

**Zeitschrift:** Pestalozzi-Kalender

**Herausgeber:** Pro Juventute

**Band:** 13 (1920)

**Heft:** [1]: Schülerinnen

**Rubrik:** Geometrie

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 24.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# GEOMETRIE

## Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern.

Tafel I

Fig. 1

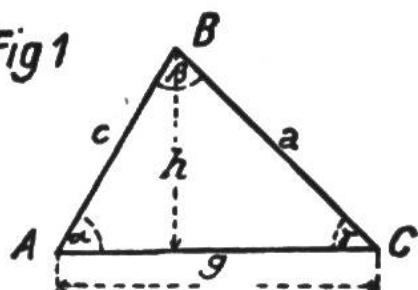


Fig. 2

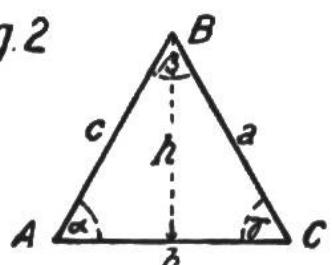


Fig. 3

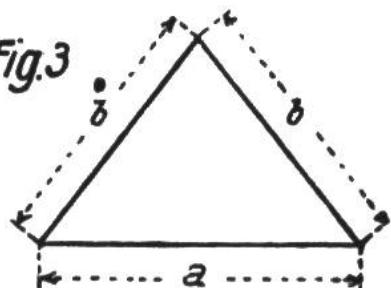


Fig. 4

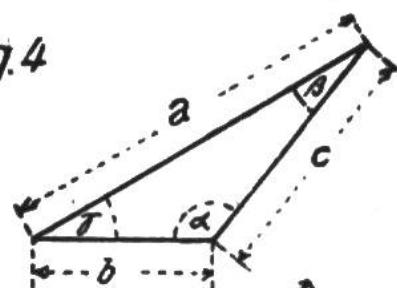


Fig. 5

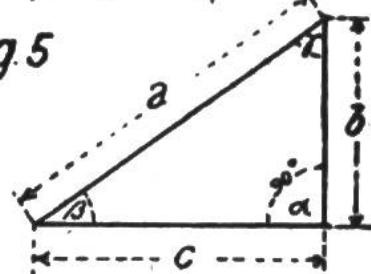
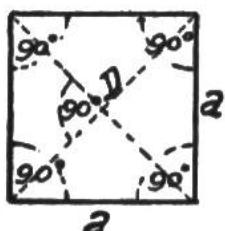


Fig. 6



### Dreieck:

Grundlinie  $\cdot g$ , Höhe  $\cdot h$ ; Fläche  $\cdot F$

$$F = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot g$$

$$g = \frac{2F}{h}, \quad h = \frac{2F}{g}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = 2\pi$$

### Gleichseitiges Dreieck:

Seiten  $\cdot a = b = c$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

$$F = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 0.433 a^2$$

(genauer  $0,4330127 a^2$ )

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

### Gleichschenkliges Dreieck:

Grundlinie  $\cdot a$ , gleiche Seiten  $\cdot b$

$$F = \frac{a}{4} \sqrt{(2b+a)(2b-a)} = \frac{a}{2} \sqrt{b+\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{b-\frac{a}{2}}$$

### Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten  $a, b$  und  $c$ ,  $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

### Rechtwinkliges Dreieck; $\alpha = 90^\circ$

Hypotenuse  $\cdot a$ , Katheten  $\cdot b$  und  $c$ .

$$F = \frac{b \cdot c}{2}, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad a \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

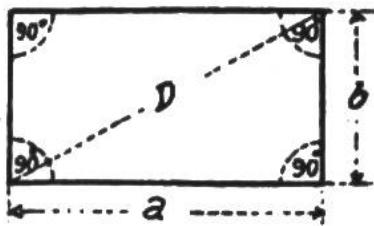
### Quadrat:

Seite  $\cdot a$ . Diagonale  $\cdot D$ :

$$F = a \times a = a^2 \quad a = \sqrt{F}$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a \cdot 1,4142$$

