

Zeitschrift: Prisma : illustrierte Monatsschrift für Natur, Forschung und Technik
Band: 8 (1953)
Heft: 4

Artikel: Das Einmaleins der modernen Kosmologie
Autor: Ferrari d'Occhieppo, Konradin
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-653969>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das EINMALEINS der modernen KOSMOLOGIE

Von Univ.-Doz. Dr. Konradin Ferrari d'Occhieppo

DK 513.44:513.811.3

Es gehört schon zu den Gemeinplätzen der astronomischen Populärliteratur, daß man sich gewisse Eigenschaften der vierdimensionalen Welt bis zu einem gewissen Grade veranschaulichen könne, indem man dem Raum in Gedanken eine seiner drei Dimensionen wegnimmt, ihn also zu einer (im allgemeinen Fall gekrümmten) Fläche macht, wobei dann die dritte Dimension als Analogon zu der sonst nicht vorstellbaren vierten verfügbar wird. Nun ist es keineswegs so, als gäbe es zwischen dem Stehenbleiben bei dieser auf bloßer Anschauung beruhenden Darstellungsweise einerseits und ihrer hochmathematischen, alle Finessen der Tensoranalysis benutzenden Durchführung anderseits keinen Mittelweg. Vielmehr lassen sich einige grundlegende Tatsachen, die aus dem einfachen Analogiebild nicht mehr ohne weiteres ablesbar sind, ohne Schwierigkeit mit dem mathematischen Rüstzeug eines Mittelschülers quantitativ begründen. Ein kleiner Einblick in dieses „Einmaleins der modernen Kosmologie“ wird sicher vielen willkommen sein, die zwar nicht Zeit haben, ein Hochschullehrbuch der Relativitätstheorie durchzuarbeiten, aber den Vortzug durchsichtiger mathematischer Formeln vor umständlichen Umschreibungen zu schätzen wissen.

I. Die Kugelfläche

Um an allgemein Bekanntes anzuknüpfen, sei mit einer Betrachtung der gewöhnlichen Kugelfläche begonnen. Die Abbildung stellt einen Querschnitt durch eine solche dar und bedarf wohl kaum einer besonderen Erläuterung; doch sei eigens hervorgehoben, daß \bar{r} die Bogenlänge PB (nicht etwa die zugehörige Sehne) bedeuten soll. Um den beliebigen Punkt P seien konzentrische Kreise gelegt, deren einer durch B' und B hindurchgeht und als Radius (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) r hat, während man \bar{r} seinen „sphärischen“ oder auch „geodätischen“ Radius nennen könnte, der längs der Kugeloberfläche die kürzeste Ver-

bindungslinie von der Mitte zu einem Randpunkt darstellt.

Drückt man die Größe des Winkels X im „natürlichen Bogenmaß“ aus, dessen Einheit gleich $(180^\circ/\pi) \approx 57,3^\circ$ ist, so gelten offenbar folgende

Beziehungen zwischen r , \bar{r} , R und X sowie deren Differentialen:

$$\left. \begin{aligned} r &= R \sin X; \quad dr = R \cos X \, dX; \\ \bar{r} &= R \cdot X; \quad d\bar{r} = R \, dX; \\ d\bar{r} &= dr / \cos X \end{aligned} \right\} (1)$$

Die Fläche eines sehr schmalen Kreisringes auf der Kugelfläche (auch Kugelzone genannt) von der Breite $d\bar{r}$ wird mit diesen Bezeichnungen

$$dF_{\text{Zone}} = 2\pi r \, d\bar{r}, \quad \dots \quad (2)$$

eine Formel, die nebeneinander die Größen r und \bar{r} enthält, aber vermöge (1) leicht auf die einzige unabhängige Veränderliche X umgerechnet werden kann. Nach dieser ist dann auch zwecks Berechnung der ganzen innerhalb des Kreises $B'B$ gelegenen Kalottenfläche die Integration, d. h. die Summierung aller dieser unendlich schmalen Kreisringe, durchzuführen. Das Ergebnis ist $F_{\text{Kalotte}} = 2\pi R^2 \int_0^X \sin X \, dX = 2\pi R^2 (\cos_0 - \cos X) = 2\pi R^2 (1 - \cos X) \quad \dots \quad (3)$

