», im ursprünglichen Sinn «auf Vermutung beruhend», was den hypothetischen Regelanspruch etwas hervorhebt. In diesem Kontext entstanden Komposita wie stochastische Variable (Zufallsvariable), stochastischer Prozess (Zufallsprozess), stochastische Funktion usw.

Das Wort «Stochastik» stammt vom Griechischen «στοχάζεσθαι»: «wonach zielen», «zu treffen versuchen» sowie *seltener*, in übertragenem Sinne, «*vermuten*». Hinter dem Begriff steht bildlich στόχος: «das (aufgestellte) Ziel», im Sinne eines eingepflanzten Steckens (selber Wortstamm!), auf welchen mit Wurfgeschossen gezielt wird. Dieser Vorgang beschreibt anschaulich das Wesen eines zufälligen Massen-Prozesses – eines stochastischen Prozesses.

Abgeleitete Wortbildungen: στόχασμα: «womit man zielt» = «Wurfspiess»; στοχασμός: «das Zielen», «die Vermutung»; στοχαστικός: «zum Zielen, Erraten gehörig»; schliesslich, als aktiv Handelnder στοχαστής: «derjenige, der errät», = «Wahrsager».

2. In die Wahrscheinlichkeitsrechnung gelangte der Begriff erstmals durch *Jakob (I.) Bernoulli* (1654-1705), dessen 1713 posthum erschienenes (und wohl um 1670 verfasstes) Buch *Ars conjectandi* die erste fundamentale Darstellung der Wahrscheinlichkeitsgesetze enthält, angewandt auf Glücksspiele und – was von entscheidender Bedeutung war – in bezug auf wirtschaftliche Fragen.

Bernoulli verwendet «Stochastice» im ganzen Buch nur einmal, zur Verstärkung des zentralen Begriffs «conjectura», als «vermuten» (/776/ Bernoulli [1713: 213]): «Conjicere rem aliquam est metiri illius probabilitatem: ideoque *Ars Conjectandi* sive *Stochastice* nobis definitur ars metiendi quam fieri potest exactissime probabilitas rerum …» (s. dt. Übersetzung in: /776/ Bernoulli, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, NA ed. R. Haussner [1899:II, 75]). Dieser Satz steht freilich an zentraler Stelle in der Abhandlung Bernoullis, zu Beginn des 4. Teils, welcher die Überführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung vom blossen Amusement in Glücksspielen zur «Anwendung der vorhergehenden Lehre auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse» zum Inhalt hat (1899: 71); der Begriff «Stochastice» erscheint somit auch bei Bernoulli in einem besonderen Kontext.

Damals hat sich allerdings der Begriff «Stochastik» in der Mathematik nicht eingebürgert. Erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts taucht der Begriff in einer Abhandlung des deutschen Statistikers L. v. BORTKIEWITZ (/785/ *Die Iterationen* [1917]) wieder auf – in expliziter Wiederaufnahme des von *Bernoulli* verliehenden Sinngehaltes, was somit, laut v. Bortkiewitz, «keiner Rechtfertigung bedarf» und wie folgt präzisiert wird (1917: X). «Die Stochastik ist nicht sowohl Wahrscheinlichkeitstheorie schlechthin, als vielmehr Wahrscheinlichkeitstheorie in ihrer Anwendung, sei es auf empirische Vielheiten überhaupt, sei es auf empirische Vielheiten einer bestimmten Art.» (Ergänzend): «Somit bedeutet «Stochastik» auch für *Bernoulli* soviel wie *angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie*; nur dass er in bezug auf die in Betracht kommenden Anwendungen einen antiquierten Standpunkt vertritt» (1917: 3, Fn. 2). Seitdem hat sich der Begriff «Stochastik» durchgesetzt und ist zum Terminus technicus der Wahrscheinlichkeitsrechnung geworden.

Es ist erstaunlich, dass sich der qualitative Begriff στοχαστίκός wahrhaftig durch einen Zufallsprozess in die Mathematik verirren konnte und in ihr heutzutage eine feste Bindung innehat, an deren Ursprung gewöhnlich kein Gedanke verschwendet wird – wie etwa mathematische Lexika erweisen. Nun ist es durchaus lehrreich, der Frage nachzugehen, weshalb Bernoulli diesen Begriff, welcher in antiken Texten in der Bedeutung von «vermuten» äusserst selten vorkommt und überdies in den Handschriften oft verderbt erscheint (s. Pierre CHANTRAINE, *Dict. étym. de la langue grecque* [1968/74: III, 1060]), in seine (lateinische) Abhandlung über die «Kunst des Mutmassens» einfügte. Die Fundiertheit dieser gedanklichen Verbindung erhellt auch aus Bernoullis umfassenden Bildungsgang als Theologe und Philosoph, welcher – wie es das späthumanistische Bildungsideal jener Zeit forderte – einen vertrauten Umgang mit philologischen Fragestellungen und ihren wissenschaftlichen Hilfsmitteln vermittelt hatte (zur Vita Bernoullis: /768/ SPEISER [1939: 54 f.]).

Denn Textstellen in antiken Quellen, in welchen στοχάζεσθαι den Sinn von «vermuten» einnimmt, sind selten: Im klassischen Korpus gibt es gerade eine Stelle bei PLATON: *Phileb.* 55e: «ταῖς τῆς στοχαστικῆς προσχρωμένους δυνάμεσιν ἃς πολλοὶ τέχνας ἐπονομάζουσι ...» («... with the additional use of the powers of guessing, which are commonly called arts ...») (ed. Harold N. Fowler, *The Loeb Class. Lib.* 164); *Schleiermacher* übersetzt (/764/ PLATON, *Sämtl. Werke*, NA 1959: V, 126): «... indem man hinzunimmt, was nur die glücklichste Mutmassung vermag ...» Eine weitere Stelle findet sich bei ARISTOTELES: *Rhet.* 1355a17: «διὸ πρὸς τὰ ἔνδοξα στοχαστικῶς ἔχειν τοῦ ὁμοίως ἔχοντος καὶ πρὸς τὴν ἀλήθειάν ἐστιν» («wherefore one who divines well in regard to the truth will also be able to divine well in regard to probabilities») (ed. *Loeb*); hier erscheint somit in beiden Stellen στοχαστίκός in der Bedeutung von «im Erraten geschickt».

Im griechischen *Alten Testament*, welches in einer humanistischen Bibliothek freilich zu den ersten Büchern zählte, ist der Begriff ebenfalls selten: *LXX*: *Sap.*

13.9: «... ἵνα δύνωνται στοχάσασθαι τὸν αἰῶυα, ...» (cf. *Vulgata*: «ut possent aestimare saeculum») sowie, an bekannterer Stelle, bei Jesaia (Weissagung des Gerichts): *LXX*, *Is.* 3,2: «... καὶ στοχαστὴν, καὶ πρεσβύτερον ...» (*Vulgata*: «et ariolum et senem ...», was *Luther* mit «Wahrsager und Älteste» übersetzte).

Einsichtig wird der Gebrauch von «Stochastice» bei *Bernoulli* durch den im Buchtitel verwendeten Begriff der «Mutmassung», für welchen historische Vorbilder erst gesucht werden mussten, der «Ars Conjectandi»: In der späteren Antike hatte «*conicere*» im allgemeinen Sprachgebrauch dieselbe Doppelbedeutung wie im griechischen στοχάζεσθαι erhalten: «hinwerfen», «(auf ein Ziel) hinaufwerfen» und «richten», «ermitteln», «*vermuten*»; «*coniectatio*» wird schliesslich zu «Mutmassung», «Vorhersagung», «*coniector*» zum «Wahrsager», «Traumdeuter».

Spätantike Autoren und Scholiasten verbanden ohne weiteres die beiden Wörter: HIERONYMUS verwendet (in der Entgegnung zu *Iovin's* Auslegung von *Is.* 3.2) für στοχαστήν nicht nur «hariolum», sondern auch «coniector» (HIER. *adv. Iovin.* 2.15; MIGNE *PL* 23, 211 ff.); RUFINUS (*Hist.* 5, 2, 1) übersetzt (bei *Eusebius*) στοχάζεσθαι mit «coniectura»; IUSTINIAN (*Novell. Inst.* 111 präf.): «coniectura» für στοχασμός; *Rhet. min.* (ed. *Halm* 1863: 590, 10): «Graeci coniecturam στοχασμον appellant»; in Glossen erscheint bisweilen στοχαστικός für «coniecturalis» (n. LIDELL-SCOTT-JONES: *Greek-English Lex.*, Oxford [1953/ 1968]). Es scheint, dass die weniger begrifflichen, als umgänglichen Ausdrücke für «mutmassen» wie «praesumere», «dubitare», «aspicere», «probare (probabilis)», damit um einen gleichsam theoriefähigen Begriff ergänzt wurden.

Die *Coniectura* war insbesondere seit CUSANUS der wiederbelebte Begriff für «Mutmassung»: Die «Verfehlung der letzten Genauigkeit» im menschlichen Erkenntnisvermögen gegenüber dem Absoluten verurteilt den Menschen letztlich dazu, in der Mutmassung, im «Messen mit menschlichem Geiste» zu verbleiben (CUS. *de Conjecturis* [lib. II]: I, 2; s. dazu /949/ SCHULZE [1978: 91, 126]). Aufgenommen wurde dabei der allgemeine philosophische Begriff der «bona coniectura», welcher die «εὐστοχία», das «glückliche Auffinden» eines (wahren) Schlusses *ohne* Beweises in die Neuzeit überführte und wandelte.

Hiermit nähern wir uns den unmittelbaren Quellen, welche *Bernoulli* den Begriff «stochastice» überliefert haben dürften: den *philosophischen Lexika* des 17. Jahrhunderts:

Bei Rudolf GOCLENIUS (/733/ *Lex. Philosophicum* [1613: 441]) steht unter dem Stichwort «CONIECTURA: Coniectamus ea, quorum rationes certas ignoramus. Bona conectura Graece εὐστοχία est verae conclusionis inventio absque medio».

