Zeitschrift: Schatzkästlein: Pestalozzi-Kalender

**Herausgeber:** Pro Juventute

**Band:** - (1992)

Rubrik: Rechnen, Geometrie, Algebra

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

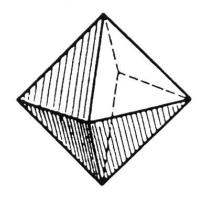
**Download PDF:** 19.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# RECHNEN, GEOMETRIE, **ALGEBRA**



8 gleichseitige Dreieckflöchen.

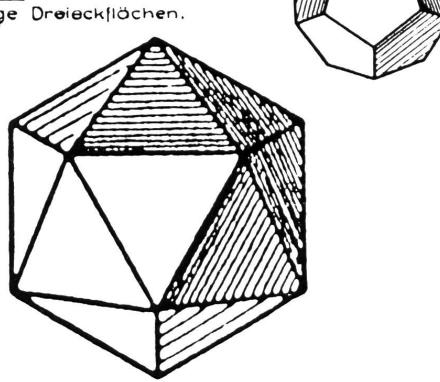


# Dodekaeder.

12 regelmässige Fünfeckflächen.



20 gleichseitige Dreieckflöchen.



# **Einmaleins**

2         4         6         8         10         12         14         16         18         20         22         24         26         28         30           3         6         9         12         15         18         21         24         27         30         33         36         39         42         45           5         10         15         20         25         30         35         40         44         48         52         56         60           7         14         21         28         35         42         49         56         63         70         77         84         91         98         105           8         16         24         32         40         48         56         64         72         80         88         96         104         112         122           9         18         27         36         45         54         63         72         81         90         99         108         117         126         135           10         20         33         44         55         66         77         88		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3         6         9         12         15         18         21         24         27         30         33         36         39         42         45           5         10         15         20         25         30         35         40         45         50         55         60         65         70         75           6         12         18         24         30         36         42         48         54         60         66         72         78         84         90           7         14         21         28         35         42         49         56         63         70         77         78         84         90           16         24         32         40         48         56         64         72         80         90         100         110         120         130         140         150         150         150         150         150         150         150         150         150         150         150         150         160         120         130         140         150         150         150         150         150         160         120 <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> <td>12</td> <td>14</td> <td>16</td> <td>18</td> <td>20</td> <td>22</td> <td>24</td> <td>26</td> <td>28</td> <td>30</td>	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
5         10         15         20         25         30         35         40         45         50         55         60         65         70         75           6         12         18         24         30         36         42         48         54         60         66         72         78         84         90           7         14         21         28         35         42         49         56         63         70         77         84         91         98         102         120         30         40         50         60         70         80         90         100         110         120         130         140         150           11         22         33         44         55         66         77         88         99         110         121         132         143         154         165           12         24         36         48         60         72         84         96         108         192         144         156         168 <t td="">         182         196         116         132         48         66         70         84         98</t>	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	
6         12         18         24         30         36         42         48         56         63         70         77         84         91         98         102           8         16         24         32         40         48         56         64         72         80         88         96         104         112         120           9         18         27         36         45         54         63         72         81         90         99         108         117         126         135           10         20         30         40         50         60         70         80         90         100         110         120         130         140         156           11         22         33         44         56         60         77         84         98         110         121         132         143         166         168         180           12         24         36         48         60         75         90         105         120         135         150         165         180         195         210         225           14         28	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
7         14         21         28         35         42         49         56         63         70         77         84         91         98         105           8         16         24         32         40         48         56         64         72         80         88         96         104         112         120           10         20         30         40         50         60         70         80         90         100         110         120         130         140         150           11         22         33         44         55         66         77         88         99         110         121         132         143         154         165           12         24         36         48         60         72         84         96         108         120         132         144         156         168         165         168         39         52         65         78         91         104         117         30         156         168         182         195         110         153         170         158         182         196         210         225	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
8         16         24         32         40         48         56         64         72         80         88         96         104         112         120           9         18         27         36         45         54         63         72         81         90         99         108         117         126         135           11         22         33         44         55         66         77         88         99         110         121         132         143         154         165           12         24         36         48         60         72         84         96         108         120         132         144         156         168         180           13         26         39         52         65         78         91         104         117         130         143         156         169         182         195           14         28         42         56         70         84         98         112         126         140         154         182         196         220           15         30         45         60         75	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
9         18         27         36         45         54         63         72         81         90         99         108         117         126         135           10         20         30         40         50         60         70         80         90         100         110         120         130         140         150           11         22         33         44         56         60         72         84         96         108         120         132         144         156         168         180           13         26         39         52         65         78         91         104         117         130         143         156         169         182         195           14         28         42         56         70         84         98         112         126         140         154         168         182         195         110         153         150         165         180         195         210         225         216         140         160         180         196         121         228         240         220         221         238         255 <td>7</td> <td>14</td> <td>21</td> <td>28</td> <td>35</td> <td>42</td> <td>49</td> <td>56</td> <td>63</td> <td>70</td> <td>77</td> <td>84</td> <td>91</td> <td>98</td> <td>105</td>	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
10         20         30         40         50         60         70         80         90         100         110         120         130         140         150           11         22         33         44         5E         66         77         88         99         110         121         132         143         154         165         168         180           13         26         39         52         65         78         91         104         117         130         143         156         168         182         195           14         28         42         56         70         84         98         112         126         140         154         168         182         195         210         225           16         32         48         64         80         96         112         128         144         160         176         195         210         225           18         36         54         72         90         108         126         144         162         180         198         216         234         252         270           19	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
11         22         33         44         55         66         77         88         99         110         121         132         143         154         168         180           12         24         36         48         60         72         84         96         108         120         132         144         156         168         180           13         26         39         52         65         78         91         104         117         130         143         156         169         182         195           14         28         42         56         70         84         98         112         126         140         154         168         182         196         210           15         30         45         60         75         90         105         120         135         150         165         180         195         210         225           16         32         48         64         80         96         102         140         160         180         195         210         221         242         242         242         242         242         <	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
12         24         36         48         60         72         84         96         108         120         132         144         156         168         180           13         26         39         52         65         78         91         104         117         130         143         156         169         182         195           14         28         42         56         70         84         98         112         126         140         154         168         182         196         210           15         30         45         60         75         90         105         120         135         150         165         180         195         210         225           16         32         48         64         80         96         112         128         144         160         180         198         216         221         238         255           18         36         57         76         95         114         133         152         171         190         202         228         247         266         285           20         40         <	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
13         26         39         52         65         78         91         104         117         130         143         156         169         182         195           14         28         42         56         70         84         98         112         126         140         154         168         182         196         210           15         30         45         60         75         90         105         120         135         150         165         180         195         210         225           16         32         48         64         80         96         112         128         144         160         176         192         208         224         240           17         34         51         68         85         102         119         136         153         170         187         204         221         238         255           18         36         54         72         90         108         126         144         162         180         198         216         231         252         273         296         285           20	11		33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
14         28         42         56         70         84         98         112         126         140         154         168         182         196         210         225           16         32         48         64         80         96         112         128         144         160         176         192         208         224         240           17         34         51         68         85         102         119         136         153         170         187         204         221         238         255           18         36         54         72         90         108         126         144         162         180         198         216         234         255         270           19         38         57         76         95         114         133         152         171         190         209         228         247         266         285           20         40         60         80         100         120         140         160         180         200         222         240         260         280         300           21         42		24		48					108	120		144	156		
15         30         45         60         75         90         105         120         135         150         165         180         195         210         225           16         32         48         64         80         96         112         128         144         160         176         192         208         224         240           17         34         51         68         85         102         119         136         153         170         187         204         221         238         255           18         36         54         72         90         108         126         144         162         180         198         216         234         252         270           19         38         57         76         95         114         133         152         171         190         209         228         247         266         285           20         40         60         80         100         120         140         160         180         200         221         240         260         280         330           21         44         66												156			
16         32         48         64         80         96         112         128         144         160         176         192         208         224         240           17         34         51         68         85         102         119         136         153         170         187         204         221         238         255           18         36         54         72         90         108         126         144         162         180         198         216         234         252         270           19         38         57         76         95         114         133         152         171         190         209         228         247         266         285           20         40         60         80         100         120         140         160         180         200         220         240         260         280         300           21         42         63         84         105         126         147         168         189         210         231         252         273         294         315           22         44         46		28		56			98			140	154	168	182		
17         34         51         68         85         102         119         136         153         170         187         204         221         238         255           18         36         54         72         90         108         126         144         162         180         198         216         234         252         270           19         38         57         76         95         114         133         152         171         190         209         228         247         266         285           20         40         60         80         100         120         140         160         180         200         220         240         260         280         300           21         42         63         84         105         126         147         168         189         210         231         252         273         294         315           22         44         66         88         110         132         154         176         198         220         242         264         286         308         330           23         46         69 <td></td> <td>165</td> <td>180</td> <td></td> <td></td> <td></td>											165	180			
18         36         54         72         90         108         126         144         162         180         198         216         234         252         270           19         38         57         76         95         114         133         152         171         190         209         228         247         266         285           20         40         60         80         100         120         140         160         180         200         220         240         260         280         300           21         42         63         84         105         126         147         168         189         210         231         252         273         294         315           22         44         66         88         110         132         154         176         198         220         242         264         286         308         330           23         46         69         92         115         138         161         184         207         230         253         276         299         322         345           24         48         72 <td></td> <td>32</td> <td></td> <td>64</td> <td></td> <td>96</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>160</td> <td>176</td> <td>192</td> <td></td> <td>224</td> <td>240</td>		32		64		96				160	176	192		224	240
19         38         57         76         95         114         133         152         171         190         209         228         247         266         285           20         40         60         80         100         120         140         160         180         200         220         240         260         280         300           21         42         63         84         105         126         147         168         189         210         231         252         273         294         315           22         44         66         88         110         132         154         176         198         220         242         264         286         308         330           23         46         69         92         115         138         161         184         207         230         255         276         299         322         345           24         48         72         96         120         144         168         192         216         240         264         288         312         336         360           25         78         100<											187	204			255
20       40       60       80       100       120       140       160       180       200       220       240       260       280       300         21       42       63       84       105       126       147       168       189       210       231       252       273       294       315         22       44       66       88       110       132       154       176       198       220       242       264       286       308       330         23       46       69       92       115       138       161       184       207       230       253       276       299       322       345         24       48       72       96       120       144       168       192       216       240       264       288       312       336       360         25       50       75       100       125       150       175       200       225       250       275       300       325       350       375         26       52       78       104       130       156       182       208       234       260       286       312															
21       42       63       84       105       126       147       168       189       210       231       252       273       294       315         22       44       66       88       110       132       154       176       198       220       242       264       286       308       330         23       46       69       92       115       138       161       184       207       230       253       276       299       322       345         24       48       72       96       120       144       168       192       216       240       264       288       312       336       360         25       50       75       100       125       150       175       200       225       250       275       300       325       350       375         26       52       78       104       130       156       182       208       234       260       286       312       338       364       390         27       54       81       108       135       162       189       216       243       270       300       336 <td></td>															
22       44       66       88       110       132       154       176       198       220       242       264       286       308       330         23       46       69       92       115       138       161       184       207       230       253       276       299       322       345         24       48       72       96       120       144       168       192       216       240       264       288       312       336       360         25       50       75       100       125       150       175       200       225       250       275       300       325       350       375         26       52       78       104       130       156       182       208       234       260       286       312       338       364       390         27       54       81       108       135       162       189       216       243       270       297       324       351       378       405         28       56       84       112       140       168       196       224       252       280       308       336 <td></td>															
23       46       69       92       115       138       161       184       207       230       253       276       299       322       345         24       48       72       96       120       144       168       192       216       240       264       288       312       336       360         25       50       75       100       125       150       175       200       225       250       275       300       325       350       375         26       52       78       104       130       156       182       208       234       260       286       312       338       364       390         27       54       81       108       135       162       189       216       243       270       297       324       351       378       405         28       56       84       112       140       168       196       224       252       280       308       336       364       392       420         29       58       87       116       145       174       203       232       261       290       319       348 </td <td></td>															
24       48       72       96       120       144       168       192       216       240       264       288       312       336       360         25       50       75       100       125       150       175       200       225       250       275       300       325       350       375         26       52       78       104       130       156       182       208       234       260       286       312       338       364       390         27       54       81       108       135       162       189       216       243       270       297       324       351       378       405         28       56       84       112       140       168       196       224       252       280       308       336       364       392       420         29       58       87       116       145       174       203       232       261       290       319       348       377       406       435         30       60       90       120       150       180       210       240       270       300       330       360<															
25       50       75       100       125       150       175       200       225       250       275       300       325       350       375         26       52       78       104       130       156       182       208       234       260       286       312       338       364       390         27       54       81       108       135       162       189       216       243       270       297       324       351       378       405         28       56       84       112       140       168       196       224       252       280       308       336       364       392       420         29       58       87       116       145       174       203       232       261       290       319       348       377       406       435         30       60       90       120       150       180       210       240       270       300       330       360       390       420       450         31       62       93       124       155       186       217       248       279       310       341       372															
26       52       78       104       130       156       182       208       234       260       286       312       338       364       390         27       54       81       108       135       162       189       216       243       270       297       324       351       378       405         28       56       84       112       140       168       196       224       252       280       308       336       364       392       420         29       58       87       116       145       174       203       232       261       290       319       348       377       406       435         30       60       90       120       150       180       210       240       270       300       330       360       390       420       450         31       62       93       124       155       186       217       248       279       310       341       372       403       434       465         32       64       96       128       160       192       224       256       288       320       352       384															
27       54       81       108       135       162       189       216       243       270       297       324       351       378       405         28       56       84       112       140       168       196       224       252       280       308       336       364       392       420         29       58       87       116       145       174       203       232       261       290       319       348       377       406       435         30       60       90       120       150       180       210       240       270       300       330       360       390       420       450         31       62       93       124       155       186       217       248       279       310       341       372       403       434       465         32       64       96       128       160       192       224       256       288       320       352       384       416       448       480         33       66       99       132       165       198       231       264       297       330       363       396															
28       56       84       112       140       168       196       224       252       280       308       336       364       392       420         29       58       87       116       145       174       203       232       261       290       319       348       377       406       435         30       60       90       120       150       180       210       240       270       300       330       360       390       420       450         31       62       93       124       155       186       217       248       279       310       341       372       403       434       465         32       64       96       128       160       192       224       256       288       320       352       384       416       448       480         33       66       99       132       165       198       231       264       297       330       363       396       429       462       495         34       68       102       136       170       204       238       272       306       340       374       40															
29       58       87       116       145       174       203       232       261       290       319       348       377       406       435         30       60       90       120       150       180       210       240       270       300       330       360       390       420       450         31       62       93       124       155       186       217       248       279       310       341       372       403       434       465         32       64       96       128       160       192       224       256       288       320       352       384       416       448       480         33       66       99       132       165       198       231       264       297       330       363       396       429       462       495         34       68       102       136       170       204       238       272       306       340       374       408       442       476       510         35       70       105       140       175       210       245       280       315       350       385       4															
30       60       90       120       150       180       210       240       270       300       330       360       390       420       450         31       62       93       124       155       186       217       248       279       310       341       372       403       434       465         32       64       96       128       160       192       224       256       288       320       352       384       416       448       480         33       66       99       132       165       198       231       264       297       330       363       396       429       462       495         34       68       102       136       170       204       238       272       306       340       374       408       442       476       510         35       70       105       140       175       210       245       280       315       350       385       420       455       490       525         36       72       108       144       180       216       252       288       324       360       396															
31       62       93       124       155       186       217       248       279       310       341       372       403       434       465         32       64       96       128       160       192       224       256       288       320       352       384       416       448       480         33       66       99       132       165       198       231       264       297       330       363       396       429       462       495         34       68       102       136       170       204       238       272       306       340       374       408       442       476       510         35       70       105       140       175       210       245       280       315       350       385       420       455       490       525         36       72       108       144       180       216       252       288       324       360       396       432       468       504       540         37       74       111       148       185       222       259       296       333       370       407 <td< td=""><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></td<>															
32       64       96       128       160       192       224       256       288       320       352       384       416       448       480         33       66       99       132       165       198       231       264       297       330       363       396       429       462       495         34       68       102       136       170       204       238       272       306       340       374       408       442       476       510         35       70       105       140       175       210       245       280       315       350       385       420       455       490       525         36       72       108       144       180       216       252       288       324       360       396       432       468       504       540         37       74       111       148       185       222       259       296       333       370       407       444       481       518       555         38       76       114       152       190       228       266       304       342       380       418 <t< td=""><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></t<>															
33       66       99       132       165       198       231       264       297       330       363       396       429       462       495         34       68       102       136       170       204       238       272       306       340       374       408       442       476       510         35       70       105       140       175       210       245       280       315       350       385       420       455       490       525         36       72       108       144       180       216       252       288       324       360       396       432       468       504       540         37       74       111       148       185       222       259       296       333       370       407       444       481       518       555         38       76       114       152       190       228       266       304       342       380       418       456       494       532       570         39       78       117       156       195       234       273       312       351       390       429       <															
34       68       102       136       170       204       238       272       306       340       374       408       442       476       510         35       70       105       140       175       210       245       280       315       350       385       420       455       490       525         36       72       108       144       180       216       252       288       324       360       396       432       468       504       540         37       74       111       148       185       222       259       296       333       370       407       444       481       518       555         38       76       114       152       190       228       266       304       342       380       418       456       494       532       570         39       78       117       156       195       234       273       312       351       390       429       468       507       546       585         40       80       120       160       200       240       280       320       360       400       440															
35       70       105       140       175       210       245       280       315       350       385       420       455       490       525         36       72       108       144       180       216       252       288       324       360       396       432       468       504       540         37       74       111       148       185       222       259       296       333       370       407       444       481       518       555         38       76       114       152       190       228       266       304       342       380       418       456       494       532       570         39       78       117       156       195       234       273       312       351       390       429       468       507       546       585         40       80       120       160       200       240       280       320       360       400       440       480       520       560       600         41       82       123       164       205       246       287       328       369       410       451															
36       72       108       144       180       216       252       288       324       360       396       432       468       504       540         37       74       111       148       185       222       259       296       333       370       407       444       481       518       555         38       76       114       152       190       228       266       304       342       380       418       456       494       532       570         39       78       117       156       195       234       273       312       351       390       429       468       507       546       585         40       80       120       160       200       240       280       320       360       400       440       480       520       560       600         41       82       123       164       205       246       287       328       369       410       451       492       533       574       615         42       84       126       168       210       252       294       336       378       420       462															
37       74       111       148       185       222       259       296       333       370       407       444       481       518       555         38       76       114       152       190       228       266       304       342       380       418       456       494       532       570         39       78       117       156       195       234       273       312       351       390       429       468       507       546       585         40       80       120       160       200       240       280       320       360       400       440       480       520       560       600         41       82       123       164       205       246       287       328       369       410       451       492       533       574       615         42       84       126       168       210       252       294       336       378       420       462       504       546       588       630															
38       76       114       152       190       228       266       304       342       380       418       456       494       532       570         39       78       117       156       195       234       273       312       351       390       429       468       507       546       585         40       80       120       160       200       240       280       320       360       400       440       480       520       560       600         41       82       123       164       205       246       287       328       369       410       451       492       533       574       615         42       84       126       168       210       252       294       336       378       420       462       504       546       588       630															
39     78     117     156     195     234     273     312     351     390     429     468     507     546     585       40     80     120     160     200     240     280     320     360     400     440     480     520     560     600       41     82     123     164     205     246     287     328     369     410     451     492     533     574     615       42     84     126     168     210     252     294     336     378     420     462     504     546     588     630															
40       80       120       160       200       240       280       320       360       400       440       480       520       560       600         41       82       123       164       205       246       287       328       369       410       451       492       533       574       615         42       84       126       168       210       252       294       336       378       420       462       504       546       588       630															
41 82 123 164 205 246 287 328 369 410 451 492 533 574 615 42 84 126 168 210 252 294 336 378 420 462 504 546 588 630															
42 84 126 168 210 252 294 336 378 420 462 504 546 588 630															
44 88 132 176 220 264 308 352 396 440 484 528 572 616 660															
45 90 135 180 225 270 315 360 405 450 495 540 585 630 675															
46 92 138 184 230 276 322 368 414 460 506 552 598 644 690															
47 94 141 188 235 282 329 376 423 470 517 564 611 658 705															
48 96 144 192 240 288 336 384 432 480 528 576 624 672 720															
49 98 147 196 245 294 343 392 441 490 539 588 637 686 735															
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750															