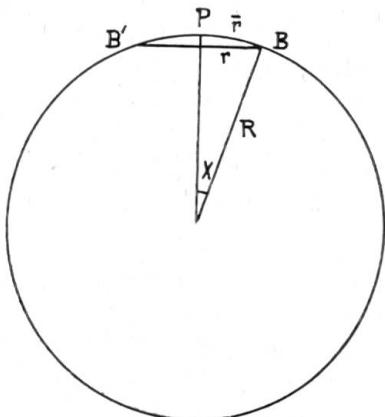
Dies läßt sich unter Verwendung der bekannten Formel

$$\cos X = \cos^2 \frac{X}{2} - \sin^2 \frac{X}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{X}{2} \quad (4)$$

weiter vereinfachen zu

$$F_{\text{Kalotte}} = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{X}{2} \quad \dots \quad (5)$$

Da die Sehne $PB = 2R \sin X/2$ ist, kann man den Inhalt von (5) in Worten so aus-



sprechen: die Oberfläche einer Kugelkalotte ist gleich der Fläche eines ebenen Kreises, dessen Radius gleich der vom Pol der Kalotte zu einem beliebigen Randpunkt gezogenen Sehne ist. — Mit $X = \pi$ ergibt sich schließlich die bekannte Formel für die Oberfläche einer Kugel

$$F_{\text{Kugel}} = 4 \pi R^2 \dots \quad (6)$$

II. Die Hypersphäre

Die vorstehenden Überlegungen, die für die meisten unserer Leser nur die Auffrischung von Kenntnissen ihrer Schulzeit sein dürften, wurden absichtlich in einiger Ausführlichkeit gebracht, um die jetzt zu besprechende Analogie zur „Hypersphäre“ deutlicher herausarbeiten zu können. Zunächst einmal bleiben die Formeln (1) ihrer äußeren Gestalt nach unverändert auch für die Hypersphäre in Geltung. Ihre Bedeutung ist jedoch insofern eine andere, als jetzt nur noch \bar{r} in den anschaulichen drei Raumdimensionen liegt, während R , r und X die Hinzunahme der vierten Dimension erfordern. Genauer gesagt sei \bar{r} eine gewisse Bogenlänge längs einer „geodätischen Linie“, R der „Krümmungsradius“ des sphärischen Raumes. Beide zusammen bestimmen gemäß der zweiten Zeile in (1) den Winkel X und durch diesen auch r .

Ebenso wie für den Kreis auf der gewöhnlichen Kugel die bekannte Umfangsformel $U = 2 \pi r$ gültig blieb, wobei der zu verwendende Radius r nicht auf der Kugelfläche, sondern in der dritten Dimension zu messen war, so gilt für die Maßzahl der Kugeloberfläche auch im sphärisch gekrümmten Raum die Formel (6), wenn an Stelle von R (das jetzt eine andere Bedeutung erhalten hat) ein der vierten Dimension angehöriges r gemäß den eben getroffenen Festsetzungen eingesetzt wird.

Die Analogie zur Zone (Kreisring) auf der zweidimensionalen (gewöhnlichen) Kugelfläche bildet im Dreidimensionalen eine dünne Kugelschale, deren Dicke $d\bar{r}$ natürlich im dreidimensionalen Raum zu messen ist. Ihr Volumen (zwischen zwei benachbarten konzentrischen Kugelflächen) wird daher

$$dV_{\text{Schale}} = 4 \pi r^2 d\bar{r} \dots \quad (7)$$

Unter Verwendung von (1) wird auch dies auf die einzige Veränderliche X zurückgeführt und integrierbar gemacht. In Analogie zur Kalottenfläche steht jetzt das Volumen einer dreidimensionalen V olk u g e l im sphärisch gekrümmten Raum

$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} &= 4 \pi R^3 \int_0^X \sin^2 X dX = \\ &= 2 \pi R^3 (X - \frac{1}{2} \sin 2X) \dots \quad (8)^1 \end{aligned}$$