Mehr Aufschluss liefert ein späteres Nachschlagewerk: /759/ Johannes MICRAELIUS: *Lex. Philosophicum* (1661: 317 f.): «CONJECTURA est media inter scientiam et ignorantiam: habitus intellectualis imperfectus, quo non certo

causam novimus, sed tamen praesumimus ex medio aliquo probabili de facto incerto. Craecis dicitur στοχασμός.» – «Conjecturales seu στοχαστικαὶ artes sunt, quae saepe sine destituuntur, quamquam artifex secundum artem agit, ceu sunt, Piscatoria, Venatoria, Oratoria.» Entsprechend der Rückverweis (ib.: 1299): «ΣΤΟΧασμος, Vid. Conjectura». Hilfreich ist zudem die unter dem Stichwort «ARS» vollzogene Unterscheidung (ib.: 173): «1. est *vel docens* ... 2. *vel necessaria* ... 3. *vel mechanica* ... 4. *vel Stochastica* quae saepe sine suo distititutur, et in qua fortuna multum potest, licet opus artis recte tractatur, ut venatoria, et ipsa oratoria, Latinis vocantur *artes conjecturales*, item τυχικαί: vel τεχνικαταλαι, fortunae dominio non subjectae, ut pictura.» Ebenso, die Unterscheidung des «Λόγος», welche den Rahmen einer *Mathematik von Konjekturen* vorauszunehmen scheint (ib.: 697): «Λόγος/λόγοι αποδεικτικοὶ sunt syllogismi et argumentationes firmae et demonstrativae; quibus opponuntur λόγοι στοχαστικοὶ conjecturales.»

Zwar ist hiermit nicht gänzlich geklärt, weshalb *Bernoulli* «Ars Coniectandi» durch den Zusatz «sive Stochastice» zu verdeutlichen versuchte; es dürfte jedoch einsichtig geworden sein, dass in jener Zeit die Begriffe «Conjectura»/«Stochasmos» notifiziert und konnotiert waren.

3. Die heutige *theoretische Statistik* stammt aus zwei Bereichen, die ursprünglich nichts miteinander zu tun hatten: der *Statistik*, das heisst der numerischen Erhebung von Daten über Bevölkerung, Waren usw., die seit den antiken Stadtstaaten nachgewiesen werden kann, sowie der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, des Rechnens mit unsicheren, «zufälligen» Variablen (s. dazu und im folgenden: /805/ Menges [1972: 2-20]).

Am Beginn der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung steht die systematische Untersuchung der Gesetzmässigkeiten von *Glücksspielen* – zumindest ansatzweise. Es ist – im Kontext einer «Stochastischen Musik» – besonders anregend, dass diese Untersuchungen mit dem *Liber de Ludos aleae* (um 1520; ed. op. omn. Leiden, 1663) von *Geronimo Cardano* (1501-1576) begannen, welcher, als ein Repräsentant des «Universalgenies» der Renaissance-Zeit, nicht nur Mathematiker, Philosoph, Physiker und Astrolog war und zu diesen Gebieten zahlreiche Schriften veröffentlicht hatte, sondern auch Musiker war, der sich in zwei Traktaten (*de Musica*, 1546, 1574; ed. *C.A. Miller*, *MSD* 23 [1973]) zur Organologie der Blasinstrumente und zum Gebrauch von Mikrotönen in der Aufführungspraxis geäussert hatte. In der Beurteilung des «*Liber*» ist man heute geteilter Meinung, wenn auch bei «wohlmeinender Interpretation», das Konzept der *Mathematischen Erwartung* darin enthalten sein soll (s. dazu: Cantor [1907:II,538], Menges [1972: 9 f.]).

Entscheidend für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung war die Korrespondenz zwischen *Blaise Pascal* und *Pierre de Fermat*, die sich über Fragen zu Glücksspielen entspann, welche *Antoine Gombault Chevalier de Méré*

1651 an sie gerichtet hatte (s. /806/ MESCHKOWSKI [1968: 10-13], CANTOR [1907: II, 754 ff.]). Im Rahmen dieses Briefwechsels wurden zentrale Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung erstmals erörtert; leider blieb er unveröffentlicht und ist teilweise verschollen. Wir wüssten nicht viel aus seinem Inhalt, wenn nicht *Christiaan Huygens* 1655 auf einer Reise mit ihm konfrontiert worden wäre und dadurch angeregt, das erste Buch über die Wahrscheinlichkeitsrechnung schrieb: *De Rationiis in Ludo Aleae* (Leiden 1657). In diesem Buch wird erstmals das Modell der *Urne* mit verschiedenfarbigen Kugeln angeführt sowie das arithmetische Mittel mit der mathematischen Erwartung («Hoffnung») in Verbindung gebracht. Wesentlich war aber, dass dieses Büchlein dem genialen Basler Mathematiker *Jakob Bernoulli* (1654-1705) in die Hände gelangte, welcher es beträchtlich erweiterte und zum Hauptwerk der Wahrscheinlichkeitsrechnung formte, der *Ars conjectandi* (1713).

Bernoullis Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bedeutend: Er führte als erster die Unterscheidung zwischen der Wahrscheinlichkeit *a priori* (logisch-deduktiv) und *a posteriori* (empirisch-induktiv) ein. Die Erarbeitung des *Theorems* (Grenztheorem für grosse Anzahl n) bleibt die hervorragende Leistung Bernoullis, welche es später *Siméon Poisson* erlaubte (1837), das *Gesetz der Grossen Zahl* zu formulieren. Eine Vielzahl von Begriffen ist mit Bernoullis Namen verbunden und hält die Erinnerung an den Begründer der mathematischen Stochastik lebendig. Der Einfluss der *Ars conjectandi* – obwohl erst 1713 posthum ediert, war ihr Inhalt schon zu Lebzeiten Bernoullis aus Vorlesungen und Briefen bekannt – war gross und förderte entscheidend die Entwicklung der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1711 beschrieb *De Moivre* den später «De Moivre-Laplace'schen» genannten *Grenzübergang* von der Bernoulli-Verteilung zur *Normalverteilung*.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts formulierte *Poisson* das «starke» Gesetz der Grossen Zahl und entwickelte die nach ihm benannte *Poisson-Verteilung*. Der wohl genialste Mathematiker des 19. Jahrhunderts, *C. F. Gauss,* erarbeitete schliesslich die vollendete Formulierung der «Normalverteilung», deren Graph als «*Gauss'sche Glockenkurve*» Berühmtheit erlangte.

4. Der Einbezug der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die *Statistik* erfolgte kurz vor 1800 im Rahmen der Bevölkerungsstatistik (*Laplace* 1801) sowie in den Sozialwissenschaften (*Quetelet* [1835]: *Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale*). Heutzutage hat sie – inzwischen methodisch ins Unermessliche ausgebaut – eine nicht wegzudenkende Bedeutung in allen Sparten erlangt.

In den Sozialwissenschaften ist es der Wille des Menschen als Wirtschaftssubjekt, welches das indeterministische Kriterium bildet; unerwartete Anwendungsmöglichkeiten sollte die Wahrscheinlichkeitsrechnung indes in denjenigen

Disziplinen vorfinden, in welchen bis Mitte des 19. Jahrhunderts das Vorherrschen deterministischer Gesetzmässigkeiten als selbstverständlich gegeben aufgefasst wurde: in der *Physik*.

Untersuchungen zum Verhalten von Gasmolekülen im Rahmen der Wärmelehre führten zur Formulierung der *kinetischen Gastheorie* durch *Maxwell* und *Boltzmann*, welche den indeterministischen Charakter der Teilchenbewegung mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu fassen versuchten (s. dazu /783/ Borel [1950: 53-66], /802/ Lévy [1965: 20 ff.]). Der in diesem Kontext formulierte *2. Hauptsatz der Thermodynamik* (*Claudius* 1850) führte zur Einführung des Begriffs der *Entropie*, welcher das Prinzip zum Inhalt hat, dass in einem Kontinuum der Austausch der kinetischen Bewegungsenergie der Moleküle nur in einer Richtung zu verlaufen vermag: von der Ordnung zur (statistischen) Unordnung.

An diese Entdeckung knüpften zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Überlegungen zur Teilchenphysik an, welche im Theoriengebäude der *Quantenmechanik* (*Heisenbergs* Unschärferelation; *Schrödingers* Matrizengleichung) den *indeterministischen Aufbau des Universums* postulierten. Dies lieferte die Erklärung für viele Erscheinungen der Physik und der Kosmologie. So erkannte *Henri Poincaré*, dass das Verhalten dynamischer (nichtlinearer) Systeme unvorhersehbar sein kann, selbst wenn die physikalischen Gesetze, nach denen es sich entwickelt, bekannt sind (s. dazu o., Kap. II/2.2, Fn. 42). Heutzutage erscheint es für die Naturwissenschaft evident, dass die Evolution des Kosmos, vereint mit der Evolution des Lebens, an die Voraussetzung des indeterministischen Aufbaus des Universum gebunden ist (Monod [1971], Eigen [1971]); der Indeterminismus erscheint gleichsam als Urgrund, welcher jegliche Evolution überhaupt erst zulässt und selbst die Entstehung des Kosmos erst ermöglichte (Singularitätsthesen, symmetrische Kosmologie).

So ist die Menschheit wiederum mit einem radikalen Wandel des Weltbilds konfrontiert, dessen Konsequenzen noch nicht abzusehen sind – um mit Thomas Kuhn zu sprechen, mit einem Paradigmenwechsel, der den Lauf einer sogenannten «Normalen Wissenschaft» krisenhaft stört. *Albert Einstein*, der Begründer der Relativitätstheorie, konnte sich mit dem durch die Quantenphysik vermittelten Weltbild nicht anfreunden und prägte aus diesem Unbehagen heraus den Ausspruch: «Gott würfelt nicht!», ein ästhetisches Unbehagen formulierend, welches die kulturelle Situation unserer Zeit mitbestimmt.