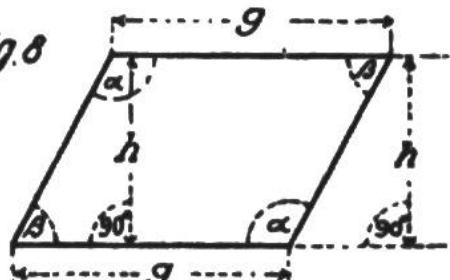
Fig. 7

Rechteck:Seiten  $a$  und  $b$ , Diagonale  $D$ 

$F = a \cdot b; a = \frac{F}{b}; b = \frac{F}{a};$

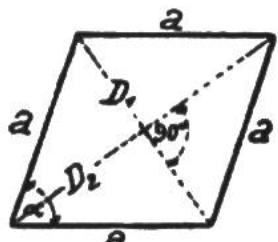
$D = \sqrt{a^2 + b^2}.$

Fig. 8

Parallelogramm:Grundlinie =  $g$ ; Höhe(rechtwinklig auf Grundlinie) =  $h$ 

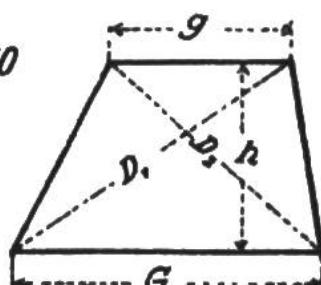
$F = g \cdot h; g = \frac{F}{h}; h = \frac{F}{g};$

Fig. 9

Rhombus:Gleiche Seiten  $\cdot a$ , Diagonalen  $D_1$  u.  $D_2$ 

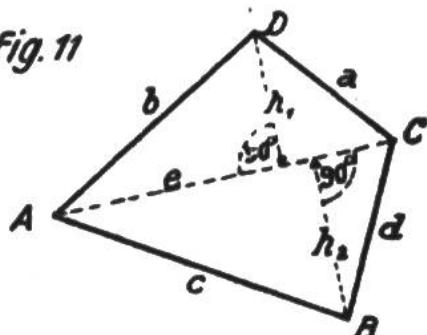
$F = a^2 \sin \alpha; F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}$

Fig. 10

Trapez:Parallelseiten =  $G$  und  $g$ , Höhe =  $h$ Diagonalen =  $D_1$  und  $D_2$ 

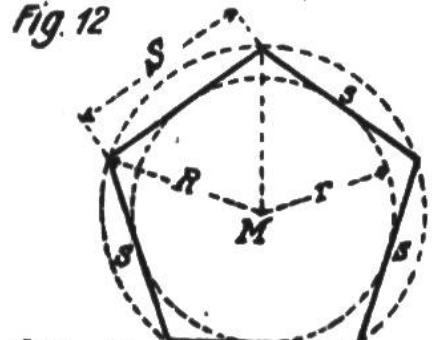
$F = \frac{G+g}{2} \cdot h,$

Fig. 11

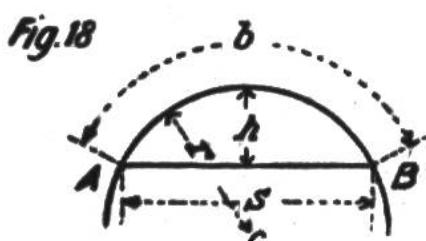
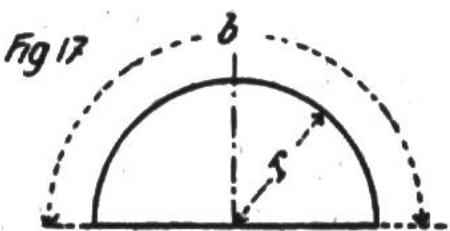
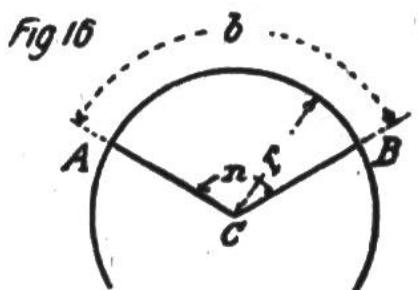
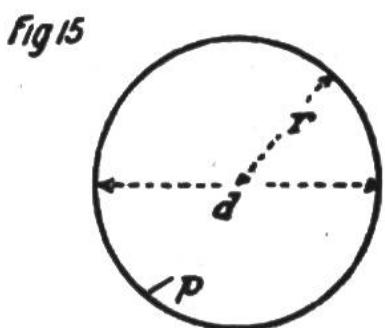
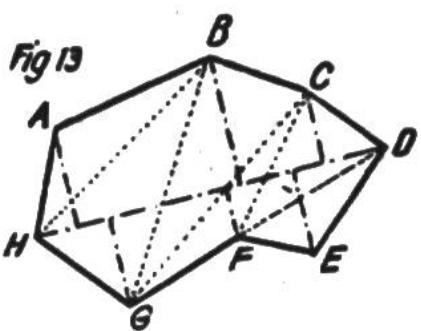
Trapezoid:Diagonale  $AC$  und rechtwinkligdarauf die Höhen  $h_1$  und  $h_2$ 