Auf den ersten Blick scheint der Unterschied gegenüber der geläufigen stereometrischen Formel des Archimedes $4 \pi r^3/3$ fast unüberbrückbar. Würde man aber an Stelle von $\sin 2X$ die entsprechende Potenzreihe einsetzen, so bliebe in der Klammer als Differenz gegen X als erstes Glied $\frac{2}{3} X^3$ stehen, so daß sich, wie es nicht anders sein kann, für sehr kleine Werte von X genau die Archimedische Formel ergibt, wenn man berücksichtigt, daß $R^3 \cdot X^3 = \bar{r}^3$ ist. Geht man indessen bis zu $X = \pi$, so verschwindet der Subtrahend in der Klammer von (8) und man findet für das Volumen der hypersphärischen Welt die oft zitierte Formel

$$V_{\text{Welt}} = 2 \pi^2 R^3 \dots \quad (9)$$

in der das sonst gänzlich ungewohnte π^2 am fremdartigsten anmutet.

III. Anwendungen auf die Kosmologie

Die geschlossenen Formeln (8) und (9) haben den Nachteil, daß zu ihrer Anwendung die Kenntnis des Weltradius Voraussetzung wäre. Tatsächlich besteht aber das Problem gerade darin, diesen womöglich auf mehreren, voneinander unabhängigen Wegen zu bestimmen. Dazu ist eine kleine Umgestaltung der Formel (7) zweckmäßig. Man macht sich dabei den Umstand zunutze, daß die bisher verfügbaren Beobachtungen sicher nur einen mäßigen Bruchteil des gesamten Weltvolumens erfassen. Ist nun der Winkel X nicht allzu groß, so darf man in (4) annähernd setzen

$$2 \sin^2 \frac{X}{2} \approx \frac{1}{2} \sin^2 X = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2.$$

Mit einer weiteren unter denselben Voraussetzung zulässigen Vereinfachung erhält man schließlich an Stelle der letzten Gleichung (1) annähernd

$$d\bar{r} \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] dr \dots \quad (10)$$

Damit wird aber aus (7) eine übersichtliche Näherungsformel für das Volumen einer K u-

¹⁾ Wem die Kunstgriffe des Integrierens nicht mehr geläufig sind, wird die Richtigkeit dieser Formel dennoch leicht durch Differentiation des Klammerausdruckes zur Rechten und Umformung des Ergebnisses mit Hilfe von (4) verifizieren: es entsteht dann wiederum der Integrand $\sin^2 X dX$, wie es sein muß.

g e l s c h a l e im sphärisch gekrümmten Raum

$$dV_{\text{Schale}} \approx 4 \pi r^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] dr . . . (11)$$

aus der R berechnet werden kann, falls r , dr und dV bekannt sind.

Um etwa auftauchenden Bedenken zu begegnen, mag noch kurz zahlenmäßig nachgewiesen werden, daß alle in (11) vorgenommenen Vernachlässigungen zusammen sicher weniger als 0,3% Fehler in dV ausmachen, solange $r/R < 0,3$ bleibt. Es ist nämlich für diesen Höchstwert streng $0,3 = r/R = \sin 17^\circ 28'$; hiermit $1/\cos 17^\circ 28' = 1,048$. Dagegen wird

$$\left[1 + \frac{1}{2} \left(0,3 \right)^2 \right] = 1,045. \text{ Das Beispiel zeigt zu-}$$

gleich auch, daß bis zu der genannten Entfernung der Einfluß der Raumkrümmung auf das Volumen einer dünnen Kugelschale im ganzen noch nicht einmal volle 5% erreicht.

Die Frage liegt nahe, weshalb (11) auf r und nicht auf die vom Lichtstrahl durchlaufene „geodätische“ Entfernung \tilde{r} eingerichtet worden ist. Eine Überlegung über die Methoden der astronomischen Entfernungsbestimmung wird dies rechtfertigen. Diese lassen sich nämlich, so vielgestaltig sie im einzelnen sein mögen, auf nur zwei verschiedene Grundgedanken zurückführen: entweder man mißt den Winkel, unter dem eine Strecke von bekannter Länge in normaler Daraufsicht erscheint, das ist die trigonometrische Methode; oder man mißt die scheinbare Helligkeit einer Lichtquelle, deren auf eine bestimmte Einheitsentfernung bezogene „absolute Leuchtkraft“ als bekannt angesehen werden darf, die photometrische Methode. Nur mittelbar kommt bei den extragalaktischen Sternsystemen noch eine dritte Art von Entfernungs kriterium in Betracht, die Größe der Rotverschiebung der Spektren.