## Zahlensysteme

#### Das Zehnersystem oder Dezimalsystem.

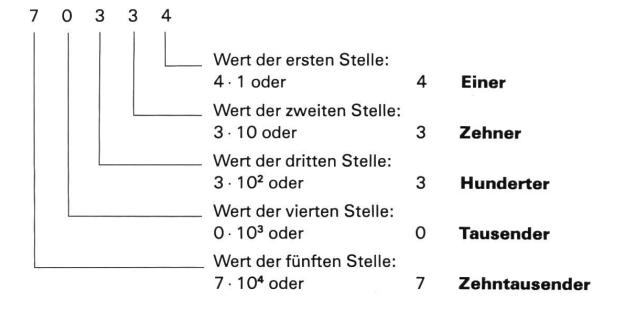
Wir schreiben jede noch so grosse natürliche Zahl mit den **zehn Ziffern** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Beispielsweise besteht die **Zahl** (genauer das **Zahlenzeichen**) 70334 aus den Ziffern 7, 0, 3, 4 und noch eine 3 zwischen 3 und 4.

Jede Ziffer hat einen **Eigenwert** und einen **Stellenwert**, der von der **Stelle** abhängt, an die die Ziffer innerhalb der Zahl gesetzt ist.

Ein solches Zahlensystem nennt man Stellenwertsystem.

Da 10 die Basis ist, spricht man auch vom Zehnersystem oder Dezimalsystem.



## Andere Zahlensysteme

- Im Zehnersystem fassen wir zehn Einheiten zu einem «Bündel» zusammen und schreiben dieses eine Bündel an der Zehnerstelle mit 10; zehn «Zehnerbündel» an der Hunderterstelle mit 100 usw.
- Im Zweiersystem (auch Dualsystem genannt) schreiben wir ein «Zweierbündel» (2) an der zweiten Stelle mit 10, zwei «Zweierbündel» = ein «Viererbündel» an der dritten Stelle mit 100, ein «Achterbündel» an der vierten Stelle mit 1000 usw.
- 3. **Beispiel:**  $43 = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1$  (Zehnersystem) **wird zerlegt** im **Zweiersystem** =  $1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$  und wird darin **geschrieben:** 1 0 1 0 1 1 1 101011 ②
- 4. Die Zahl ② nennt das System und heisst Basis. Im Zehnersystem wird sie nicht angeschrieben.