$F = \frac{AC}{2} \cdot h_1 + h_2 = \frac{e}{2} \cdot h_1 + h_2,$

Fig. 12

Seite =  $s$ Radius des umschriebenen Kreises =  $R$ Radius des eingeschriebenen Kreises =  $r$ 

Polygon	$R$	$r$	$S$	$F$
Dreieck	0.5773	0.2898	1.732 R oder 3.463 r	0.433 S <sup>2</sup> od. 1.259 R <sup>2</sup>
Quadrat	0.7073	0.5000	1.414 R + 2.000 r	1.000 S <sup>2</sup> = 2.000 R <sup>2</sup>
Fünfeck	0.8513	0.6958	1.778 R + 1.463 r	1.721 S <sup>2</sup> = 2.378 R <sup>2</sup>
Sechseck	1.0003	0.8660	1.000 R + 1.155 r	2.000 S <sup>2</sup> = 2.899 R <sup>2</sup>
Siebeneck	1.1523	1.0398	0.653 R + 0.963 r	3.360 S <sup>2</sup> = 2.738 R <sup>2</sup>
Achteck	1.3073	1.2003	0.768 R + 0.828 r	4.620 S <sup>2</sup> = 2.828 R <sup>2</sup>
Neuneck	1.4623	1.3745	0.850 R + 0.722 r	6.182 S <sup>2</sup> = 2.932 R <sup>2</sup>
Zehneck	1.6183	1.5403	0.610 R + 0.649 r	7.850 S <sup>2</sup> = 2.930 R <sup>2</sup>
Elfneck	1.7753	1.7043	0.563 R + 0.587 r	9.366 S <sup>2</sup> = 2.973 R <sup>2</sup>
Zwölfeck	1.9323	1.8683	0.512 R + 0.536 r	11.190 S <sup>2</sup> = 3.000 R <sup>2</sup>



### Unregelmassige Vielecke od. Flächen:

Die Fläche kann bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittelst Diagonalen und Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittelst der Koordinaten der Eckpunkte auf eine rechtwinklig gewählte Axe Fig. 13.

Durch Zerlegung in parallele Streifen gleicher Breite Fig. 14

$$F = x \cdot (h_1 + h_2 + \dots + h_n)$$

### Kreis:

Durchmesser =  $d$ ; Radius =  $r$

Umfang =  $p$ ; Inhalt =  $F$

$$p = d\pi = d \cdot 3,14159$$

$$= 2r\pi;$$

$$F = \frac{d^2\pi}{4} = 0,785 d^2 = r^2\pi.$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0,564 \sqrt{F};$$

$$d = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1,128 \sqrt{F}.$$

### Kreissektor: (ABC) Fig. 16

Radius =  $r$ ; Bogen =  $b$ ;

Zentriwinkel =  $n$ ,

$$F = \frac{r^2\pi \cdot n}{360} = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi} \cdot \frac{360}{n}} = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{180}{n};$$

$$n = 360 \frac{F}{r^2\pi} = \frac{b}{r\pi} \cdot 180$$

$$b = 2r\pi \frac{n}{360} = r\pi \frac{n}{180}$$

Halbkreis: Bogen =  $b = \pi r$ , Fläche =  $F = \frac{\pi r^2}{2}$

Viertelkreis: Bogen =  $b = \frac{\pi r}{2}$ ; Fläche =  $F = \frac{\pi r^2}{4}$

### Kreisabschnitt: Fig. 18

Sehne =  $s$ , Höhe =  $h$ ,  $F = \frac{2}{3} s \cdot h$ ,

$$\text{genau } F = \frac{r^2\pi R}{360} - \frac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{br - s(r-h)}{2}$$