5. Die *Stochastik* umfasst somit alles, was in der menschlichen und physikalischen Natur mit *Wahrscheinlichkeiten* zu tun hat. Zu definieren, was Wahrscheinlichkeit ist, fällt schwerer, denn seit je bereitete es unüberwindliche Schwierigkeiten, den Begriff der Wahrscheinlichkeit mit dem Kausalitätsprinzip zu verbinden. Ein Ansatz ist folgender: Im gegensätzlichen Begriffsfeld Kausalität/Zufall kann es in einer unbestimmten («aoristischen») Kausalkette (eingedenk

ARIST. *Meta.* 1065a25) zur empirischen Feststellung bestimmter Folgen kommen. Welche Folge im Einzelfall eintritt, sei durch ein Prinzip geregelt, welches «Zufall» heisse. Die Behauptung ist nun, dass dieser «Zufall» *messbar* sei, nämlich durch die *Wahrscheinlichkeit* des Eintritts einer bestimmten Folge. Die Gesamtheit aller Folgen-Fälle bildet einen *stochastischen Prozess*, welcher an sich nichts anderes als das Gesetz ausdrückt, unter welchem die Folgen sich ereignen.

So lässt sich (nach MENGES [1972: 29]) die Wahrscheinlichkeit allgemein *nicht* definieren, sondern – eingegrenzt auf Zweckbereiche: *1. mathematisch definieren* (im Sinne einer Axiomatisierung durch die Angabe erwünschter Eigenschaften und Relationen); *2.* nach «ihrer *Stellung im Erkenntnisganzen charakterisieren*» (in Befolgung des sogenannten *Ätialprinzips*, welches besagt: «gleiche allgemeine Ursachen – gleiches Verteilungsgesetz», in «stochastischer Umdeutung» des Kausalprinzips, «gleiche Ursachen – gleiche Wirkungen» [ARIST. *Meta.* 994a]); *3. messen* (etwa durch die Ermittlung des *Quotienten* der eingetroffenen mit den möglichen Fällen a posteriori).

Hier treten allerdings die Probleme zutage: Sind für objektive Wahrscheinlichkeiten a posteriori noch relativ praktikable Methoden entwickelt worden (zum Beispiel das Gesetz der Grossen Zahl), so stellt sich für die ebenso theoretisch erhärtbaren Konzepte der Wahrscheinlichkeiten a priori – seien sie objektiv (Würfelspiel!) oder subjektiv bestimmt (Wetten!) – das Problem, allgemeine Kriterien sachlicher Gerechtfertigung zu finden. Es scheint (s. dazu MENGES [1972: 31-34]), dass der Methodenstreit zunächst an den Paradigmen entwickelt, dann aber die grundsätzlichen Aporien der Unvereinbarkeit von Zufallsprinzip und Kausalitätsprinzip blosslegt.

6. Daher ist man für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten *a priori* auf paradigmatische *Verteilungsgesetze* angewiesen, welche am adäquaten Problem den zugrundeliegenden stochastischen Prozess mit hoher Plausibilität zu beschreiben vermögen.

Die Vielfalt möglicher Verhaltensarten zufälliger Prozesse in der Natur widerspiegeln sich in zahlreichen Verteilungsgesetzen, die ihrerseits *keine Naturgesetze* darstellen, sondern «gewissermassen auf Vorrat produzierte Werkzeuge» sind (MENGES [ib.: 226]). Die Methodik, welche zur Anwendung gelangt, um von der anfänglichen Ungewissheit über ein (Massen-)Phänomen zu seinem stochastischen Verteilungsgesetz zu gelangen, bezeichnet man als *statistische Inferenz* (s. dazu MENGES [ib.: 265 ff.]); die Beobachtung der empirischen Situation ist entscheidend für die Wahl eines Verteilungstyps.

Gerade bei der *Normalverteilung*, deren Bewährung in allen Bereichen der Naturwissenschaft ihr nicht nur zu ihrem Epitheton verholfen, sondern auch dazu geführt hat, dass man in der Regel «zufällig» mit «normalverteilt» gleichsetzt, ist dessen ungeachtet zu bedenken, dass sie kein Naturgesetz darstellt,

sondern eine mit hoher Plausibilität begünstigte mathematische Konstruktion – letztlich eine Ideologie (s. [ib.: 248 f.]). Dies ist in mehrfacher Weise erstaunlich, denn die legendäre Geltung der von *Gauss* und *Laplace* entwickelten (und von *Galton* «vergöttlichten») Normalverteilung geht vereint mit einer anschaulichen Form ihrer Dichtefunktion (wie ein gerieselter Kieshaufen) und der Eleganz ihrer mathematischen Formulierung. Um so problematischer müsste es erscheinen, sollte sie unreflektiert, als Naturgesetz sozusagen, zur Simulation «natürlichen» Zufalls beigezogen werden – etwa in der Stochastischen Musik.

Dass *Xenakis* problemorientiert und begründetermassen verschiedenartige Verteilungsgesetze ins Spiel gebracht hat, darf durchaus als Hinweis auf ein geschärftes Problembewusstsein gedeutet werden, ist doch bei ihm die kompositionstechnische Funktion in der Regel an den der jeweiligen Methode zugrundeliegenden Sachverhalt gebunden.

7. Die *Stochastische Musik* kann schliesslich – in diesem begrifflichen Kontext und losgelöst von irgendwelchen Implikationen einer Ästhetik – als logische Übertragung des Regelsystems von stochastischen Prozessen auf Ereignisse im Zeit/Klang-Raum betrachtet werden. Bei *Xenakis* erscheint der Ausdruck erstmals in XEN 11 – *Geste* (1958/*MuA*: 147), welcher an die «définiton statistique» grosser Klangmassen (XEN 5 – *Wkt* [1956: 33]) unmittelbar anknüpft: «Le dépassement donc de la restriction ‹linéaire› et le contrôle des variations continues des composantes du son peuvent être effectués à l'aide d'une musique plus complète, d'une ‹musique stochastique›, qui utiliserait dans son essence la théorie et le calcul des probabilités avec introduction de toute une série de fonctions mathématiques.»

Im Laufe der Musikgeschichte ist freilich schon mehrfach festzuhalten versucht worden, dass auch Zufallsprozesse musikalische Abläufe bestimmen können, bis hin zur Substitution von «Komposition». Es sei etwa an den Begriff der *Sortisatio* erinnert, mit welchem seit dem 16. Jahrhundert eine improvisatorische Kontrapunktpraxis (zu einem vorgegebenen Cantus) benannt worden ist (s. dazu /627a/ Ferand [1949]) oder an den irrtümlicherweise Mozart zugeschriebenen «*Würfelwalzer*», dessen definitive «Komposition» jeweils durch Würfeln bestimmt wird (s. /636/ Scherchen [1956: 3 ff.]).

Den Zufallsprozess als formuliertes und somit reflektiertes Regelwerk in den Kompositionsprozess so einzubetten, dass er eine gleichsam symbiotische Verbindung mit ihm einging, ist allerdings eine Erscheinung, die erst aufgrund der Entwicklung der seriellen Kompositionstechnik nach 1945 – und in kritischer Reflexion derselben – denkbar wurde. Xenakis hatte als Komponist dieser Epoche die Möglichkeit erfasst, die stochastischen Verfahren kompositorisch nutzbar zu gestalten.

Die vorgängigen Versuche einer «stochastischen Musik» – die es wohl gab! – sind eher der leichteren Muse zuzuordnen, verdienen es aber gleichwohl, hier erwähnt zu werden:

Im Kapitel «Information Theory and Art» berichtet J. R. PIERCE (/697/ [1961: 255 f.]) über folgenden musikalischen Zeitvertreib: «In 1949 (my wife) and I undertook the composition of some very primitive statistical or stochastic music. First we made a catalog of allowed chords on roots I-VI in the key of C. Actually, the catalog covered only root I chords; the others were derived from these by rules. By throwing three specially made dice and by using table of rarndom numbers, a number of compositions were produces» (Notenbeispiel daselbst: 257).

W. FUCKS, um 1950 mit der Analyse von Häufigkeiten des Auftretens bestimmter Intervalle in alter und neuer Musik beschäftigt, hatte zur Lösung der dabei aufgetretenen Probleme folgenden Lösungsweg beschritten (/908/ FUCKS [1962: 133]): «Bei der Suche nach wenigstens einem die Entwicklung der vergangenen Jahrhunderte bezüglich der Intervalle kennzeichnenden Parameter ergab sich zunächst kein überzeugendes Resultat. Um die Gründe dafür herauszufinden, schien es nützlich, eine extrem stileinheitliche Musik zu untersuchen, die in besonderer Weise elementar, oder, wenn man so will, primitiv ist. Es wurde dafür stochastische Musik gewählt, das heisst, es wurden Ton- und Klangfolgen untersucht, bei denen relevante Eigenschaften zufällig verteilt wurden. Als erstes wurde vor etwa zehn Jahren ein vierstimmiger Klaviersatz aufgeschrieben, bei dem die Aufeinanderfolge der Töne aus dem gewählten Tonhöhebereich mit Hilfe der Gewinnzahlen des Rouletts des Spielkasinos in Bad Neuenahr bestimmt wurde. Dabei war für alle Töne Gleichwahrscheinlichkeit angenommen. Das Stück (halb im Scherz ‹Stochastophonie› genannt) wurde 1952 von Mitgliedern des Physikalischen Instituts bei einer Institutsfeier gespielt, anschliessend auf Band aufgenommen und im Laufe der Jahre vielfach Besuchern des Instituts vorgeführt.»