Den Grundgedanken der trigonometrischen Methode im Falle des gekrümmten Raumes kann man recht gut anschaulich an der Analogie auf der gewöhnlichen Kugelfläche betrachten. Zwei Lichtstrahlen, die den voraussetzungsgemäß „zweidimensionalen Raum“, d. h. die Kugelfläche, nicht verlassen können, also Großkreise (z. B. Meridiane) beschreiben, mögen in P unter dem Winkel p zusammenlaufen; ihre Ausgangspunkte sollen auf einem Parallelkreis um P liegen und den gegenseitigen Abstand d haben, während die sphärische (geodätische) Entfernung von P gleich \tilde{r} sei. Man sieht sofort, daß $d = 2 \pi r p / 360$ ist (wenn p

in Grad gemessen würde). Wertet man also eine solche Messung ohne Rücksicht auf das Vorhandensein einer Raumkrümmung aus — wie man mangels genauer Kenntnis der letzteren zu verfahren genötigt ist —, so erhält man nicht \tilde{r} , sondern r als Entfernung. Diese Überlegung könnte ebenso und mit gleichem Ergebnis im Vierdimensionalen angestellt werden.

Zu demselben Resultat führt aber auch die photometrische Methode. Nach Berücksichtigung allfälliger störender Einflüsse anderer Art, wie interstellarer Lichtabsorption usw., rechnet man mit einer Annahme der scheinbaren Helligkeit umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung, oder — anders ausgedrückt — so, als ob sich das von einer Lichtquelle ausgehende Licht auf Hohlkugeln ausbreite, deren Oberflächen genau proportional dem Quadrat ihrer Radien zunehmen würden. Gemäß (7) trifft dies aber wiederum nicht für den geodätischen Radius \tilde{r} , sondern für r zu. Wollte man wortklauberisch sein, so dürfte man also den Entfernungen, die auf diese oder jene Art gemessen wurden, gar nicht die Benennung „Lichtjahre“ geben, da sie im „positiv“ gekrümmten Raum unter allen Umständen kürzer sind, als der vom Licht zurückgelegte Weg. Nur nebenbei sei gesagt, daß bei „negativer“ Raumkrümmung, d. h. wenn $R^2 < 0$ sein sollte, das Entgegengesetzte der Fall wäre, nämlich $r > \tilde{r}$.

Noch einer Merkwürdigkeit des sphärisch gekrümmten Raumes sei in diesem Zusammenhang gedacht: vorausgesetzt, daß etwa aus (11) oder auf anderem Wege R gefunden und für ein bestimmtes Objekt r gemessen sei, liefert offenbar die erste der Formeln (1) hierzu zwei verschiedene Werte von X , nämlich X_1 und $\pi - X_1$, und demgemäß gibt es auch zu jedem r zwei verschiedene \tilde{r} . Dennoch dürfen wir sicher sein, daß sich unter den Spiralnebeln mit kleiner „Entfernung“ r keine „Gespenster“ aus der Antipodenregion des Weltalls befinden. Denn die Rotverschiebung der Spiralnebelspektren als Folge des beständigen Anwachsens von R würde auch über $X = \pi/2$ hinaus weiter zunehmen; große Rotverschiebungen bei kleinen r wurden aber bisher niemals beobachtet. Ob man aus irgend einem Grund Objekte von der Gegenhälfte der Welt nicht sehen kann, oder ob es sie gar nicht gibt, braucht hier als eine noch gänzlich offene Frage nicht erörtert zu werden.

Die größte Schwierigkeit für die Ermittlung des Weltradius aus (11) bietet aber jedenfalls

die einwandfreie und hinlänglich genaue Bestimmung des Volumens dV . Man muß dazu auf eine Teilaussage des sogenannten Weltpostulates zurückgreifen, wonach der Raum unbeschadet einer gewissen statistischen Schwankungsbreite im großen Durchschnitt überall gleichmäßig dicht mit Materie (bzw. Spiralnebeln) erfüllt ist. Dann wird also die Anzahl der extragalaktischen Systeme in einem bestimmten Raumsektor und zwischen bestimmten Entfernungsgrenzen nach Multiplikation mit einem konstanten Faktor als Maßzahl des entsprechenden Volumens genommen werden dürfen. Die Berechtigung zu dieser Annahme darf man dann als gegeben ansehen, wenn in jenen Gegenden des Himmels, welche nicht durch vordergründige interstellare

Absorption gestört sind, keine richtungsabhängigen Unterschiede auftreten, die das zulässige Maß zufälliger Schwankungen überschreiten.