$$s = 2\sqrt{h(2r-h)}, \quad r = \frac{s^2}{8h} - \frac{h}{2}.$$

Fig. 19

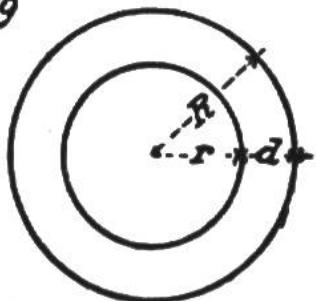


Fig. 20

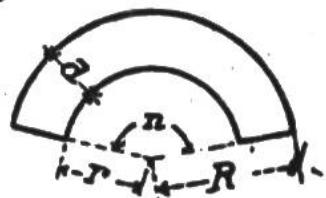


Fig. 21

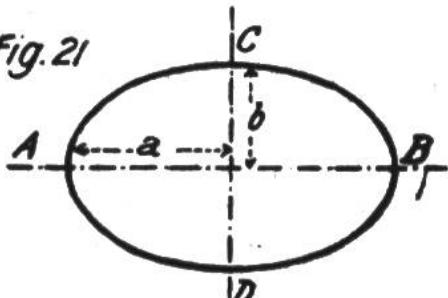


Fig. 22

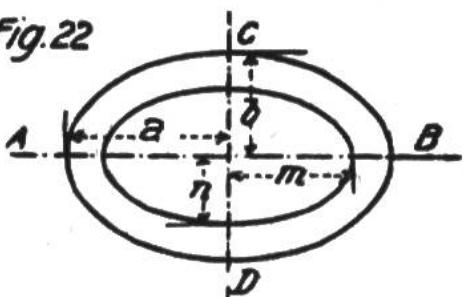


Fig. 23

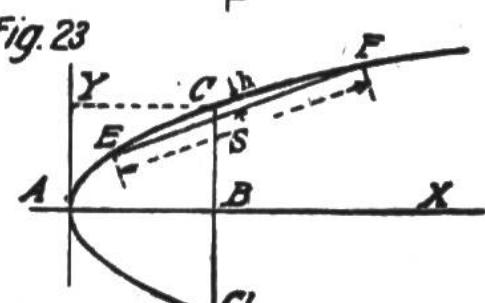
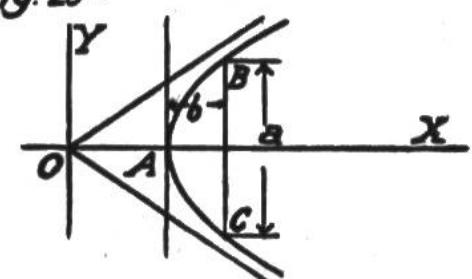


Fig. 23a

Kreisring:Äusserer Radius =  $R$ ,Innerer Radius =  $r$ ,

$$F = R^2 \pi - r^2 \pi.$$

$$= \pi(R+r)(R-r).$$

wenn  $d$  = radiale Breite des Kreisrings  
so ist  $F = \pi(2r+d).d$ .Kreisringstück: (Konzentrisch)Äusserer Radius =  $R$ ,Innerer Radius =  $r$ ,Zentriwinkel =  $n$ , radiale Breite =  $d$ 

$$F = (R^2 \pi - r^2 \pi) \frac{n}{360} = (R^2 - r^2) \cdot \frac{\pi \cdot n}{360}$$

$$= (R+r)d \frac{\pi \cdot n}{360} = -(R+r)d \cdot n \cdot 0.0087$$

Ellipse:Halbe Achsen der Ellipse =  $a$  und  $b$ ,  
 $F = a \cdot b \cdot \pi$ ,Elliptischer Ring:Halbe Achsen der äusseren Ellipse =  $a, b$ Halbe Achsen der inneren Ellipse =  $m, n$ 

$$F = \pi(a \cdot b - m \cdot n)$$

Parabelsegment ECF:

$$F = \frac{2}{3} s \cdot h, \quad s = \overline{EF},$$

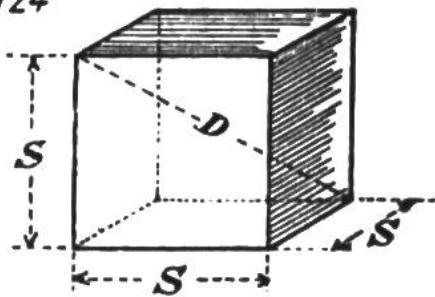
Parabelfläche CAC':