Xenakis' Begriffsbildung der «musique stochastique» bezieht sich ausdrücklich auf *Bernoulli* (in: XEN 22 – *Formal* [1964/ *MuA*: 24], XEN 28 – *Philo* [1966/ *MuA*: 78], XEN 26 – *voie* [1965: 35]; insbesondere in BOIS [1968: 14]). Xenakis legt jedoch den Wortsinn in eigener und eigentümlicher Weise aus (XEN 17 – *Stoch* [1961/*MuF*: 16]): «L'explication du monde et par conséquent des phénomènes sonores qui nous entourent ou qui peuvent être créés nécessitait (et profitait de) l'élargissement du principe causal dont la base est formée par la loi des grands nombres. Cette loi implique une évolution asymptotique vers un état stable, vers une sorte de but, de στοχος, d'où vient l'adjectif *stochastique*.»

Die enge Verbindung zu einer festgelegten musikgeschichtlichen Sicht, aus welcher Xenakis den Begriff verstand und prägte, verdeutlicht die folgende Stelle (ib.: 19): «Car si, grâce à la complexité, la causalité stricte, déterministe, que

prônaient les néo-sériels était perdue, il fallait la remplacer par une causalité plus générale, par une logique probabiliste qui contiendrait comme cas particulier la causalité sérielle stricte. C'est le cas de la ‹stochastique›. La stochastique étudie et formule les lois dites des grands nombres ainsi que celle des évènements rares, les divers processus aléatoires, etc. Voici donc comment, à partir entre autres de l'impasse des musiques sérielles, est née en 1954, une musique fabriquée du principe de l'indéterminisme que deux ans plus tard j'ai baptisée: *Musique stochastique*. Les lois du calcul des probabilités entraient par nécessité musicale dans la composition.»

Exkurs 5
Mathematische Kombinatorik

Die *Kombinatorik* untersucht *Anordnungen* von Elementen durch Abzählen der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten unter geeigneten Bedingungen.

Beispiel: Die Anordnungen von Buchstaben in einem «Wort», die Anordnungen der Gewinner bei einem Sesseltanz, die Anordnungen von zwölf Tönen in einer Reihe usw.

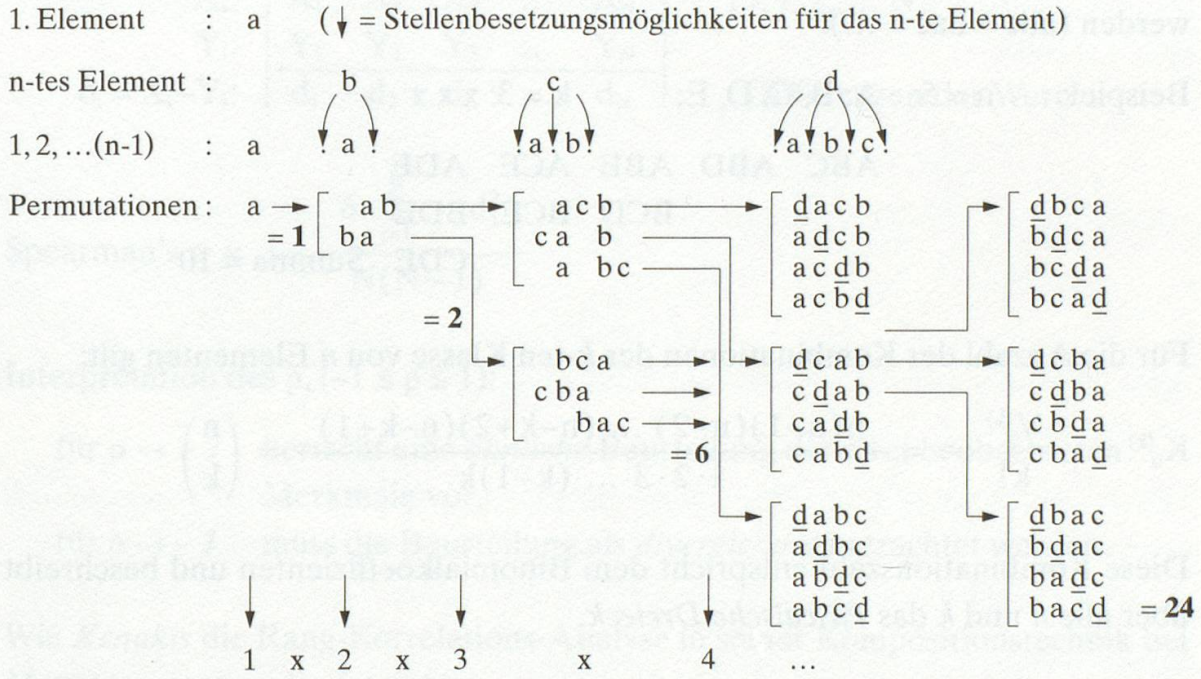
Man unterscheidet in der Mathematik verschiedene Grundmuster mit entsprechenden Lösungsmethoden (s. unter anderem REINHARDT/SOEDER [1980: II, 462 ff.]):

1. Permutationen

Auf wieviele Arten können *n* Elemente auf gleichviel *n* Plätze angeordnet werden?

Beispiel: ABCD / BACD / CDAC / DCBA ...

Systematisch gegliedert, entsteht folgende Entwicklungsreihe:



Für die Anzahl aller *n*-stelligen Permutationen ohne Wiederholung gilt

$P(n) = n(n-1)(n-2) \ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ («n Fakultät» $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k_n$)

Beispiel: ABCDE = P (n) = n!
5 P (5) = 5! = 120 Anordnungen

2. Variationen

Variationen sind Anordnungen von je *k* der *n* Elemente *mit* Berücksichtigung der Reihenfolge.

Beispiel: n = 5: A, B, C, D, E; k = 3: x x x

ABC	BAC	CAB	DAB	EAB	
ABD	BAD	CAD	DAC	EAC	
...	...	...	...	...	usw.
AEC	BEC	CED	DEC	EDB	
AED	BED	CED	DEC	EDB	Summa = 60

Für die Anzahl der Variationen der *k*-ten Klasse von *n* Elementen gilt:

$$V_n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+2) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Kombinationen

Kombinationen sind Anordnungen von je *k* der *n* Elemente *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge; Kombinationen sind somit Variationen, in welchen die Reihenfolge der Elemente nicht berücksichtigt und deshalb nicht mitgezählt werden (abc = bac = ...).

Beispiel: n = 5: A, B, C, D, E; k = 3: x x x

ABC	ABD	ABE	ACE	ADE	
		BCD	BCE	BDE	
				CDE	Summa = 10

Für die Anzahl der Kombinationen der *k*-ten Klasse von *n* Elementen gilt:

$$K_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (k-1)k} = \binom{n}{k}$$

Diese Kombinationszahl entspricht dem Binomialkoeffizienten und beschreibt über alle *n* und *k* das *Pascalsche Dreieck*.

Exkurs 6
Die Rang-Korrelation

Die Rang-Korrelations-Analyse findet dann Anwendung, wenn die Abhängigkeit zweier Variablen X, Y beobachtet und geordnet werden kann, ihr Verteilungsgesetz hingegen *unbekannt* ist. Man lässt somit Hypothesen betreffend der Verteilung der Variablen beiseite und stützt sich lediglich auf die subjektive *Rangfolge* der Beobachtungen.

Damit befindet man sich methodologisch in einem nicht eindeutig abgrenzbaren Bereich zwischen statistischer Deskription und Inferenz, welcher in der Regel den Gegenstand der *Nonparametric Correlation* bildet (zur statistischen Inferenz s. MENGES [1972: 266 ff.]).

Als Koeffizient der Rang-Korrelation ist das *Spearman's* ρ gebräuchlich (nach /510/ YAMANE [1973: 498 ff.]):

Gegeben: N Wertepaare (X, Y) zweier unterschiedlicher, beobachteter Merkmale, die jeweils in einer Rang-Ordnung bewertet sind:

X_i:	X_1	X_2	X_3	…	X_N	$i = 1, 2, \ldots N$
Y_i:	Y_1	Y_2	Y_3	…	Y_N	
$d_i = X_i - Y_i$:	d_1	d_2	d_3	…	d_N	: Differenzen der Werte

$$\text{Spearman's } \rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N(N^2-1)}$$

Interpretation des ρ, $(-1 \leq \rho \leq 1)$:

für $\rho \rightarrow +1$ herrscht eine *ähnliche* Beurteilung der zwei beobachteten Merkmale vor,

für $\rho \rightarrow -1$ muss die Beurteilung als *divergierend* betrachtet werden.

Wie *Xenakis* die Rang-Korrelations-Analyse in seiner Kompositionstechnik bei *Metastaseis* anwandte, ist unklar.

Ein Versuch, diese Methode in Vereinigung mit der Konzeption von Klangdichtigkeitsfeldern am Werk zu rekonstruieren und zu plausibilisieren, wird in der Darstellung der Analyse von *Metastaseis* wiedergegeben.

Exkurs 7
Die Exponentialverteilung

$P(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad dx$

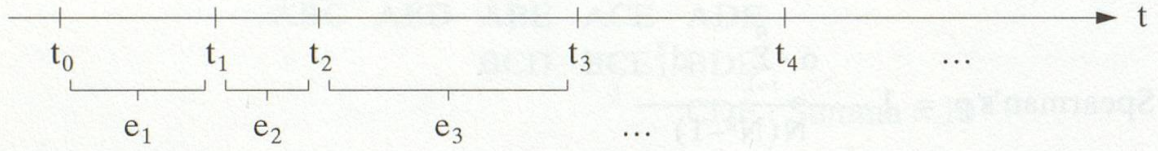
1. Allgemeine Definition (nach MÜLLER [1975:70 f.]): Eine stetige Zufallsgrösse X heisst exponentialverteilt mit dem Parameter λ ($\lambda > 0$), wenn sie folgende Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad /1/$$

das heisst, wenn gilt:

$$P(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad /2/$$

2. Herleitung über POISSON-Prozess (nach MENGES [1972: 167-169, 226, 232-238, 258]): Zugrunde liegt ein kontinuierlicher Basisprozess mit sprunghaften Zustandsänderungen $e_1, e_2, \ldots$ in den Zeitpunkten $t_0, t_1, t_2, \ldots$, das heisst ein punktueller Prozess:



Annahme: Die Grössen t_i sind zufällig bestimmt,
=> stochastischer Prozess.