### 5. Unser Beispiel 43 in anderen Zahlensystemen geschrieben:

Basis	Zur Verfügung stehende Ziffern	43 =	Verschiedene Zahlzeichen für 43
3	0,1,2	1.27+1.9+2.3+1.1	1121 ③
4	0,1,2,3	2 · 16 + 2 · 4 + 3 · 1	223 4
5	0,1,2,3,4	$1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1$	133 <b>⑤</b>
6	0,1,2,3,4,5	$1 \cdot 36 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1$	111 ®
7	0,1,2,3,4,5,6	6 · 7 + 1 · 1	61 ⑦
8	0,1,2,3,4,5,6,7	5.8+3.1	<b>53</b> ®
9	0,1,2,3,4,5,6,7,8	4.9+7.1	47 ⑨
11	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,z	$3 \cdot 11 + 10 \cdot 1 = 3 \cdot 11 + z \cdot 1$	3z 🕦
12	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,z,e	3 · 12 + 7 · 1	37 ⑫

# Vorsatzbezeichnungen für die mit dem Faktor 10 gebildete Vielfache und Teile von Einheiten

St.			
Vorsilbe	Kurzzeichen	Zehnerpotenzschreibweise	in Worten
Deka-	da	10¹	Zehn
Hekto-	h	10²	Hundert
Kilo-	k	10³	Tausend
Mega-	М	10 <sup>6</sup>	Million
Giga-	G	10 <sup>9</sup>	Milliarde
Tera-	Т	1012	Billion
Peta-	Р	1015	Billiarde
Exa-	Е	10 <sup>18</sup>	Trillion
Dezi-	d	10-1	Zehntel
Zenti-	С	10-²	Hundertstel
Milli-	m	10-3	Tausendstel
Mikro-	р	10- <sup>6</sup>	Millionstel
Nano-	n	10- <sup>9</sup>	Milliardstel
Piko-	р	10-12	Billionstel
Femto-	f	10-15	Billiardstel
Atto-	а	10-18	Trillionstel

### **Primzahlen**

Natürliche Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 usw. Primzahlen sind natürliche Zahlen grösser als 1, die **nur durch 1 und sich selbst teilbar** sind. Die 2 macht als einzige gerade Zahl den Anfang. Dann folgen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw. Die weiteren Primzahlen bis 1000 kann man aus der folgenden Tafel ablesen.

Seit dem Altertum kennt man ein Verfahren, Primzahlen ohne Rechnerei zu bestimmen, das sogenannte **«Sieb des Erathostenes».** 

Will man zum Beispiel die Primzahlen von 1 bis 30 bestimmen, so streicht man **zuerst** einmal von der Primzahl 2 ausgehend jede zweite Zahl (die 2 natürlich nicht!) /

**Dann** wird, von der Primzahl 3 ausgehend, jede dritte Zahl gestrichen (die 3 nicht!) //

**Schliesslich** wird, von der Primzahl 5 ausgehend, jede fünfte Zahl gestrichen (die 5 natürlich nicht!) ///

Mit jeder folgenden Primzahl kann nun das Verfahren fortgesetzt werden.

## Primzahlen zwischen 1 und 1000

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind. Die einzige gerade Primzahl ist 2.

2	47 53	109 113	191 193	269 271	353 359	439 443	523 541	617 619	709 719	811 821	907 911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887	997

# Verwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalzahlen

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{\bullet}{3} \quad \frac{1}{3} = 0.333$$

$$\frac{2}{3} = 0.667$$

$$\frac{\bullet}{4}$$
  $\frac{1}{4} = 0.25$ 

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

$$\frac{\bullet}{5}$$
  $\frac{1}{5} = 0.2$ 

$$\frac{2}{5} = 0.4$$

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

$$\frac{\bullet}{6}$$
  $\frac{1}{6} = 0.167$ 

$$\frac{5}{6} = 0.833$$

$$\frac{\bullet}{7}$$
  $\frac{1}{7} = 0.143$ 

$$\frac{2}{7} = 0.286$$

$$\frac{3}{7} = 0,429$$

$$\frac{4}{7} = 0.571$$

$$\frac{5}{7} = 0.714$$

$$\frac{6}{7} = 0.857$$

$$\frac{\bullet}{8}$$
  $\frac{1}{8}$  =

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

$$\frac{\bullet}{8}$$
  $\frac{1}{8} = 0.125$   $\frac{\bullet}{11}$   $\frac{1}{11} = 0.091$ 

$$\frac{3}{8} = 0.375$$
  $\frac{2}{11} = 0.182$ 

$$\frac{5}{8} = 0.625$$
  $\frac{3}{11} = 0.273$ 

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

 $\frac{5}{9} = 0.556$ 

 $\frac{7}{9} = 0.778$ 

 $\frac{8}{9} = 0.889$ 

$$\frac{7}{8} = 0.875$$
  $\frac{4}{11} = 0.364$ 

$$\frac{\bullet}{9}$$
  $\frac{1}{9} = 0.111$   $\frac{5}{11} = 0.455$ 

$$\frac{2}{9} = 0,222$$
  $\frac{6}{11} = 0,545$ 

$$\frac{4}{9} = 0.444$$
  $\frac{7}{11} = 0.636$ 

$$\frac{8}{11}$$
 = 0,727

$$\frac{9}{11}$$
 = 0,818

$$\frac{10}{11}$$
 = 0,909

$$\frac{\bullet}{10} \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

$$\frac{7}{10}$$
 = 0,7

$$\frac{9}{10} = 0.9$$

$$\frac{\bullet}{12} \frac{1}{12} = 0,083$$

$$\frac{5}{12}$$
 = 0,417

$$\frac{7}{12}$$
 = 0,583

$$\frac{11}{12}$$
 = 0,917

$$\frac{\bullet}{13}$$
  $\frac{1}{13}$  = 0,077

$$\frac{2}{13}$$
 = 0,154

$$\frac{3}{13}$$
 = 0,231

$$\frac{4}{13}$$
 = 0,308

$$\frac{5}{13}$$
 = 0,385

$$\frac{6}{13}$$
 = 0,462

$$\frac{7}{13}$$
 = 0,538

$$\frac{8}{13}$$
 = 0,615

$$\frac{9}{13}$$
 = 0,692

$$\frac{10}{13}$$
 = 0,769

$$\frac{11}{13}$$
 = 0,846

$$\frac{12}{13}$$
 = 0,923

$$\frac{\bullet}{14}$$
  $\frac{1}{14}$  = 0,071

$$\frac{3}{14}$$
 = 0,214

$$\frac{5}{14}$$
 = 0,357

$$\frac{9}{14}$$
 = 0,643

$$\frac{11}{14} = 0.786$$

$$\frac{13}{14}$$
 = 0,929

$$\frac{\bullet}{15} \frac{1}{15} = 0.067 \quad \frac{\bullet}{16} \frac{1}{16} = 0.063$$

$$\frac{2}{15} = 0.133 \quad \frac{3}{16} = 0.188$$

$$\frac{4}{15} = 0.276 \quad \frac{5}{16} = 0.313$$

$$\frac{7}{15} = 0.467 \quad \frac{7}{16} = 0.438$$

$$\frac{8}{15} = 0.533 \quad \frac{9}{16} = 0.563$$

$$\frac{11}{15} = 0.733 \quad \frac{11}{16} = 0.688$$

$$\frac{13}{15} = 0.867 \quad \frac{13}{16} = 0.813$$

$$\frac{14}{15} = 0.933 \quad \frac{15}{16} = 0.938$$

$$\frac{1}{17} = 0.058823$$

$$\frac{1}{19} = 0.055555$$

$$\frac{1}{19} = 0.052631$$

$$\frac{1}{20} = 0.05$$

$$\frac{1}{21} = 0.047619$$

$$\frac{1}{22} = 0.045454$$

$$\frac{1}{23} = 0.043478$$

$$\frac{1}{24} = 0.041666$$

Bei den unendlichen Dezimalbrüchen  $\frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{7} \frac{1}{9} \frac{1}{11} \frac{1}{13} \frac{1}{14} \frac{1}{15} \frac{1}{16}$  ist die dritte Stelle auf- oder abgerundet, bei den übrigen unendlichen die sechste Stelle.

Brüche zwischen  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{15}{16}$ , welche nicht in der Tabelle stehen, können gekürzt werden. Für Vielfache der Brüche von  $\frac{1}{17}$  bis  $\frac{1}{24}$  multipliziert man den Dezimal-

bruch von  $\frac{1}{17}$  ... mit dem entspre-

 $\frac{1}{25}$  = 0,04

## Teilbarkeitsregeln

#### Eine Zahl ist teilbar

- durch 2, wenn die Endziffer durch 2 teilbar oder eine Null ist, z. B. 24992 oder 990 oder 78
- durch 3, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist Beispiel: 5139 ist durch 3 teilbar, denn  $\underbrace{5+1+3+9}_{\text{Quersumme}} = 18; 18 \text{ ist durch 3 teilbar}$
- durch 4, wenn die beiden letzten Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden, z. B. 917**20**, 1**64**, 10**08**
- durch 5, wenn die Endziffer eine 0 oder eine 5 ist
- durch 6, alle geraden Zahlen, die durch 3 teilbar sind
- durch 7, keine Regel!
- durch 8, wenn die drei letzten Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden, z. B. 163**720**, 1**128**, **992**
- durch 9, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist
- durch 10, wenn die letzte Ziffer eine 0 ist

## Grösster gemeinsamer Teiler (g.g.T.)

Man bestimmt den grössten gemeinsamen Teiler zweier (oder mehrerer) Zahlen, indem man sie

## in ihre Primfaktoren zerlegt:

und hernach
 das **Produkt** der in den
 Zerlegungen **gemeinsam** auftretenden **Faktoren** bildet:

$$g.g.T. = 3 \cdot 7 = 21$$

# Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches (k.g.V.)

Man berechnet das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier (oder mehrerer) Zahlen, indem man sie

- in ihre Primfaktoren zerlegt:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$42 = 2 \cdot \cdot 3 \cdot 7$$

Fortsetzung nächste Seite

 hernach jeden Faktor so oft nimmt, wie er höchstens in einer Zahlengruppe vorkommt, und dann multipliziert.

k.g.V. = 
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168$$

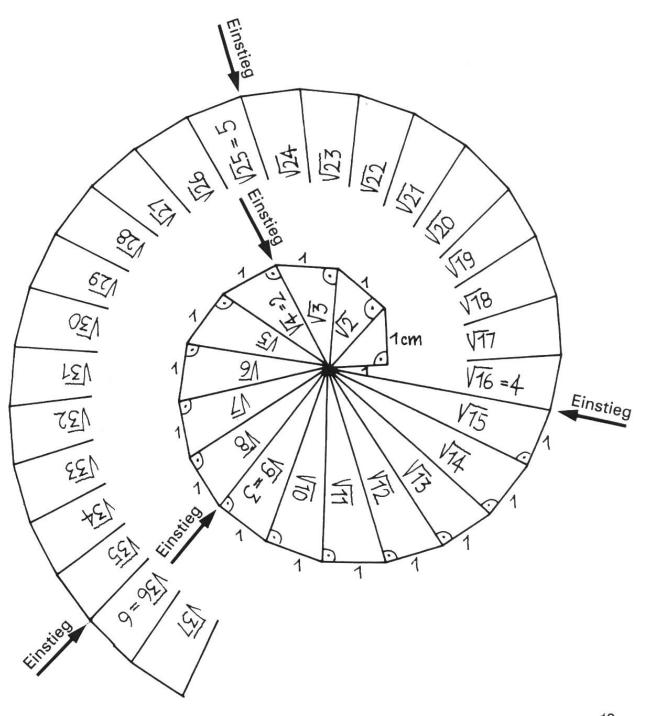
# Quadratwurzeln von 1 bis 100

z	$\sqrt{z}$	z	$\sqrt{z}$	z	$\sqrt{z}$	z	$\sqrt{z}$
0	0,00000	25	5,00000	50	7,07107	75	8,66025
1	1,00000	26	5,09902	51	7,14143	76	8,71780
2	1,41421	27	5,19615	52	7,21110	77	8,77496
3	1,73205	28	5,29150	53	7,2801 <u>1</u>	78	8,83176
4	2,00000	29	5,38516	54	7,3484 <u>7</u>	79	8,88819
5	2,2360 <u>7</u>	30	5,4772 <u>3</u>	55	7,41620	80	8,94427
6	2,4494 <u>9</u>	31	5,56776	56	7,48331	81	9,00000
7	2,64575	32	5,65685	57	7,54983	82	9,0553 <u>9</u>
8	2,8284 <u>3</u>	33	5,74456	58	7,61577	83	9,11043
9	3,00000	34	5,83095	59	7,6811 <u>5</u>	84	9,16515
10	3,1622 <u>8</u>	35	5,9160 <u>8</u>	60	7,7459 <u>7</u>	85	9,21954
11	3,31662	36	6,00000	61	7,8102 <u>5</u>	86	9,2736 <u>2</u>
12	3,46410	37	6,08276	62	7,8740 <u>1</u>	87	9,3273 <u>8</u>
13	3,60555	38	6,16441	63	7,93725	88	9,38083
14	3,7416 <u>6</u>	39	6,2450 <u>0</u>	64	8,00000	89	9,43398
15	3,87298	40	6,3245 <u>6</u>	65	8,0622 <u>6</u>	90	9,48683
16	4,00000	41	6,40312	66	8,1240 <u>4</u>	91	9,53939
17	4,1231 <u>1</u>	42	6,48074	67	8,18535	92	9,59166
18	4,24264	43	6,5574 <u>4</u>	68	8,24621	93	9,64365
19	4,3589 <u>0</u>	44	6,6332 <u>5</u>	69	8,30662	94	9,6953 <u>6</u>
20	4,4721 <u>4</u>	45	6,70820	70	8,36660	95	9,74679
21	4,5825 <u>8</u>	46	6,7823 <u>3</u>	71	8,4261 <u>5</u>	96	9,7979 <u>6</u>
22	4,6904 <u>2</u>	47	6,85565	72	8,48528	97	9,8488 <u>6</u>
23	4,79583	48	6,92820	73	8,54400	98	9,89949
24	4,8989 <u>8</u>	49	7,00000	74	8,6023 <u>3</u>	99	9,94987
						100	10,0000