Sobald man die im vorletzten Absatz erwähnte zeitliche Änderung des Krümmungsradius der Welt mit in Betracht zu ziehen versucht, wird die Sache dadurch verwickelter, daß nunmehr Bewegungszyklen zu behandeln sind, was wieder die Berücksichtigung der Relativitätstheorie verlangt. Gewiß ließe sich auch da noch manches mit verhältnismäßig leichten mathematischen Hilfsmitteln bewältigen; doch dürfte das „Kleine Einmaleins der Kosmologie“ wohl mit der Behandlung des statischen Universums zu Ende sein.

DIE MAGNETPUMPE

Eine Pumpe ohne bewegliche Teile

Von Alois Schönherr

DK 621.69:538.69:621.039.445

Zum erstenmal in der Geschichte der Technik ist es nunmehr gelungen, eine Pumpe zu entwickeln, die ohne bewegliche Teile absolut kontinuierlich arbeitet. Dies ist um so überraschender, als das Prinzip, auf dem die Erfindung beruht, schon seit mehr als 100 Jahren allgemein bekannt ist. Wahrscheinlich dürfte

die Ursache hierfür darin zu suchen sein, daß die Industrie erst seit einigen Jahren Verwendungsmöglichkeiten für ein derartiges Gerät geschaffen hat. Bei dem neuen Gerät handelt es sich um eine in den Laboratorien der General Electric konstruierte Pumpe für flüssige Metalle.

Die Pumpe besteht aus einem Rohr (Abb. 1), in das bei a das flüssige Metall eintritt. Das Rohr befindet sich zwischen den Polen N und S eines Elektromagneten, der ein in Pfeilrichtung verlaufendes starkes elektromagnetisches Feld erzeugt. Senkrecht zu diesem Feld und senkrecht zur Längsachse des Rohres wird nun ein Gleichstrom so durch das Rohr geleitet, daß das in ihm enthaltene flüssige Metall vom Strom durchflossen wird. Nun wird aber ein stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld beschleunigt, eine Erscheinung, die schon lange bei Drehspulmeßgeräten praktisch ausgenutzt wird. Auch das im Rohr R befindliche flüssige Metall erfährt eine solche Beschleunigung, da es ja auch ein Leiter ist. Die Richtung der Bewegung, in diesem Falle also des Metallflusses, kann mit der bekannten Linkehandregel von Fleming leicht ermittelt werden.

Durch Verändern der Stromstärke im Metall oder der Feldstärke des Magneten läßt sich

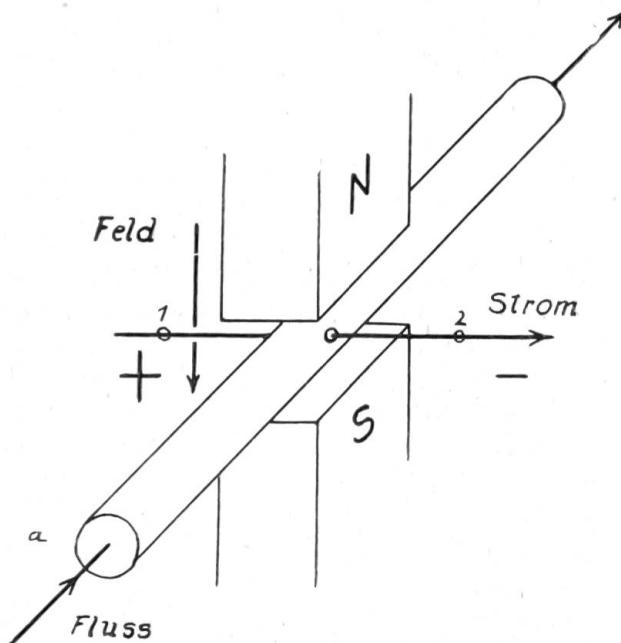


Abb. 1