Um diesen stochastischen Prozess zu beschreiben, das heisst sein internes Zufallsgesetz zu erkunden, behandeln wir ihn als POISSON-Prozess, der folgende Eigenschaften aufweist:

Seine einzelnen Ereignisse treffen sowohl unabhängig voneinander als auch unabhängig von der Zeit ein.

Das heisst:

$P\{ NE \mid NE = \text{«kein Ereignis»} \}$
$P\{ NE, \text{im Intervall } t, t+h \} = g(h)$
$P\{ NE, \text{im Intervall } t+h, t+h+k \} = g(k)$
$P\{ NE, \text{im Intervall } t, t+h+k \} = g(h+k),$

da unabhängige Ereignisse, gilt die Produkteregel für Wahrscheinlichkeiten:

$$g(h+k) = g(h) \cdot g(k)$$

$\Rightarrow$ g (h) ist Funktion von der Gestalt e^{-ch}, $0 \leq c \leq 1$

$P\{NE, \text{in } t, t+h_1\} = g(h_1) = e^{-ch_1}$ usw.

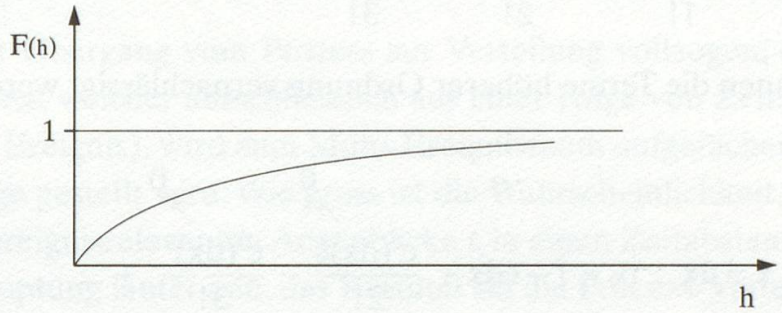
Nun sei E das komplementäre Ereignis,
«dass etwas geschieht» innerhalb t, t+h:

$$P\{E; t, t+h\} = F(h) = 1 - g(h) = \underline{1 - e^{-ch}} \qquad /2/$$

und entsprechend

$$P\{E; t, t+x\} = F(x) = 1 - g(x) = 1 - e^{-cx} \qquad /2a/$$

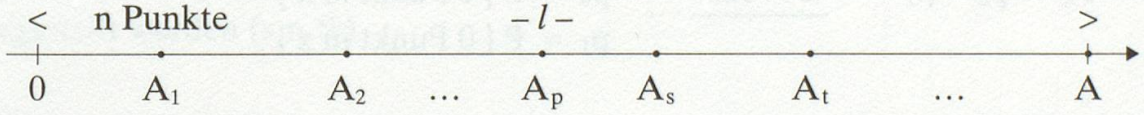
Dies ist die Poissonsche Verteilungsfunktion, als Mass der Wartezeiten $X \geq 0$ zwischen den Ereignissen des Prozesses.



Als kontinuierlicher Prozess lautet die Dichtefunktion über dem Ereignisraum $x \geq 0$ (differenzieren nach x):

$$\underline{f(x) = F'(x) = ce^{-cx}} \quad \text{(Exponentialverteilung)}$$

3. Xenakis gibt im Appendix seiner Darstellung (*MuF*: 243 ff.) eine etwas rudimentäre Herleitung dieser Funktion. Er konstruiert ebenfalls einen Poisson-Prozess und führt einen Parameter *c* ein (s. o. S. 446 f.).



lineare Dichte $c = \dfrac{n}{l}$, c konstant, n ↗, *l* ↗.

$x_1 = \overline{A_1A_2}$; $x_2 = \overline{A_2A_p}$; .. $x_i = \overline{A_sA_t}$

Diese Punkte x_i sind POISSON-verteilt, entsprechend:

$$P\{x \le x_i \le x + dx\} = P_x$$

$$P_x = e^{-cx}\,cdx \qquad /1/$$

Es wird bei XENAKIS nicht klar ersichtlich, dass es sich bei dieser Gleichsetzung um eine Definition handelt. Im weiteren wird nun diese Formel plausibilisiert:

Einzelwahrscheinlichkeit: p_n

$$p_n = P\{\text{n Punkte im Segment x}\}$$

Rekurrenzformel (vgl. MATH EXK 8: $P_0 \to P_1 \to \ldots P_k$):

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{cx}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad p_1 = p_0 \cdot cx, \quad p_0 = e^{-cx} \qquad /4/ \quad \text{(unabhängiges Ereignis!)}$$

$$e^{-cx} = 1 - \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} - \frac{(cx)^3}{3!} + \ldots \qquad \text{(Potenzreihe)}$$

Für $x \to 0$ können die Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden.

Näherung:

$$\text{für } x \to 0 \mid x \equiv dx : \; p_0 = 1 - cdx + \underbrace{\frac{c^2(dx)^2}{2!}^{\nearrow 0} - \frac{c^3(dx)^3}{3!}^{\nearrow 0} + \ldots}_{\text{vernachlässigt}}$$

$$\Rightarrow p_0 \approx 1 - cdx$$

$$\Rightarrow p_1 = cdx\,[1 - cdx] = cdx - \underbrace{c^2(dx)^2}_{\text{vernachlässigt}}^{\nearrow 0}$$

$$p_1 \approx cdx \qquad /5/$$

aus /4/, /5/ folgt:

$$P_x = p_0 \cdot p_1 = \underline{e^{-cx}\,cdx} \quad . \qquad \begin{aligned} p_0 &= P\{\text{1 Punkt in x}\} \\ p_1 &= P\{\text{0 Punkt in x}\} \end{aligned}$$

Diese Herleitung der Dichtefunktion der Exponentialverteilung ist ihrem Verständnis nicht sehr förderlich. Möglicherweise handelt es sich dabei um ein Kondensat der bei XENAKIS zitierten Quellen (/782/ BOREL [1947), /789/ GIRAULT [1959]; beide zit. bei XEN: *MuF* [1963: 254]; man vgl. /790/ GIRAULT [1960: 67 f.], MESCHKOWSKI [1968: 109 f.]).

Exkurs 8
Die Poisson-Verteilung

$$P(k) = \frac{\mu_0^k}{k!} e^{-\mu_0}$$

Definition (nach /810/ MÜLLER [1975: 188]): Eine diskrete Zufallsgrösse X heisst POISSON-verteilt mit dem Parameter μ_0 ($\mu_0 > 0$), wenn für die Einzelwahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(X = k) = \frac{\mu_0^k}{k!} e^{-\mu_0} \quad (k = 1, 2, 3 \ldots) \qquad /1/$$

Herleitung (nach MENGES [1972: 232-238]): Ausgegangen wird von einem POISSON-Prozess (s. MATH EXK 7):

$$F(h) = 1 - e^{-ch} \qquad /2/$$

Nun wird der Übergang vom Prozess zur Verteilung vollzogen, das heisst der POISSON-Prozess, welcher ausschliesslich aus einer Folge von Zeitabständen besteht (für *ein* Ereignis), wird zum Multi-Ereignisraum aufgefächert, an welchen folgende Frage gestellt wird: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P_k dafür, dass genau k der ereignisrelevanten Augenblicke t_i in einen Zeitabstand T fallen?

Die Behauptung lautet nun, das Resultat sei die POISSON-Verteilung.

Zum Beweis:

Die Wahrscheinlichkeit Π_1 für *ein* Ereignis ist offensichtlich:

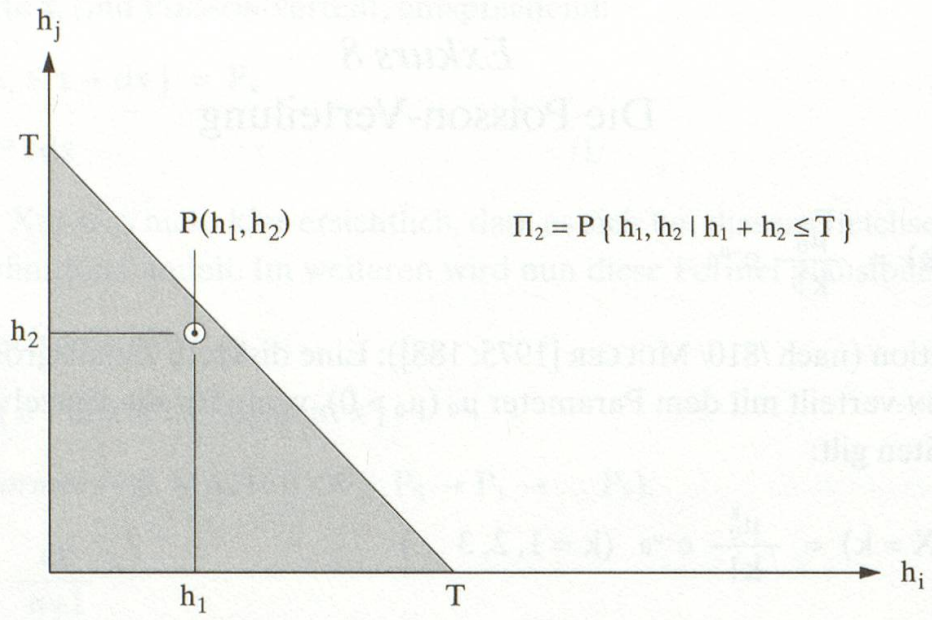
$$\Pi_1 \ (= 1 \text{ Ereignis}) = P\{h_1 \leq T\} = 1 - e^{-cT}$$

h_i : Zeitpunkt des Ereignisses Π_1

Die Wahrscheinlichkeit Π_2 für *zwei* Ereignisse:

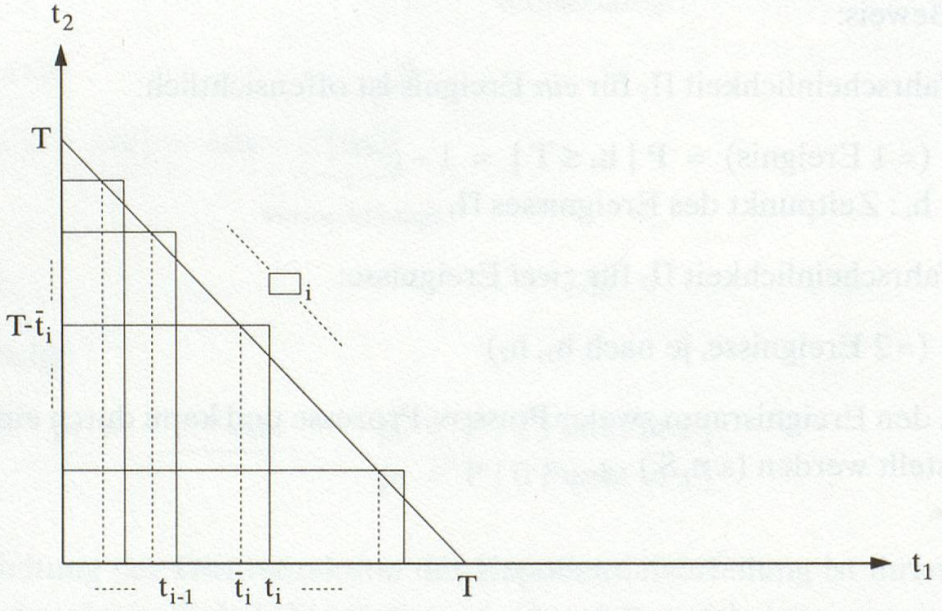
$$\Pi_2 \ (= 2 \text{ Ereignisse, je nach } h_1, h_2)$$

fällt in den Ereignisraum zweier POISSON-Prozesse und kann durch ein Rechteck dargestellt werden (s. n. S.)



Die Umwandlung des rein auf die Zeitachse bezogenen POISSON-Prozesses für ein Ereignis in die statische Reiheform einer Verteilungsfunktion, welche eine Mehrzahl von Ereignissen berücksichtigt, wird über einen zweidimensionalen Ereignisraum hergeleitet:

Die möglichen Konkretisierungen zeitlicher Sukzessionen zweier Ereignisse mit Zeitpunkten h_1, h_2 lassen sich als Menge von Quadraten mit den Eckpunkten $P = (h_1, h_2)$ im Raum (t_1, t_2) abbilden; so bildet die Wahrscheinlichkeit Π_2 für zwei Ereignisse, je nach $(h_i, h_j) < T$ die Diagonale, welche den Ereignisraum abschliesst:



Gefragt ist nach den Wahrscheinlichkeiten der Rechtecke innerhalb Π_2.

Der Beweis findet sich zum Beispiel bei MENGES (1972: 232-238) und führt zur POISSON-Verteilung mit der eingangs exponierten Formel /1/.

Exkurs 9
Die Lineare Verteilung

$$\Theta(\gamma)\, d\gamma = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right) d\gamma$$

Diese Formel wird von XENAKIS folgendermassen erklärt (*MuF*: 247): Jede Variable (Tonhöhe, Intensität, Dichte usw.) formt ein Intervall mit ihrem Vorgänger. Jedes Intervall wird durch ein Segment x bestimmt, welches von der Achse der Variablen abgetragen wird. A, B seien Ober- und Untergrenze der Variablen. Folgendes Ereignis wird definiert: Man zieht zufällig ein Segment, das zwischen $\gamma, \gamma + d\gamma$ liegt, für $0 \leq \gamma \leq a$, $a = \overline{AB}$; dieses Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit:

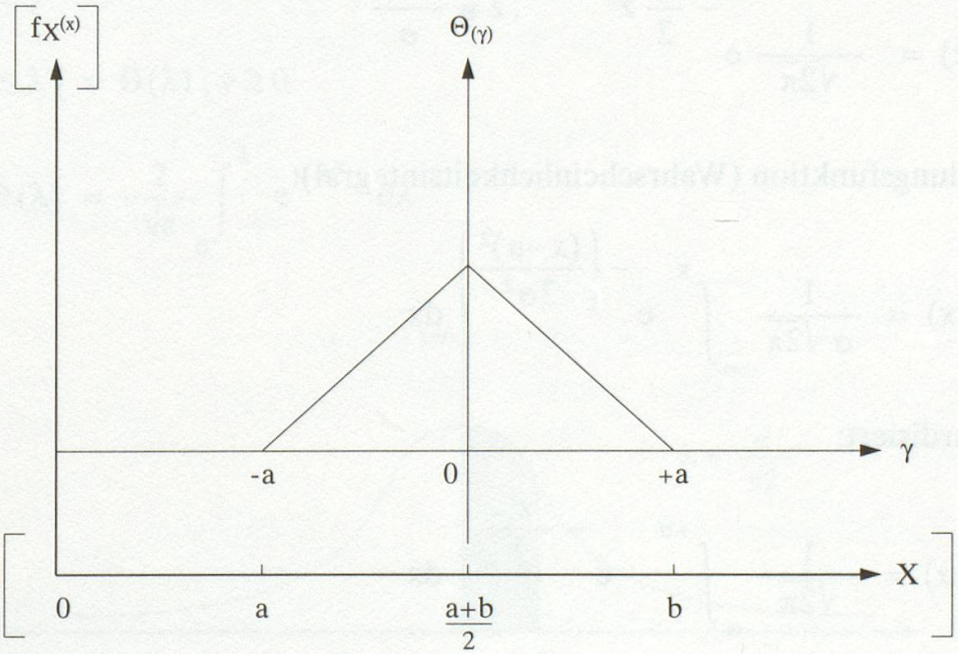
$$P\gamma = \Theta(\gamma)\, d\gamma = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right) d\gamma$$

XENAKIS vereinfacht: $a, b \triangleq A, B$

$b - a \triangleq \overline{AB} = a$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}\left\{1 - \dfrac{x}{a} \cdot \left| x - \dfrac{a+b}{2} \right|\right\} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\left| x - \frac{a+b}{2} \right|$ ist der Betrag der Abweichung von x vom Erwartungswert $\frac{a+b}{2}$ (= Median).



Exkurs 10
Die Normalverteilung

(GAUSS-LAPLACEsche Verteilung)

1. Zur Herleitung dieser Funktion wird auf die Fülle von Literatur verwiesen, die sich mit dieser verbreitetsten, «normal» getauften Verteilungsfunktion beschäftigt (z.B. MENGES [1972: 238-249], LÉVY [1965] u.a.).

Zugrunde liegt die Schaffung eines Übergangs von den diskreten zu den kontinuierlichen Verteilungen, was «nicht nur eine mathematische Angelegenheit ist, sondern auch eine statistische und – philosophische» (MENGES [1972: 238]). Man kann von der BERNOULLIschen Binomialverteilung ausgehen und den DE-MOIVRE-LAPLACEschen Grenzübergang anwenden, welcher besagt, dass mit wachsender Zahl von Versuchen die Binomialverteilung zur Normalverteilung tendiert und beim Grenzübergang $n \to \infty$ in diese übergeht.

Die Normalverteilung kann wie folgt definiert werden (vgl. MÜLLER [1975: 180], SPIEGEL [1961: 122 f.]):

Eine stetige Zufallsgrösse X heisst normalverteilt mit den Parametern μ, σ^2 (μ reell, $\sigma > 0$), wenn sie folgende Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt:

$$f(x; \mu, \sigma)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}$$

in der standardisierten Form:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad , z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

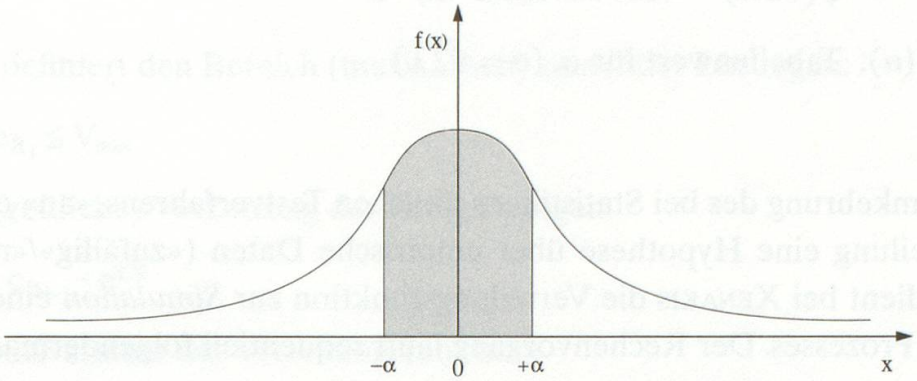
Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsintegral):

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\left\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} dx$$

standardisiert:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dx$$

Für die standardisierte Formel sind die Werte von F (α) tabelliert (z. B. in SPIEGEL [1961: Anhang]). Dieser Wert entspricht dem Mass der Fläche unter der standardisierten Kurve zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$:



für $\alpha = \infty$ ist $F(\alpha) = 1$.

Die Parameter der Verteilungsfunktion entpuppen sich als

μ: Erwartungswert (= Mittelwert)

σ: Standard Abweichung

(zum Beweis s. MENGES [1972: 243]).