Die unterstrichenen Endziffern sind aufgerundet

# Wir «zeichnen» Wurzeln:

Der Satz von Pythagoras erlaubt uns, eine gegebene Strecke mit einer beliebigen Wurzel vervielfacht zu zeichnen:

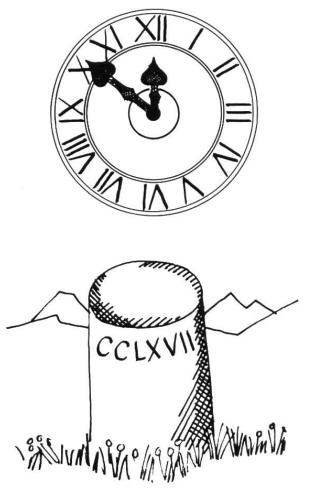


# Kubikzahlen und Kubikwurzeln

z	z³	$\sqrt[3]{z}$	z ·	z³	$\sqrt[3]{z}$
1	1	1,0	26	17 576	2,936
2	8	1,26	27	19 683	3,0
3	27	1,442	28	21 952	3,037
4	64	1,587	29	24 389	3,072
5	125	1,71	30	27 000	3,107
6	216	1,817	31	29 791	3,141
7	343	1,913	32	32 768	3,175
8	512	2,0	33	35 937	3,208
9	729	2,08	34	39 304	3,24
10	1 000	2,154	35	42 875	3,271
11	1 331	2,224	36	46 656	3,302
12	1 728	2,289	37	50 653	3,332
13	2 197	2,351	38	54 872	3,362
14	2 744	2,41	39	59 319	3,391
15	3 375	2,466	40	64 000	3,42
16	4 096	2,52	41	68 921	3,448
17	4 9 1 3	2,57	42	74 088	3,476
18	5 832	2,621	43	79 507	3,503
19	6 859	2,668	44	85 184	3,53
20	8 000	2,714	45	91 125	3,557
21	9 2 6 1	2,759	46	97 336	3,583
22	10 648	2,802	47	103 823	3,609
23	12 167	2,844	48	110 592	3,634
24	13 824	2,885	49	117 649	3,659
25	15 625	2,924	50	125 000	3,684

## Römische Zahlen

Die römischen Zahlzeichen wurden bis zum 12. Jahrhundert in Mitteleuropa allgemein gebraucht und dann allmählich von den «arabischen» Ziffern und dem Zehnersystem abgelöst. Sie werden heute noch etwa zur Numerierung oder bei Inschriften zur Bezeichnung der Jahreszahl verwendet. Der Wert eines römischen Zahlzeichens ist unabhängig von der Stelle, an der es innerhalb einer Zahl geschrieben ist. Dennoch hat die Reihenfolge der Zeichen ihre Bedeutung, wie die folgenden Regeln zeigen.



Römische Zahlen

1	5	10	50	100	500	1000
Ziffern	:					
1	V	X	L	С	D	M
Zahlen	:					
2:11	6: VI	11: XI	51: LI	200: CC	600: DC	2000: MM
3:111	7: VII	12: XII	60: LX	300: CCC	700: DCC	3000: MMM
	8: VIII	13: XIII	70: LXX		800: DCCC	
4: IV	9: IX	14: XIV	80: LXXX	400: CD	900: CM	

## Regeln:

1. Man schreibt in der Reihenfolge Tausender-Hunderter-Zehner-Einer.

90: XC

99: XCIX

- 2. I, X, C kommen höchstens dreimal hintereinander vor.
- 3. Die Zahlen rechts neben einer gegebenen Zahl werden addiert, falls sie nicht grösser sind als die gegebene.
- 4. Die Zahlen links einer gegebenen Zahl werden subtrahiert, falls sie kleiner sind als die gegebene: es darf jedoch nur stehen:

I vor V und X (und erlaubt ist auch IL=49)

15: XV

16: XVI

19: XIX 20: XX 40: XL 49: XLIX

X vor L und C

C vor D und M

# Prozentrechnungen

A. «Prozent» (%) sagt aus, wie viele *Hundertstel* einer Menge *ein Bruchteil* dieser Menge ausmacht.

- **z. B.** 12 Fr. sind 1/100 von 1200 Fr., also 1% 84 Fr. sind 7/100 von 1200 Fr., also 7%
- B. In einer Prozentrechnung kommen drei Grössen vor:

	z. B .
1. der Grundwert (Ganzes, Vollbetrag, 100%)	400 kg
2. der Prozentbetrag	12 kg
3. der Prozentfuss (wieviele Prozent)	3%

1. Aufgabe: Berechnung des Prozentbetrages Wieviel sind 4,5% von Fr. 1200.-?

$$\frac{\text{Grundwert} \cdot \text{Prozentfuss}}{100} = \frac{1200 \cdot 4.5}{100} = \text{Fr. 54.} -$$

2. Aufgabe: Berechnung des Grundwertes 8% Rabatt sind Fr. 5.60. Welches ist der Rechnungsbetrag (Grundwert)?

$$\frac{\text{Prozentbetrag} \cdot 100}{\text{Prozentfuss}} = \frac{5.60 \cdot 100}{8} = \text{Fr. 70.}-$$

3. Aufgabe: Berechnung des Prozentfusses Von 480 Schüssen waren 458 Treffer. Wieviele % sind das?

$$\frac{\text{Prozentbetrag}}{^{1}\text{/}_{100} \text{ des Grundwertes}} = \frac{458}{4,8} = 95\% \text{ Treffer}$$

# Zinsrechnungen

A. Wir berechnen entweder den Zins für ein ganzes Jahr (Jahreszinsrechnung) oder für einige Tage oder Monate (Marchzinsrechnung).

B. Jahreszinsrechnung

Es kommen drei Grössen vor wie in der Prozentrechnung:

- 1. Das Kapital = der Grundwert
- 2. Der Jahreszins = der Prozentbetrag
- 3. Der Zinsfuss = der Prozentfuss

Entsprechend sind die Berechnungen:

1. Aufgabe: Berechnung des Jahreszinses
Wie gross ist der Jahreszins zu 3½% von Fr. 300.-?

$$\frac{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuss}}{100} = \frac{300 \cdot 3.5}{100} = \text{Fr. } 10.50$$

2. Aufgabe: Berechnung des Kapitals
Der Jahreszins zu 5% beträgt Fr. 22.-. Wie gross ist das Kapital?

$$\frac{\text{Jahreszins} \cdot 100}{\text{Zinsfuss}} = \frac{22 \cdot 100}{5} = \text{Fr. 440.} -$$

3. Aufgabe: Berechnung des Zinsfusses Ein Kapital beträgt Fr. 900.-. Der Jahreszins ist Fr. 36.-. Wie gross ist der Zinsfuss?

$$\frac{\text{Jahreszins}}{\frac{1}{100 \text{ des Kapitals}}} = \frac{36}{9} = 4\%$$

C. Marchzinsrechnung

Zusätzlich muss die Zeitdauer berücksichtigt werden. Bei uns gilt: Jeder Monat hat 30 Tage, das Jahr hat 360 Tage. Der 30. oder 31. des Monats (der 28. oder 29. Februar) ist der letzte Tag. Von da ab werden keine Tage mehr gezählt. Vorher wird *immer* auf 30 ergänzt. (27. März: noch 3 Tage!)

1. Aufgabe: Berechnung des Marchzinses Welchen Zins bringen Fr. 1500.- zu 3½% in 132 Tagen?

$$\frac{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuss} \cdot \text{Tage}}{100 \cdot 360} = \frac{1500 \cdot 3.5 \cdot 132}{100 \cdot 360} = \text{Fr. } 19.25$$

2. Aufgabe: Berechnung des Kapitals
Welches Kapital bringt zu 4½% in 132 Tagen Fr. 40.- Marchzins?

$$\frac{\text{Marchzins} \cdot 360 \cdot 100}{\text{Anzahl Tage} \cdot \text{Zinsfuss}} = \frac{40 \cdot 360 \cdot 100}{132 \cdot 4,5} = \text{Fr. 2424.24}$$

3. Aufgabe: Berechnung des Zinsfusses Zu welchem Zinsfuss bringt ein Kapital von Fr. 2400.— in 216 Tagen Fr. 46.80 Zins?

$$\frac{\text{Marchzins} \cdot 360}{\text{Anzahl Tage } ^{1/100} \text{ des Kapitals}} = \frac{46.80 \cdot 360}{216 \cdot 24} = 3,25\%$$

4. Aufgabe: Berechnung der Zeit
Wie viele Tage muss ein Kapital von Fr. 4800.— zu 3% angelegt

werden, damit es Fr. 120.- Marchzins bringt?

Marchzins 120

$$\frac{\text{Marchzins}}{\text{Tageszins}} = \frac{\frac{\text{Marchzins}}{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuss}}}{100 \cdot 360} = \frac{120}{\frac{4800 \cdot 3}{100 \cdot 360}} = 300 \text{ Tage}$$

## Zinseszinsrechnung

Man spricht von Zinseszins, wenn der Zins eines angelegten Kapitals am Ende eines Jahres nicht abgehoben, sondern zum Kapital zugeschlagen und mit diesem (wie eine neue Einlage zu Jahresbeginn) weiter verzinst wird.