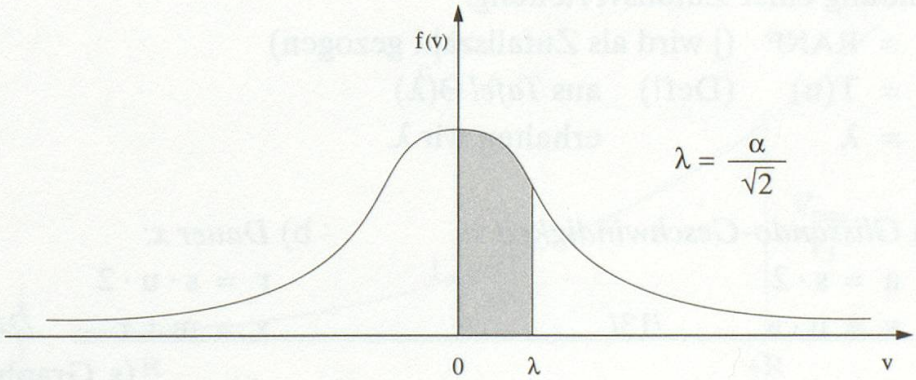
2. XENAKIS verwendet die Dichte- und Verteilungsfunktion in der Form, wie sie in der *kinetischen Gastheorie* verwendet wird (s. o.), die sogenannte reduzierte LAPLACE-Verteilung, vgl. LÉVY [1965: 7]):

$$f(v) = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\, e^{-\left\{\frac{v^2}{a^2}\right\}}$$

Verteilungsfunktion: $\lambda = \frac{v}{a}$

$$P\{v \le \lambda\} = \Theta(\lambda)\,;\, v \ge 0$$

$$\Theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2}\, d\lambda$$



Um mit den üblichen *Tabellen* rechnen zu können, muss man umformen:

$$\Theta(\lambda) = 2 \cdot \varphi(\sqrt{2}\lambda) \quad \text{bei Tabellen } 0, +\alpha$$
$$= \varphi(\sqrt{2}\lambda) \quad \text{bei Tabellen } -\alpha, +\alpha$$

wobei $\varphi(\alpha)$: Tabellenwert für α. ($\alpha = \sqrt{2}\lambda$)

3. In Umkehrung des bei Statistikern üblichen Testverfahrens, «an» einer Normalverteilung eine Hypothese über empirische Daten («zufällig»/«nicht») zu prüfen, dient bei XENAKIS die Verteilungsfunktion zur *Simulation* eines stochastischen Prozesses. Der Rechenvorgang läuft sequentiell folgendermassen ab:

1. Bestimmung der «Form» der Normalverteilung:
   Standardabweichung s, Mittelwert m.

   a) bei *Glissando-Geschwindigkeiten*:

   $$s = \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{ a aus /14/, /15/, /16/ (s. S. 471.)}$$

   $$m = 0 \Rightarrow v = X$$

   b) *Dauern*:

   $$s = \frac{z'}{4} \qquad m = \frac{z'}{2}$$

   wobei: $z' = \left| G \dfrac{\ln z}{\ln z_{max}} \right|$ /20/, G aus Tafel G(i)

   $$z = \frac{1}{c_{a_i} \cdot p_n \cdot q_r} \quad /17/ \quad z_{max} = \frac{A_{max}}{V_3 \cdot P_n}$$

   $$A_{max}(i) = \frac{1}{E_{(i)}}, \quad \left.\begin{matrix} E_i \\ P_n \end{matrix}\right\} \text{aus } \textit{Tafel E}, \quad V_3 = \text{const.}$$

2. Bildung einer Zufallsverteilung:
   j = RANF (j wird als Zufallszahl gezogen)
   j = T(u) (Def!) aus *Tafel* $\Theta(\lambda)$
   u = λ erhalten wir λ.

3. a) *Glissando-Geschwindigkeit v:*
   $a = s \cdot 2$
   $v = u \cdot a$ /13/

   b) *Dauer x:*
   $r = s \cdot u \cdot 2$
   $x = m \pm \tau$ /24/

   (s. Graphik S. 475)

Exkurs 11
Die gefaltete Verteilung P $(x, e^{\pm x})$

Xenakis definiert den Bereich (musikalisch) sinnvoller Lösungen:

1. $V_3 \leq c_{a_i} \leq V_{max}$ /6/

und die (zeitliche) Verkettung der Ereignisfolgen:

2. $c_{a_i} = c_{a_{i-1}} \cdot e^{\pm x}$ /7/

x ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion:

3. $P(x) = \frac{2}{s}\left(1 - \frac{x}{s}\right) dx \qquad s = RO = |R|$ /8/

Es gelte überdies eine logarithmische Skala:

$$R = \ell n \left(\frac{V_{max}}{V_3}\right) \smile e^R = \frac{V_{max}}{V_3}; -R = -\ln\left(\frac{V_{max}}{V_3}\right) = +\ln\left(\frac{V_3}{V_{max}}\right) \quad e^{-R} = \frac{V_3}{V_{max}} \;!$$

$$V_3 e^R = V_{max};$$

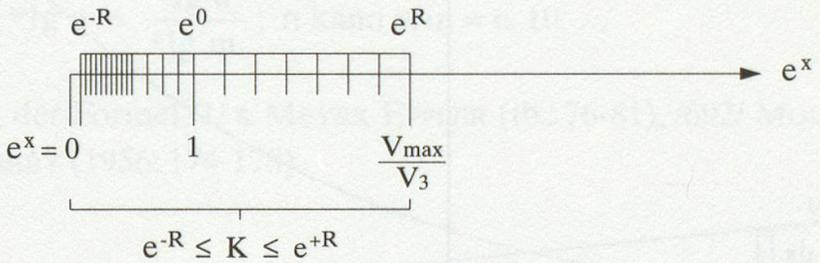
aus /6/:

$$V_3 e^0 \leq c_{a_i} \leq V_3 e^R$$

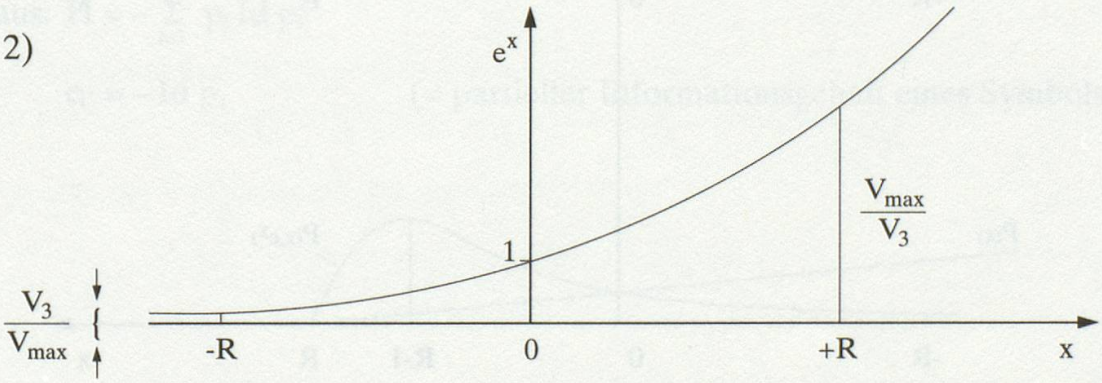
$$x \in \overline{OR} = s,\ 0 \leq x \leq s,\ s = |R|$$

$$c_{a_{i+1}} = c_{a_i} \cdot K(x),\ K(x) = e^{\pm x}$$

1)



2)



Erwartungswert von K (x) : P (x, e^x)
= der «Veränderungsfaktor»
des Dichtemittelwertes.

aus /8/:

$$E\{K(x)\} = P(x) \cdot e^x = \left(\frac{2}{s}\,dx - \frac{2x}{s^2}\,dx\right) e^x$$

$$= \frac{2}{s}\,dx\,e^x - \frac{2x}{s^2}\,dx\,e^x$$

$$P'(x, e^x) = \frac{2}{s}\,dx\,e^x - \left[\frac{2}{s^2}\,dx\,e^x + \frac{2x}{s^2}\,dx\,e^x\right]$$

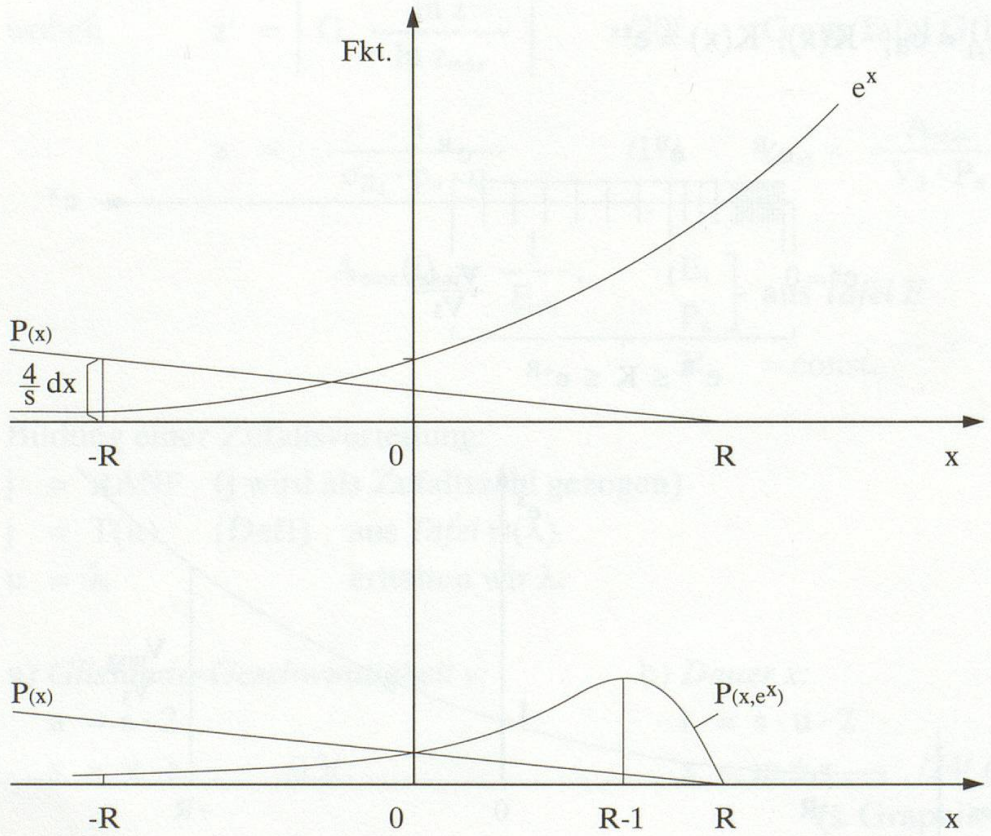
$$= \frac{2}{s}\,e^x \left(1 - \frac{1}{s} - \frac{x}{s}\right) dx$$