Anwachsen eines Kapitals von 100 Franken durch Zinseszins

Abgelaufene Jahre	Zinsfuss 2%	3%	4%	5%	6%
1	102.—	103.—	104.—	105.—	106.—
2	104.04	106.09	108.16	110.25	112.36
3	106.12	109.27	112.49	115.76	119.10
4	108.24	112.55	116.99	121.55	126.25
5	110.41	115.93	121.66	127.63	133.82
6	112.62	119.40	126.53	134.01	141.85
7	114.87	122.99	131.59	140.71	150.36
8	117.17	126.68	136.86	147.75	159.38
9	119.51	130.48	142.33	155.13	168.95
10	121.90	134.39	148.02	162.89	179.08
50	269.16	438.39	710.67	1146.74	1842.02
100	724.46	1921.86	5050.52	13150.13	33930.38

#### Berechnung

P (%) = Zinsfuss 1 +  $\frac{P}{100}$  = Zinsfaktor q Bezeichnungen:

Ko = Anfangskapital

Kn = Endkapital, auf das Ko nach n Jahren

Formel:

Beispiel:

angewachsen ist.  $Kn = Ko (1 + \frac{P}{100})^n = Ko \cdot q^n$   $Ko = Fr. 100. - n = 3 \text{ Jahre} \quad p = 5\%$   $Kn = 100 (1 + \frac{5}{100})^3 = 100 \cdot 1,05^3 = Fr. 115.76$ 

## Abzahlung von Schulden

Max möchte seinen Vater überreden, ihm zur Anschaffung eines Mopeds einen Kredit zu gewähren. Der Jüngling hat die Inserate der Kleinbanken studiert und dazu für sich folgende Rechnung gemacht:

Kreditsumme Fr. 1000.-/ Abzahlung in 12 Monatsraten zu Fr. 90.20

Gesamte Rückzahlung : 12 · Fr. 90.20 = Gewährter Kredit	Fr. 1082.40 Fr. 1000.—
Zins	Fr. 82.40

Fr. 82.40 sind 8,24% von Fr. 1000.—, das ist doch ganz anständig, denkt Max ... denkt er falsch! In Wirklichkeit verlangt die Bank 15,21%. Warum? Die Überlegung wäre richtig, wenn Max die ganze Schuld am Ende, also nach 12 Monaten, zurückzahlen würde. Dann hätte er für Fr. 1000.— Kredit nach einem Jahr Fr. 82.40 Zins bezahlt, also 8,24%. Er bezahlt aber jeden Monat einen Teil seiner Schuld zurück, und damit verzinst er im Durchschnitt nur etwa das halbe Darlehen — das, was er an Zins bezahlt, macht davon entsprechend mehr Prozente aus.

Der Vater berechnet mit dem Jüngling die Schuldentilgung unter Annahme eines Zinses von 10% und einer monatlichen Abzahlung eines Zwölftels der Schuld. Zum Glück haben sie einen elektronischen Taschenrechner zur Hand.

# Teilzahlungen

Schuldentilgung pro Monat:  $\frac{1}{12}$  von Fr. 1000.— = Fr. 83.33

Monate	Das Kapital beträgt	zu verzinsen ist	der Zins beträgt für 1 Monat
0	1000.—		
1	916.67	1000.—	8.33
2	833.34	916.67	7.64
3	750.—	833.34	6.94
4	666.67	750.—	6.25
5	583.34	666.67	5.56
6	500.—	583.34	4.86
7	416.67	500.—	4.17
8	333.34	416.67	3.47
9	250.—	333.34	2.78
10	166.67	250.—	2.08
11	83.34	166.67	1.39
12	0.—	83.34	69
		Gesamtzins:	54.16

Wenn Max seine Zinsschuld regelmässig auf die 12 Monate verteilen darf, so hat er jeden Monat Fr. 87.85 abzubezahlen.

# Betriebskosten eines Motorfahrzeugs

Spätestens wenn die Eltern nicht mehr alles bezahlen, merken wir, dass der Betrieb eines Motorfahrzeugs viel mehr kostet als nur gerade die immer wieder am Taschengeld zehrenden Ausgaben für Benzin und Öl. So etwa könnte die Rechnung für ein Auto aussehen:

Verkehrssteuer	Fr. 300
Versicherungen	Fr. 650
Benzin und Öl	Fr. 2200
Pneus	Fr. 280
Service	Fr. 650
Reparaturen	Fr. 950
Verschiedenes	Fr. 250
Kapitalzins*	Fr. 480
Abschreibung**	Fr. 3500.—
	Fr. 9260

Bei 20000 km **im Jahr pro km:** Fr. 9260:20000 = 46,3 Rappen

Zwei Posten werden gerne vergessen:

\* Kapitalzins: Hätte ich das Motorfahrzeug nicht gekauft, so könnte ich den entsprechenden Betrag zinstragend anlegen. Fr. 12 000.— würden z.B. zu 4% den Betrag im Beispiel oben (Fr. 480.—) Jahreszins abwerfen.

- \*\* Abschreibung: Das Fahrzeug verliert alljährlich an Wert. Bis zum Zeitpunkt, da es für mich unbrauchbar wird, sollte ich den ausgelegten Betrag wieder gespart (oder im schlimmeren Fall) den erhaltenen Kredit abbezahlt haben. Das ist die «Abschreibung». Ihre Höhe kann verschieden berechnet werden. Eine Möglichkeit für junge Leute ist folgende:
- Überlege, wie lange du das Fahrzeug vermutlich gebrauchen kannst.
- Überlege, wieviel das Fahrzeug nach dem jahrelangen Gebrauch bei einem Wiederverkauf noch einbringen wird.
- Zähle vom Kaufpreis den vermutlichen Wiederverkaufswert ab. Teile den Rest durch die Anzahl Jahre, die das Fahrzeug dir dienen soll; das gibt die jährliche Amortisation oder Abschreibung. In unserem Beispiel habe ich gerechnet: Anschaffung Fr. 12 000.-, Wiederverkauf nach zwei Jahren zu Fr. 5000.-, Minderwert Fr. 7000.-, pro Jahr Fr. 3500.- Abschreibung.

Selbstverständlich können diese Zahlen auch viel günstiger ausfallen; Glück und Missgeschick, Sorgfalt und Leichtsinn werden dabei kräftig mitspielen.

Meine eigene	Rechnung:		

# Algebra - Formeln

## 1. Umformungen

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
  $a^2+b^2$  (nicht zerlegbar)  
 $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$   $a^2-b^2 = (a-b)$  (a+b)  
 $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$   
 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$   $a^3+b^3 = (a+b)$  (a<sup>2</sup>-ab+b<sup>2</sup>)  
 $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$   $a^3-b^3 = (a-b)$  (a<sup>2</sup>+ab+b<sup>2</sup>)

#### 2. Brüche

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b \cdot c} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

## 3. Potenzen und Wurzeln (Radikand nicht negativ)

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$$

$$a^{m} : a^{n} = a^{m-n}$$

$$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$$

$$a^{n} : b^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$$

$$a^{n} : b^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$$

$$a^{n} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a^{n} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a^{n} = \sqrt{\frac{a}{a}}$$

#### 4. Quadratische Gleichungen

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^{2} - ac}}{a}$$

$$= \frac{-p \pm \sqrt{p^{2} - 4q}}{2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^{2} - q}$$
Software Viota to the large  $\frac{b}{a}$ 

Satz von Vieta:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$   $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q$ 

# Begriffe und Zeichen aus der Mengenlehre

Begriff	Zeichen	Beispiel	Erklärungen, Beschreibungen, Regeln, Definitionen
Menge	{ }	{1,3,6,9}	Der Begriff der Menge wurde vom Begründer der Mengenlehre¹ wie folgt definiert: «Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens² zu einem Ganzen. Diese Objekte heissen die Elemente der Menge.» Wir lesen unser Beispiel: «Menge mit den Elementen 1, 3, 6, 9.» Die «Mengenklammern» {} heissen auch Akkoladen.
Element (aus) einer Menge  Nicht Element einer Menge	€	3 ∈ { 1,3,6,9 } 4 ∉ { 1,3,6,9 }	3 ist ein Element aus der Menge mit den Elementen 1, 3, 6, 9. Wir lesen: «drei ist Ele- ment der Menge (mit den Elementen) { 1, 3, 6, 9}» Wir lesen: «vier ist nicht Element der Menge { 1, 3, 6, 9}»
Teilmenge	C	{1,6}⊂{1,3,6,9}	Greift man aus einer Menge (oder Grundmenge, oder Obermenge) eine An- zahl von Elementen heraus, so bilden diese eine Teil- menge oder Untermenge. Wir lesen: «{ 1,6 } ist Teil-

Obermenge	n	{1,3,6,9}⊃{1,6}	menge der Grundmenge / Obermenge / Menge { 1,3,6,9 }» Wir lesen: «{ 1,3,6,9 } ist Obermenge der Teilmenge { 1,6 }»
Gleichheit	= ≠	$\{1,7,8\} = \{8,1,7\}$ $\{1,7,8\} \neq \{1,6,8\}$	Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Diese Mengen sind ungleich.
Äquivalenz	~ 3	$\{1,3,5\} \sim \{2,4,6\}$	Zwei Mengen heissen gleichmächtig oder äquivalent, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen haben. Lies: «äquivalent mit».
Vereinigungs- menge	U		Die Vereinigungsmenge ist die Gesamtheit der Elemente zweier Mengen; doppelt oder mehrfach auftretende Elemente werden nur einmal angegeben. Lies: U: «vereinigt mit».
Schnittmenge	Π	$\{1,3,6\} \cap \{1,3,8,9\}$ = $\{1,3,\}$	Die Schnittmenge (auch Durchschnitt genannt) zweier Mengen ist die Menge aller Elemente, die in jeder der beiden Mengen enthalten sind. Lies:
Leere Menge	{} auch∅	$\{1,3,6\} \cap \{2,8,9\}$ = $\{\}$	Die leere Menge (auch Leermenge oder Null- menge genannt) ist eine Menge, die keine Elemente hat. Lies: { }: «leere Menge».

Für (bekannte) Mengen
werden häufig Grossbuch-
staben mit Doppelstrich
links gesetzt.
${\Bbb G}_{}$ ist die Grundmenge
${\mathbb N}$ ist die Menge der
natürlichen Zahlen
$= \{ 1, 2, 3, 4, 5, \}$
$N_{\!\scriptscriptstyle o}$ ist die Menge der
natürlichen Zahlen samt
$0 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \}$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Georg Cantor (1845–1918).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Das können z. B. Zahlen, Buchstaben, Gegenstände, Wörter usw. sein.

 $<sup>^{3}</sup>$  Das Zeichen  $\sim$  wird in der Geometrie in der Bedeutung «... ist ähnlich zu ...» verwendet.

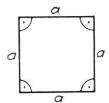
## Geometrie

## 1. Einfache ebene Figuren

1 1	mfang	
U	mianc	1
_		3

Flächeninhalt

Andere Zusammenhänge



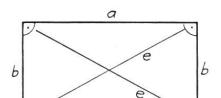


#### Das Quadrat

$$u = 4 \cdot a$$

$$F = a \cdot a = a^2$$
 Diagonale  $e = a\sqrt[3]{2}$ 

$$F = \frac{e^2}{2}$$

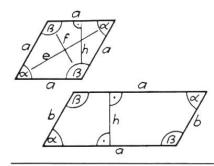


#### Das Rechteck

$$u = 2(a+b)$$
  $F = a \cdot b$ 

$$F = a \cdot b$$

Diagonale e = 
$$1/\overline{a^2+b^2}$$



#### Der Rhombus, die Raute

$$u = 4 \cdot a$$

$$F = a \cdot h$$

$$F = \frac{e \cdot f}{2}$$

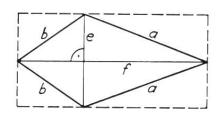
$$\alpha + \beta = 180^{\circ}$$

## Das Rhomboid, das Parallelogramm

$$u = 2(a+b)$$

$$F = a \cdot h$$

$$\alpha + \beta = 180^{\circ}$$

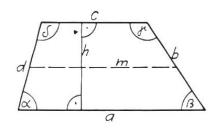


#### Das Deltoid, das Drachenviereck

$$u = 2(a+b)$$

$$F = \frac{e}{2}$$

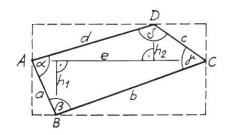
Winkelsumme = 360°



#### Das Trapez

$$u = a+b+c+d$$
  $F = m \cdot h$   $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^{\circ}$  
$$F = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

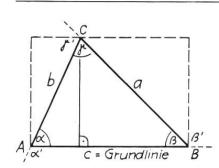
m = Mittelparallele



#### Das Trapezoid (unregelmässiges Viereck)

$$u = a + b + c + d \quad F = e \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) \, \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^{\circ}$$

#### 2. Das Dreieck



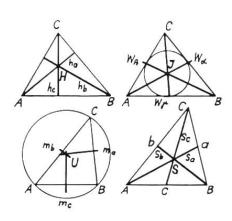
Umfang u = a+b+c Flächeninhalt F = 
$$\frac{g \cdot h}{2}$$

Wenn u mit 2s bezeichnet wird, so gilt auch

$$F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Andere Zusammenhänge

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$$
  $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^{\circ}$   
 $\alpha' = \beta + \gamma$   $\beta' = \alpha + \gamma$   $\gamma' = \alpha + \beta$ 



#### Besondere Punkte im Dreieck

Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.

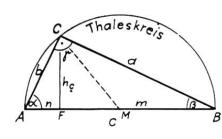
Die drei Winkelhalbierenden  $w_{\alpha}$ ,  $w_{\beta}$ ,  $w_{\gamma}$  schneiden sich in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt J. Die drei Mittelsenkrechten der Seiten  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$ 

Die drei Mittelsenkrechten der Seiten  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt U.

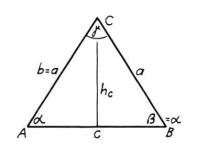
Die drei Seitenhalbierenden (Schwerlinien, Mittellinien)  $s_a$ ,  $s_b$ ,  $s_c$  schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S.

Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien im Verhältnis 1:2.

#### **Besondere Dreiecke**

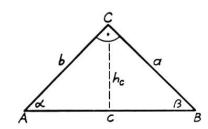


Das rechtwinklige Dreieck 
a, b = Katheten, c = Hypotenuse,  $\gamma = 90^{\circ}$ ,  $\alpha + \beta = 90^{\circ}$   $u = a + b + c \qquad F = \frac{a \cdot b}{2} \qquad F = \frac{c \cdot h_c}{2}$   $a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{Satz des Pythagoras}$   $c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$   $h^2 = m \cdot n \qquad \text{H\"{o}hensatz (des Euklid)}$   $a^2 = m \cdot c \qquad \text{Kathetens\"{atze (des Euklid)}} \qquad r = \frac{c}{2}$ 



Das gleichschenklige Dreieck

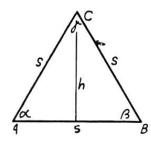
$$u = 2a + c$$
$$F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$



Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck

$$\alpha = \beta = 45^{\circ} \quad a = b = \frac{c}{\sqrt{2}} \quad c = a\sqrt{2} \quad h_c = \frac{c}{2}$$

$$u = 2a + c \quad F = \frac{c \cdot h_c}{2} \quad F = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \quad F = \frac{c^2}{4}$$



Das gleichseitige Dreieck

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma = 60^{\circ} \\ a &= b = c = s \\ h &= \frac{s}{2} \sqrt{3} \qquad u = 3 \cdot s \qquad F = \frac{s \cdot h}{2} \qquad F = \frac{s^2}{4} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Dreiecke sind kongruent, d.h. sie stimmen in Form und Flächeninhalt überein, wenn sie drei gleiche Bestimmungsstücke haben, wovon eines eine Länge sein muss; also wenn sie übereinstimmen

- 1. in den drei Seiten s
- 2. in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel sws
- 3. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite

der grösseren Seite ssw 4. in einer Seite und deren anliegenden

Winkel wsw
5. in einer Seite und zwei Winkeln sww

Dreiecke sind ähnlich, d.h. sie haben gleiche Form, wenn sie übereinstimmen

- 1. im Verhältnis der drei Seiten
- im Verhältnis zweier Seiten und dem Zwischenwinkel
- im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite
- 4. in zwei Winkeln.

In den Formeln für die wichtigsten Grössen der ebenen Figuren und der Körper bedeuten:

u = Umfang F = Flächeninhalt O = Oberfläche

M = Mantelfläche G = Grundfläche

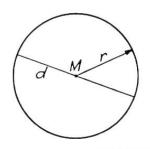
k = Gesamtkantenlänge V = Rauminhalt oder Volumen

 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  = Winkel a, b, c, ... = Seiten

R, r,  $\rho$  = Radien h, h<sub>c</sub>, h ... = Höhen

für  $\pi$  genügt meist der Wert 3,14 oder  $\frac{22}{7}$ 

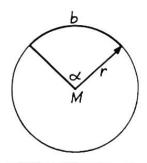
#### 3. Der Kreis



Umfang:  $u = d \cdot \pi$   $u = 2 r \pi$ 

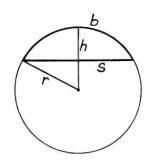
Flächeninhalt:  $F = r^2\pi$   $F = \frac{d^2}{4}\pi$   $F = \frac{u^2}{4 \cdot \pi}$ 

Spezialfälle: Halbkreis, Viertelskreis



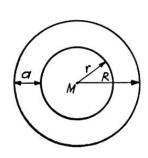
#### Der Kreissektor (Ausschnitt)

Bogenlänge b = 
$$\frac{\mathbf{u} \cdot \alpha}{360} = \frac{\mathbf{d} \cdot \pi \cdot \alpha}{360} = \frac{\mathbf{r} \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$$
  
 $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}{2}$   $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}^2 \pi}{360} \cdot \alpha$   $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{u}^2 \cdot \alpha}{4 \pi \cdot 360}$ 



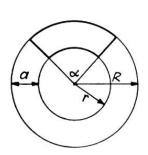
#### Das Kreissegment (Abschnitt)

$$F = \frac{r \cdot (b-s) + s \cdot h}{2}$$



### **Der Kreisring**

Radiale Breite des Kreisringes: a = R - r  $F = R^2 \pi - r^2 \pi$   $F = (R+r) (R-r) \pi$  $F = (R+r) a \pi$ 

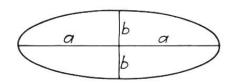


#### Das Kreisringstück

$$F = \frac{R^2 \pi - r^2 \pi}{360} \cdot \alpha \qquad F = (R+r) (R-r) \frac{\pi \cdot \alpha}{360}$$

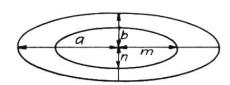
$$F = (R+r) a \frac{\pi \cdot \alpha}{360}$$

#### 4. Verschiedene ebene Figuren



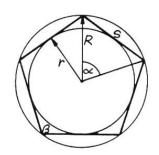
#### Die Ellipse

a = halbe grosse Achse b = halbe kleine Achse Flächeninhalt:  $F = a \cdot b \cdot \pi$ Umfang: Es besteht keine (elementare) Formel



#### Der elliptische Ring

a, b = halbe Achsen der äusseren Ellipse m, n = halbe Achsen der inneren Ellipse Flächeninhalt:  $F = (a \cdot b - m \cdot n) \pi$ 



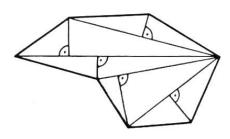
#### Das regelmäßige Vieleck (n-Eck)

R = Radius des Umkreises Umfang:  $u = n \cdot s$ 

r = Radius des Inkreises

n = Seitenzahls = Vielecksseite  $\alpha = \frac{360^{\circ}}{n}$   $\beta = 180^{\circ} - \alpha$ 

 $\alpha = Zentriwinkel$  $\beta$  = Vieleckswinkel Flächeninhalt:  $F = \frac{n \cdot s \cdot r}{2}$ 

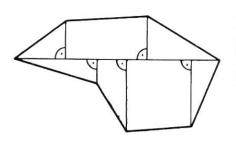


#### Das unregelmäßige Vieleck

Umfang = Summe aller Seiten Flächeninhalt:

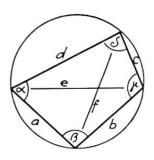
Man zerlegt die Vieleckfläche:

a. mit Diagonalen in Dreiecke und eventuell Trapezoide, berechnet diese Teile und addiert die Teilresultate



#### oder:

b. mit einer passenden Diagonale und auf dieser rechtwinklig errichteten Höhen zu den Ecken in Dreiecke und Trapeze, berechnet diese Teile einzeln und addiert die Teilresultate.



#### **Das Sehnenviereck**

Umfang: u = a+b+c+d  $u = 2 \cdot s$   $s = \frac{u}{2}$ 

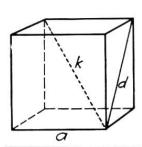
Flächeninhalt:

$$F = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}$$

Satz des Ptolemäus: ac+bd = ef

Winkel:  $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^{\circ}$ 

#### 5. Körper

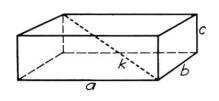


#### Der Würfel

Gesamtkantenlänge:  $12 \cdot a$ Seitendiagonale d:  $a\sqrt{2}$ Körperdiagonale k:  $a\sqrt{3}$ 

Mantel:  $M = 4a^2$  Oberfläche:  $O = 6a^2$ 

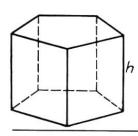
Volumen:  $V = a^3$ 



#### Der Quader

Gesamtkantenlänge: 4(a+b+c)Körperdiagonale:  $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$  $M = 2(a+b) \cdot c$  O = 2(ab+ac+bc)

 $V = a \cdot b \cdot c$ 

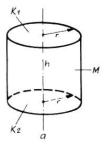


#### Das gerade Prisma

u = Umfang der Grund- oder Deckfläche G n = Zahl der Seitenkanten (Höhenkanten) h

Gesamtkantenlänge: 2u+n·h

 $M = u \cdot h$   $V = G \cdot h$   $O = u \cdot h + 2 \cdot G$ 



#### Der senkrechte Kreiszylinder

a = Achse, senkrecht zu K1 und K2
 h = Höhe (Abstand der parallelen

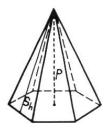
Kreise K<sub>1</sub> und K<sub>2</sub>)

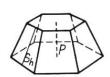
M = Mantel

 $M = 2 \pi r \cdot h$ 

 $O = 2 \pi r(r+h)$ 

 $V = r^2 \pi h$ 





#### Die Pyramide (regelmässige)

 $s_h$  = Seitenhöhe p = Pyramidenhöhe u = Umfang der Grundfläche G

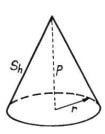
$$M = u \cdot \frac{s_h}{2}$$
  $O = M + G$   $V = G \cdot \frac{p}{3}$ 

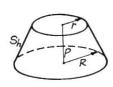
#### **Der Pyramidenstumpf**

U = Umfang der Grundfläche G u = Umfang der Deckfläche D (U+u) : s.

$$M = \frac{(U+u) \cdot s_h}{2} \quad O = M+G+D$$

$$V = \frac{1}{3} p (G + \sqrt{GD} + D)$$



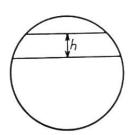


#### Der Kreiskegel

$$r = Radius \qquad M = r\pi \cdot s_h \qquad O = r\pi (r+s_h)$$
 
$$V = \frac{r^2 \pi \cdot p}{3}$$

#### Der Kegelstumpf

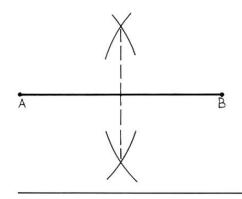
$$\begin{split} R &= \text{Radius der Grundfläche} \\ r &= \text{Radius der Deckfläche} \\ M &= \pi \, s_h \, (\text{R+r}) \qquad O = M + G + D \\ O &= \left[ (\text{R+r}) \, s_h + \text{R}^2 + \text{r}^2 \right] \pi \qquad V = \frac{\pi \cdot p}{3} \, (\text{R}^2 + \text{Rr} + \text{r}^2) \end{split}$$



#### Die Kugel

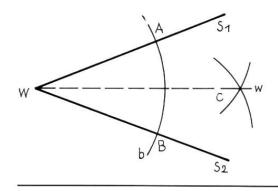
$$\begin{array}{ll} r = Radius & O = 4\,\pi\,r^2 \\ Kugelhaube \\ Kugelzone \end{array} \right\} \, O = 2\,\pi\,r\,h \qquad V = \frac{4\,\pi\,r^3}{3}$$

## Geometrische Grundkonstruktionen



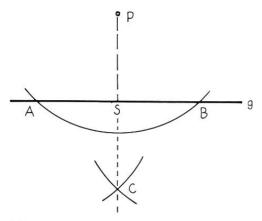
#### 1. Halbieren einer Strecke

Man schlägt um die Endpunkte der Strecke AB zwei Kreisbögen mit gleichem Radius und verbindet ihre Schnittpunkte.