Max. der Funktion bei:

$P'(x, e^x) = 0$ für $x_1 = \sim\infty$ (Min.)
$x_2 = s-1$ (Max.)
da $s = |R|$ $x_2 = R-1$

Eintretenswahrscheinlichkeit von E { K(x) }:

$$K(x_2) = \frac{2}{s^2}\,dx \cdot e^{s-1}$$



Exkurs 12
Die Entropie

Der mittlere Informationsgehalt (*Informationsentropie*) je Symbol aus einem Symbolkollektiv wird durch folgende Formel ausgedrückt (in bit/Symbol; bit = *bi*nary dig*it*):

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \, \mathrm{ld}\, p_i \qquad /1/$$

wobei: $\mathrm{ld}\, a = {}^{2}\mathrm{lg}\, a$; ${}^{m}\mathrm{lg}\, a = y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} m^y = a$
(für ld: m = 2)

$p_i = \dfrac{P_i}{U}$ ist die *Belegungsdichte* des Symbols S_i, welches in U genau P_i mal vorkommt.

n ist die Grösse des Vorrats an Symbolen

S_i, $i = 1, 2, 3, \ldots n$

$\mathrm{ld}\, p_i$ ist der *dyadische Logarithmus* von p_i. Der dyadische Logarithmus der Nachrichtenzahl hat sich als aussagefähige Masszahl für das Informationsangebot erwiesen (s. dazu /685/ MEYER-EPPLER [1969: 35 f., 69-71]). Zur Berechnung von ld a s. Vertafelung (MEYER-EPPLER [ib.: 490 ff.]); der dyadische Logarithmus lässt sich zudem auf einfache Weise auf die 10er- oder e-Basis zurückführen:

$${}^{m}\mathrm{lg}\, a = \frac{{}^{n}\mathrm{lg}\, a}{{}^{n}\mathrm{lg}\, m}\ ;\ \text{n kann sein} = e, 10, \ldots$$

Zur Herleitung der Formel /1/ s. MEYER-EPPLER (ib.: 76-81), /692/ MOLES (1958: 27-35), /663/ ASHBY (1956: 174-178).

Ableitungen:

aus: $H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \, \mathrm{ld}\, p_i$

$c_i = -\mathrm{ld}\, p_i$ (= partieller Informationsgehalt eines Symbols)

Die mathematische Erwartung E sämtlicher Informationsgehalte entspricht der Informationsentropie H.

$$H = E(c_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \mathrm{ld}\, p_i c_i$$

$$\hat{H} = \max\{H\} \Longleftrightarrow p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \mathrm{ld}\, n \equiv b \qquad (\textit{Symbolkosten})$$

$$h = \frac{H}{\hat{H}} = \frac{-\Sigma\, p_i \, \mathrm{ld}\, p_i}{\mathrm{ld}\, n} \quad : \text{relative Informationsentropie}$$

$\rho = 1 - h$: relative Redundanz

$\Omega = \hat{H} - H$: absolute Redundanz.

Die Masszahlen h, ρ, Ω sind geeignet, Kollektive von verschiedenem Symbolvorrat miteinander zu vergleichen. Die Redundanz wird oft als «*Weitschweifigkeit*» eines Symbolkollektivs bezeichnet.

Exkurs 13
Der Korrelationseffizent

$$\rho = \frac{n \cdot \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n \cdot \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2] \cdot [n \cdot \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

Der Korrelationskoeffizient ρ ist eine Masszahl, mit welcher anhand einer Stichprobe empirisch wechselseitige stochastische Zusammenhänge zwischen Zufallsgrössen untersucht werden. Diese Untersuchung heisst Korrelationsanalyse (vgl. MÜLLER 1975: 126). Eine Masszahl ist, allgemein definiert, eine Funktion einer Stichprobe und als solche eine Zufallsvariable (vgl. MENGES 1972: 204).

1. Allgemeine Definition (nach MÜLLER 1975: 126-130):

   X, Y seien zwei Zufallsgrössen, mit endlichen Streuungen σ_X^2, σ_Y^2.

   Der Korrelationskoeffizient sei:

$$\rho \equiv \frac{E\{(X - EX)(Y - EY)\}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad \text{E: Erwartungswert}$$

   wobei gilt: $-1 \leq \rho \leq +1$

   bedeutend $\rho > (<) 0$: X, Y positiv (negativ) korreliert
   $\rho = \pm 1$: X, Y extremal korreliert
   $\rho = 0$: X, Y unkorreliert

$$\sigma_X^2 (1 - \rho^2) = \min_{\alpha, \beta} E\{(X - \alpha - \beta Y)^2\}$$

   bzw.

$$\sigma_Y^2 (1 - \rho^2) = \min_{\alpha, \beta} E\{(Y - \alpha - \beta X)^2\}$$

   daher ist ρ ein Mass für die lineare Abhängigkeit zwischen X, Y

   Korrelationsgeraden: $Y = \alpha_1 + \beta_1 X$
   $X = \alpha_2 + \beta_2 Y$.

   ρ kann mittels einer Stichprobe geschätzt werden.
   Es wird die Divergenz der zwei Korrelationsgeraden ermittelt:

   $\rho =$ das geometrische Mittel des Quotienten:

$$\frac{\text{Erwartungswert der Streuungen}}{\text{wirkliche Streuungen}}$$

$$= \sqrt{\frac{E\{\Sigma(X-\overline{X})^2 \cdot \Sigma(Y-\overline{Y})^2\}}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}}$$

Praktikable Formeln (nach SPIEGEL [1961: 253]), nach Umformung:

$$\rho = \frac{\Sigma(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sqrt{[\Sigma(X-\overline{X})^2][\Sigma(Y-\overline{Y})^2]}}$$

und nach weiterer Umformung (s. SPIEGEL 1961: 255):

$$\rho = \frac{n \cdot \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n \cdot \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][n\,\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

2. *Formelsammlung* zu Fn. 53, S. 510:

$$\overline{X} = \frac{\overset{n}{\Sigma} X}{n}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n}}$$

$$V = \frac{\sigma_n}{\overline{X}}$$

$$\varepsilon = \frac{m_4}{s_4} - 3, \text{ wobei: } m_\upsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X)^\nu$$

$$s_4 = m_2^2 = \sigma_n^4$$

und

$$m_2 = \frac{\overset{n}{\Sigma}(X-\overline{X})^2}{n} = \sigma_n^2$$

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i\,{}^2\lg p_i = -\sum_{n=1}^{n} p_i \cdot \frac{\lg p_i}{\lg 2}$$

$$h = \frac{\hat{H}}{H}, \quad \hat{H} = -{}^2\lg \frac{1}{n}$$

$$r = \frac{n \cdot \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n \cdot \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][n\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

Exkurs 14
Der Chiquadrat-Test

Die χ^2-*Verteilung* bildet in der Statistik die Prüfverteilung schlechthin, um die Übereinstimmung zwischen *beobachteter* und *erwarteter* (*theoretischer*) Verteilung von Ereignissen (*Frequenzen*) zu messen.

Sie ist definiert durch:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$$

Ereignisse:		$E_1, E_2, E_3, \ldots E_k$
I:	beobachtete Frequenz:	$o_1, o_2, o_3 \ldots o_k$
S:	erwartete Frequenz:	$e_1, e_2, e_3 \ldots e_k$

wobei: $\Sigma e_j = \Sigma o_j = N$: totale Frequenz der Ereignisse.

Ist $\chi^2 = 0$, so besteht völlige Übereinstimmung zwischen beobachteten und erwarteten Ereignisfrequenzen; je höher der Wert χ^2, um so grösser die Diskrepanz.

Es liegt in der Natur von statistischen Ereignissen, dass die Differenz zwischen beobachteten und theoretischen Frequenzen nicht Null sein kann, sondern sich im Rahmen der Zufallsstreuung bewegt, ohne indes allzu gross werden zu dürfen. Eine Entscheidungshilfe darüber, ob die Abweichung zufälliger Natur ist oder nicht, bietet der χ^2-*Test* (s. dazu MENGES [1972: 253 f.], SPIEGEL [1961: 167, 190, 201-207]):

In der Regel werden statistische Entscheide aufgrund einer Hypothese gefällt, die mit einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit verworfen wird: Man formuliert eine «*Nullhypothese*» (H_0) mit dem Ziel, sie durch den statistischen Test zu verwerfen, wobei der Irrtum, die Hypothese *fälschlicherweise* zu verwerfen («*Fehler Typ I*»), nicht höher als das sogenannte *Signifikanzniveau* α sein darf.

Das heisst: Der *kritische Wert*, den der χ^2-Wert nicht überschreiten darf, entspricht dem $(1-\alpha)$-Perzentilwert der mit ν parametrisierten χ^2-Verteilung; wobei $\nu = N-1$. Falls $\chi^2 > \chi^2_p$, ist die Abweichung signifikativ und H_0 zu verwerfen.

In unserem Fallbeispiel (S. 511) für *JW 12*, ist

die Nullhypothese H_0: Die Abweichung von beobachteten und theoretischen Ereignisfrequenzen bewegt sich im Rahmen zufälliger Streuung.

Das Signifikanzniveau für einen Fehler Typ I sei 5 Prozent.

Es gibt acht Ereignisklassen (= Klangfarben); daraus folgt: $\nu = N\text{-}1 = 7$.

Der Wert $\chi^2_{.95}$ für das 95-Perzentil bei $\nu = 7$ wird in *Tafeln* (z. B. in SPIEGEL [1961: Anhang]) konsultiert:

$\chi^2_{.95} = 14.1$, grösser als «unser» $\chi^2 = 13.63$.

Fazit: Auf einem Signifikanzniveau von 5 % kann H_0 nicht verworfen werden; die beobachtete Abweichung der Frequenzen dürfte sich hiermit im Rahmen des Zufälligen bewegen.