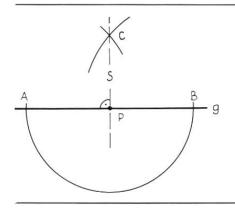
#### 2. Halbieren eines Winkels

Man schlägt einen Kreisbogen b um den Scheitel W. Von seinen Schnittpunkten A und B mit den Schenkeln  $S_1$  und  $S_2$  aus tragen wir je einen Kreisbogen mit gleichem Radius ab. Durch ihren Schnittpunkt C geht die Winkelhalbierende w.



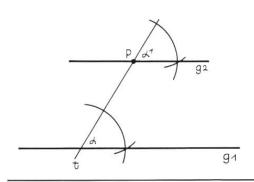
# 3. Fällen eines Lotes von P auf die Gerade g

Ein Kreisbogen von P aus schneidet g in den Punkten A und B. Von A und B aus tragen wir je einen Kreisbogen mit gleichem Radius ab. Durch deren Schnittpunkt C geht die Senkrechte s (das Lot).



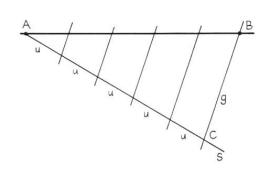
#### 4. Errichten einer Senkrechten in P

Mit P als Mittelpunkt schlägt man einen Kreisbogen, der g in A und B schneidet. Von A und B aus tragen wir je einen Kreisbogen ab. Von deren Schnittpunkt C aus ziehen wir die Senkrechte durch P.



# 5. Zeichnen einer Parallelen zu einer Geraden g<sub>1</sub> durch einen Punkt P

Man zieht eine beliebige Gerade t durch P. Den Winkel  $\alpha$ , den t mit  $g_1$  bildet, trägt man im Punkt P an t an und erhält so  $g_2$ . (Gleichliegende Winkel.)



# 6. Unterteilung einer Strecke in eine beliebige Zahl gleichlanger Stücke.

Von A (oder B) aus ziehen wir den Strahl s. Auf diesem tragen wir die verlangte Anzahl gleichlanger Strecken (z.B.5) ab. Vom Endpunkt C aus ziehen wir eine Gerade durch B. Zu dieser Geraden g ziehen wir Parallele durch jedes Streckenende auf s.

# Einheiten im Messwesen

### 1. Druck, mechanische Spannung

alt:

neu (SI-Einheit):

1 technische Atmosphäre (1 at) ist gleich dem auf eine Fläche gleichmässig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 cm² eine Kraft von 1 Kilopond (im alltäglichen Sprachgebrauch 1 kg) wirkt.

**1 Pascal** (Pa) ist gleich dem auf eine Fläche gleichmässig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 m² die Kraft 1 Newton (N) ausgeübt wird.

## 1 physikalische Atmosphäre

(1 Atm) ist der Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0°C auf 1 cm².

1 Atm = 1,033 at.

**1 Bar** (bar) ist der 10. Teil eines Megapascal.

1 bar = 100000 Pa.

1 at = 1 kp/cm<sup>2</sup> = 98066,5 Pa 1 Atm = 1,033 kp/cm<sup>2</sup> = 101325 Pa

## 2. Energie, Arbeit, Wärmemenge

alt:

neu:

**Arbeit:** Wenn mit dem Einsatz einer Kraft von 1 Kilopond der Weg 1 m überwunden wird, beträgt die Arbeit **1 kpm** (1 «Meterkilogramm»).

**Wärmemenge:** Die Wärmemenge, die benötigt wird, um 1 g Wasser von 14,5 auf 15,5°Celsius zu erwärmen, ist 1 Kalorie (1 cal). 1000 cal = 1 Kilokalorie (1 Kcal).

**1 Joule** (J) ist gleich der Arbeit, die verrichtet wird, wenn der Angriffspunkt der Kraft 1 Newton (N) in Richtung der Kraft um 1 m verschoben wird.

1 kpm = 9,80665 J. 1 cal = 4,1868 J.

### 3. Leistung

alt:

neu:

Wenn die Arbeit 1 kpm in 1 Sekunde verrichtet wird, so beträgt die Leistung **1 kpm/s** (1 «Meterkilogramm» pro Sekunde).

**1 Watt** (1 W) ist gleich der Leistung, bei der während der Zeit 1 Sekunde die Energie 1 Joule umgesetzt wird.

**1 Pferdestärke** (1 PS) = 75 kpm/s.

1 PS = 735.3 W

**1 Kilowatt** = 1000 Watt = 1,36 PS.

1 kpm/s = 9,80665 W

# Umrechnungstabelle für die neuen Masseinheiten:

Arbeit, Wärme: 1 cal = 4,1868 J

1 J = 0,2388 cal

Kraft:  $1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$ 

Leistung: 1 PS = 0.735499 kW

1 kW = 1,359622 PS

Druck: 1 atm = 0.980665 bar

Temperatur:  $0^{\circ}C = 273,16 \text{ K}$ 

# Der Überholungsweg

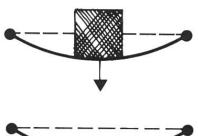
Je grösser der Geschwindigkeitsunterschied zwischen Überholendem und Überholtem ist, **desto kürzer** wird der Überholungsweg. Je grösser die Geschwindigkeiten überhaupt sind, **desto länger** wird der Überholungsweg. Pro 10 km/Std. Geschwindigkeitsunterschied macht der Überholende ca. 2,8 m pro Sekunde gut. Der Überholungsweg kann im Normalfall berechnet werden:

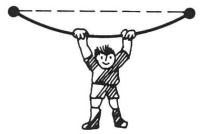
Übaskalısaasısaa	höhere Geschwindigkeit · höhere Geschwindigkeit
Überholungsweg =	Geschwindigkeitsunterschied
in m	in km/Std.

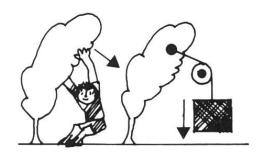
Beispiel: A fährt Velo mit 20 km/Std., B fährt Moped mit 30 km/Std.:

Überholungsweg = 
$$\frac{30 \cdot 30}{10}$$
 = 90 m

## Gewichte und Massen, Kräfte







#### - Was ist ein Gewicht?

Das Gewicht des Körpers ist die Kraft, mit welcher der Körper (wegen der Erdanziehung) auf seine horizontale Unterlage drückt oder an seiner Aufhängevorrichtung zieht und sie dadurch verformt.

#### - Masseinheit:

Das Gewicht von 1 dm³ Wasser von 4°C in Bern oder Zürich entspricht mit guter Genauigkeit der internationalen Gewichtseinheit 1 Kilopond (1 kp).

#### Gewicht und Kraft:

Jede in beliebiger Richtung wirkende Kraft kann mit einer Gewichtskraft verglichen und daher mit dem gleichen Mass ausgedrückt werden.

Die für Gewicht und Kraft neu geltende Einheit ist das **Newton** (1 N).

#### - Gewicht und Masse:

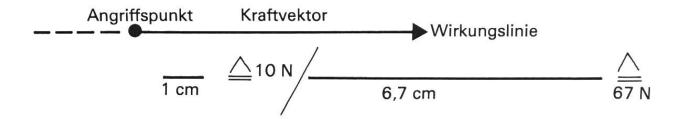
Die Masse eines Körpers, z.B. eine Portion eines Nahrungsmittels, ist überall gleich. Ihr Gewicht aber hängt vom Ort ab:

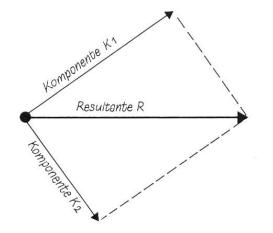
	Masse	Gewicht	t		- Umrechnu	ng
Bei uns	1 kg	1 kp	=	9,81 N	1 Newton = 1	N = 0,1019  kg/kp
Erdpol	1 kg	1,003 kp			1 kg/kp	= 9,81 N
Äquator	1 kg	0,997 kp				
Mondboden	1 kg	0,167 kp				

 Im bürgerlichen Leben wird Gewicht anstelle von Masse gleichbedeutend angewendet. Darum merken wir uns eben die Umrechnung vom altvertrauten Kilogramm in Newton.

# Kraftpfeile (Vektoren) – Addition von Kräften

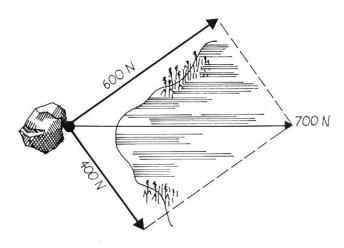
Eine Kraft hat nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung. Die Kraft ist ein **Vektor** und wird durch einen Pfeil dargestellt, dessen Anfang den Angriffspunkt zeigt und dessen Länge proportional zum Betrag der Kraft gezeichnet wird. Die Gerade durch den Pfeil in Kraftrichtung heisst Wirkungslinie.





Mit Hilfe eines Kräfteparallelogramms kann man Kräfte zeichnerisch addieren. Die Summanden nennt man Komponenten, das Ergebnis wird durch die Resultante dargestellt.

Mit Hilfe eines Kräfteparallelogramms kann man auch Kräfte zerlegen.



Der Fels F sollte mit der Kraft 700 N seewärts befördert werden. Im See kann man nicht ziehen, also erledigt man die Arbeit mit den beiden Teilkräften von 600 N & 400 N in den angegebenen Richtungen (gerundete Werte).

## Masse und Gewichte

#### Längenmasse

(zehnteilig)

milli (m) = Tausendstel centi (c) = Hundertstel dezi (d) = Zehntel deka (da) = zehn hekto (h) = hundert kilo (k) = tausend



1 cm = 10 mm



#### Flächenmasse

(hundertteilig)

1 Quadratmeter (m<sup>2</sup>) ist ein Quadrat von 1 m Seitenlänge



 $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$ 

			1	$mm^2$
100	mm <sup>2</sup>	=	1	cm <sup>2</sup>
100	cm <sup>2</sup>	=	1	dm <sup>2</sup>
100	dm <sup>2</sup>	=	1	$m^2$
100	$m^2$	=	1	а
100	а	=	1	ha
100	ha	=	1	km <sup>2</sup>

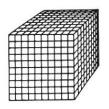
a = Are, ha = Hektare 1 Jucharte (altes Mass) = 36 a

1 mg

#### Körpermasse

(tausendteilig)

1 Kubikmeter (m³) ist ein Würfel von 1 m Kantenlänge



 $1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$ 

```
1 mm<sup>3</sup>

1000 mm<sup>3</sup> = 1 cm<sup>3</sup>

1000 cm<sup>3</sup> = 1 dm<sup>3</sup>

1000 dm<sup>3</sup> = 1 m<sup>3</sup>

1000 dam<sup>3</sup> = 1 dam<sup>3</sup>*

1000 dam<sup>3</sup> = 1 km<sup>3</sup>*

* wenig gebraucht

1 dm<sup>3</sup> = 1 I

1 cm = 1 ml
```

1 cm = 1 ml 1 m<sup>3</sup> = 1000 l 1 m<sup>3</sup> = 10 hl

#### Hohlmasse, Flüssigkeitsmasse I = Liter

1 ml\*
10 ml = 1 cl\*
10 cl = 1 dl
10 dl = 1 l
10 l = 1 dal\*
10 dal = 1 hl
10 hl = 1 kl\*

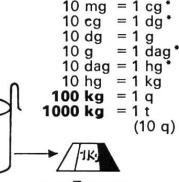
gebraucht

wenig

1 I = 1 kg 1 I (= 1 dm<sup>3</sup>) chemisch reines Wasser von + 4° Celsius wiegt 1 kg

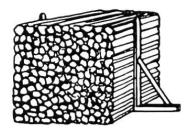
#### Gewichte

g = Gramm



q = Zentner t = Tonne 1 Pfund = 500 g

#### Holzmasse



1 Ster ist 1 m<sup>3</sup> Brennholz 1 Klafter ist 3 Ster (altes Mass)

#### Stückmasse

12 Stück = 1 Dutzend 12 Dutzend = 1 Gros (144 Stück)

# Masse und Gewichte in englischen Sprachgebieten

```
A. Länge
Die Einheit ist das Yard (yd.)
1 Yard = 3 Feet = 36 Inches (Einzahl foot, inch)
             (Fuss)
                         (Zoll)
yd.
            ft.
                         in.
1 \text{ in.} = 2,54 \text{ cm}
                         1 \text{ mm} = 0.039 \text{ in}.
                                                  Praktische Umrechnung:
1 ft. = 0.305 \text{ m}
                         1 \text{ cm} = 0.394 \text{ in}.
                                                  32 \text{ m} = 35 \text{ yd}.
1 \text{ yd.} = 0.914 \text{ m}
                         1 \text{ m} = 1,094 \text{ yd}.
1 statute mile (englische Meile)
                                      = 1,609 \text{ km}
1 nautical mile (internat. Seemeile) = 1,852 km
B. Flächeninhalt
Die Einheit ist das Quadrat-Yard (squ. yd)
1 square yard (Quadrat-Yard) = 0.836 \text{ m}^2
1 \text{ m}^2 = 1,196 \text{ square yard}
1 acre (ac)
                                  = 0,405 ha
                                  = 2.471 ac
1 ha
C. Rauminhalt
Die Einheit ist das Kubik-Yard (cbc. yd.)
1 cubic yard (Kubik-Yard) = 0.765 \text{ m}^3
1 m^3
                                  = 1,308 cubic yard
D. Hohlmasse
1 Gallone = 4 Quarts = 8 Pints
                                = 3,785 I
1 gallon (US)
                                                     1 I = 0.264 \text{ gallon (US)}
1 gallon (brit.)
                                = 4,546 I
                                                     1 I = 0.220 \text{ gallon (brit.)}
                               = 0.568 I
                                                    1 I = 1,76 pint (brit.)
1 pint (US)
                              = 158,98 I
1 barrel (US für Erdöl)
1 barrel (brit. für Bier usw.) = 163,5 l
E. Gewichte
                                               1 Pound = 16 Unzen
Die Einheit ist das Pound (lb)
                                                     1 g = 0.0352 \text{ ounce}
                                      28,35 q
1 ounce (Unze)
                                = 0.454 \text{ kg}
                                                     1 \text{ kg} = 2,205 \text{ pound}
1 pound
                                                     1 t = 1,102 short ton
1 t = 0,984 long ton
1 short ton (US)
                                = 907,2 \text{ kg}
                                = 1016 \text{ kg}
1 long ton (brit.)
```

## Ein Stein fällt zur Erde

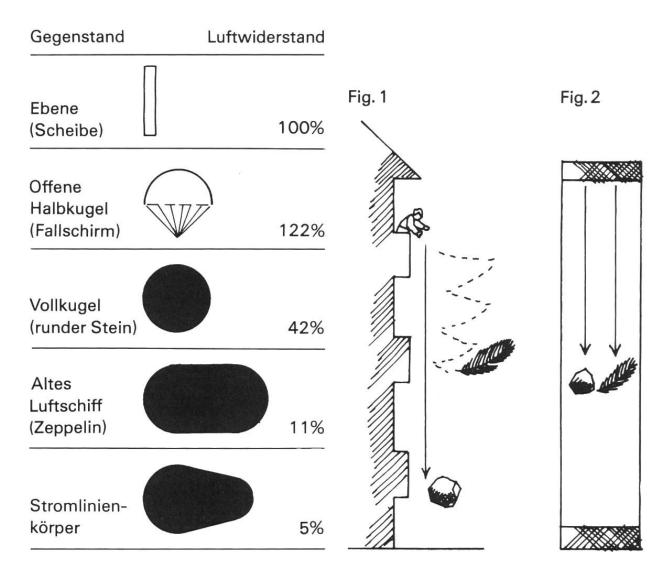
Es ist eine bekannte Tatsache, dass ein Körper, der nirgends aufliegt und nicht aufgehängt ist, zur Erde fällt. Er fällt senkrecht, das heisst zum Erdmittelpunkt, weil ihn die Erde anzieht. Wir untersuchen jetzt, wie unser Stein fällt.

Wenn wir zum Beispiel eine Hühnerfeder und einen Stein von einem Turm fallen lassen, so wird der Stein lange vor der Feder am Boden angelangt sein. Wenn wir aber die Feder und den Stein in einem Rohr fallen lassen, aus dem wir vorher alle Luft entfernt haben, so kommen beide, Feder und Stein, gleich schnell unten an. Wir wissen es jetzt: Im luftleeren Raum fallen alle Körper gleich schnell. (Fig. 1, 2).

Wir untersuchen die Zeiten, Geschwindigkeiten und Wege, wie es Galileo Galilei zuerst gemacht hat, und erhalten dabei folgende Tabelle:

Zeit	Fallhöhe	Zuwachs	Geschwindigkeit in m/Sekunde
Sekunden	m	m	(am Ende der Strecke)
1 2 3 4 5 6 7 8 9	5 20 45 80 125 180 245 320 405 500	15 25 35 45 55 65 75 85 95	10 (= 36 km/Std.) 20 30 40 50 60 70 80 90

Der Luftwiderstand und damit die Bremswirkung hängt von der Form des fallenden (oder bewegten) Körpers ab; die Form mit dem geringsten Widerstand nennt man «Stromlinienform».



Die Physiker geben uns dazu folgende exakten Gesetze:

Wenn v die Fallgeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t Sekunden,

g die **Schwerebeschleunigung** =  $9.81 \text{ m/s}^2$ ,

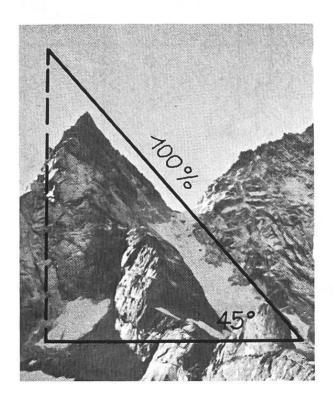
h die Fallhöhe = in der Zeit t durchfallender Weg,

t die **Zeit,** die für den Fall benötigt wird,

dann gilt:

$h = \frac{v \cdot t}{2}$	v = g⋅t
$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$	$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

Dabei ist, wie gesagt, kein Luftwiderstand berücksichtigt. Im lufterfüllten Raum ist es anders. Das sehen wir am Fallschirmabspringer. Wenn er aus dem Flugzeug «aussteigt», wird seine Fallgeschwindigkeit zunächst grösser. Dann entfaltet er seinen Fallschirm. Wegen des viel grösseren Querschnittes des Fallschirms setzt er der Luft einen viel grösseren Widerstand entgegen. Die Widerstandskraft wird viermal grösser, wenn die Geschwindigkeit zweimal grösser wird, 9mal grösser, wenn die Geschwindigkeit 3mal grösser wird, usw. Wir sagen: Der Luftwiderstand wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Wenn nun die Fallgeschwindigkeit so gross geworden ist, dass die Widerstandskraft der Luft gleich der Erdanziehungskraft ist, so heben sich die beiden Kräfte auf, und die Fallgeschwindigkeit bleibt konstant (regelmässig). Unser Fallschirmspringer wird dann mit etwa 5 m/sec landen; wie wenn man 1,25 m frei herabspringt.



## Steigung und Gefälle

Unter Steigung (oder in umgekehrter Richtung gesehen Gefälle) verstehen wir vorerst einmal den Höhenunterschied zweier Punkte im Gelände. Um uns die «Steilheit» vorstellen zu können oder verschiedene Steilheiten zu vergleichen, müssen wir den Höhenunterschied in ein Verhältnis zur waagrechten (horizontalen) Entfernung der beiden Punkte bringen. Wir können aber auch den Winkel zwischen der schrägen Verbindung der beiden Punkte und ihrer waagrechten Entfernung angeben. Die abgebildete Felspyramide hat eine Neigung von ziemlich genau 45° (bei der 360°-Winkelteilung) oder

50° bei der 400°-Winkelteilung. In % angegeben, beträgt die Neigung 100%, in Promille 1000‰.

Die Steigungsprozente bestimmen wir, indem wir den Höhenunterschied durch  $^{1}/_{100}$  der horizontalen Entfernung teilen. Wenn wir Promille berechnen wollen, teilen wir den Höhenunterschied durch  $^{1}/_{1000}$  der horizontalen Entfernung.

**Beispiel:** Ein Strassenstück – horizontal auf der Karte gemessen – ist 1100 m lang. Der Höhenunterschied beträgt 43 m. Die Steigung beträgt (durchschnittlich) 43 m:11 m, also nicht ganz 4%.

**Beispiel:** Würden wir den höchsten Punkt der Schweiz (Dufourspitze, 4635 m ü. M.) mit dem tiefsten Punkt unseres Landes (Ufer des Lago Maggiore, 193 m) verbinden, ergäbe sich folgende Steigung: 4442 m Höhenunterschied:  $66 \, \text{m} \, (^{1}/_{1000} \, \text{von rund} \, 66 \, \text{km}) = (\text{fast}) \, 70\%$ , das ist gleichviel wie das steilste Stück der Berninabahn bei Brusio im Puschlav.

Einige Zahlenangaben: Unsere grossen Alpenpässe haben fast durchwegs eine maximale Steigung von 9–10%. Ein Schweizer Wohnwagengespann muss bei der Zulassungskontrolle bei 15% Steigung anfahren können. Flachlandstaaten haben da oft weniger strenge Vorschriften, und so bleibt denn dann und wann ein Meeruferanwohner in einer steilen Kurve hängen. – Das steilste Stück des Auslaufs einer Sprungschanze hat gegen 100% oder 45° Gefälle. Ein steiles Bergsträsschen bringt es bald einmal auf 20% oder zirka 11°. – Die Gotthardbahn überwindet die Steilrampe zwischen Amsteg und Göschenen mit durchschnittlich 24‰ Steigung; die Pilatusbahn, eine Zahnradbahn, weist im steilsten Stück das Zwanzigfache, nämlich 48% auf.

## Die Anhaltestrecke

Bis ein Fahrzeug hält, geht zweimal Zeit verloren:

- 1. Der Fahrer muss die Gefahr erkennen, er muss überlegen und reagieren, und es vergeht erst noch Zeit, bis die Bremsen zu wirken beginnen. Das alles ergibt die sogenannte Reaktionszeit. Währenddessen legt das Fahrzeug ungebremst den **Reaktionsweg** zurück. Er beträgt etwa 3 m pro 10 km/Std. Geschwindigkeit, also z. B. 9 m bei 30 km/Std.
- Der Bremsweg ist die Strecke, die das Fahrzeug vom Beginn der Bremswirkung bis zum Stillstand zurücklegt. Wir berechnen den Bremsweg bei nasser Strasse:

$$\frac{\text{Bremsweg}}{\text{in m}} = \frac{\frac{\text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Geschwindigkeit}}{100}}{\text{in km/Std.}}$$

$$\frac{\text{Beispiel für 30 km/Std.:}}{\frac{30 \cdot 30}{100}} = 9 \text{ m}$$

Die Anhaltestrecke setzt sich aus Reaktionsweg und Bremsweg zusammen; sie misst also z. B.

bei 20 km/Std. 6 m + 4 m = 10 mbei 30 km/Std. 9 m + 9 m = 18 mbei 40 km/Std. 12 m + 16 m = 28 mbei 100 km/Std. 30 m + 100 m = 130 m

Die Anhaltestrecke wird kürzer auf trockener Strasse und wenn der Fahrer bremsbereit ist, sie wird länger auf verschneiter, vereister oder verschmutzter Fahrbahn, sie ist auch länger bei allen Zweiradfahrzeugen.

Der Überholungsweg siehe Seite 39