$$F = \frac{2}{3} CC' \cdot \overline{AB},$$

Hyperbelsegment ABC:Sehne =  $a$ , Höhe =  $b$ 

$$F(\text{annähernd}) = \frac{3}{5} b \cdot a,$$

Fig. 24

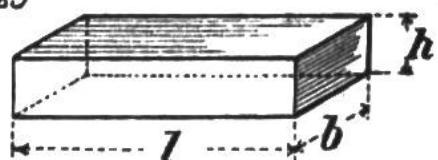
Würfel:Seite -  $S$ , Inhalt -  $K$ , Oberfläche -  $O$ 

$$K = S^3, O = 6S^2,$$

$$s = \sqrt[3]{K}$$

$$\text{Diagonale} = D = \sqrt{3s^2} = s\sqrt{3} = \\ s \cdot 1,732050$$

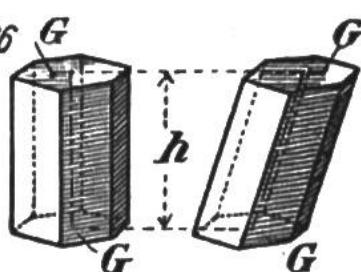
Fig. 25

Parallelfach:Länge -  $l$ , Breite -  $b$ , Höhe -  $h$ ,

$$\text{Inhalt} - K = l \cdot b \cdot h,$$

$$\text{Oberfläche} - O = 2(l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$$

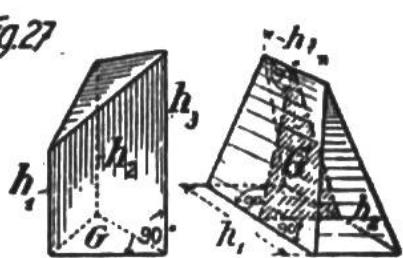
Fig. 26

Prisma:Grundfläche -  $G$ , Höhe -  $h$ ,

$$\text{Inhalt} = K = G \cdot h.$$

$$\text{Oberfläche} O = \text{Umfang der Grundfläche} U \times h + 2G.$$

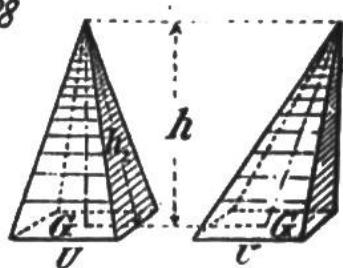
Fig. 27

Schiefabgeschnittenes Prisma:Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes =  $G$ .Länge der Kanten =  $h, h, h, \dots, h_n$ .

$$\text{Inhalt} K = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$$

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymmetrie.

Fig. 28

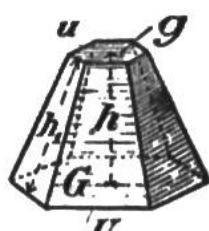
Pyramide:Grundfläche -  $G$ , Höhe -  $h$ ,

$$K = \frac{G \cdot h}{3}, h = \frac{3K}{G}, G = \frac{3K}{h}$$

Mantel  $M$  = Umfang der Grundfläche  $U \times \frac{h}{3}$ ,

$$\text{Oberfläche} O = M + G$$

Fig. 29

Abgestumpfte Pyramide:Parallele Endflächen -  $G, g$ , ihr Abstand -  $h$ .ihre Umfänge  $U, u$ . Mantel  $M = \frac{U+u}{2} \cdot h$ ,

$$K = \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg}), O = M + G + g$$

Fig. 30

Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)

$$K = \frac{1}{6}h[(2a+a_1)b + (2a_1+a)b_1]$$

Fig. 31

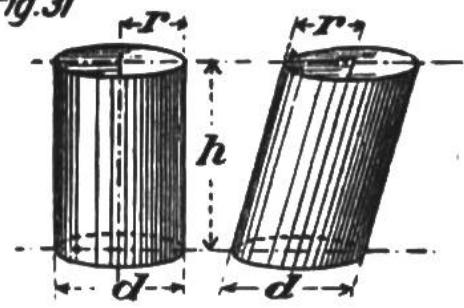


Fig. 32

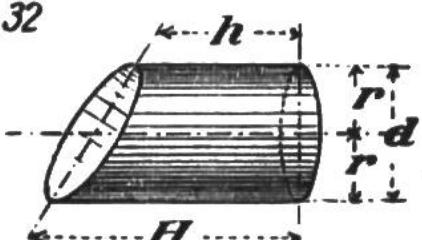


Fig. 33

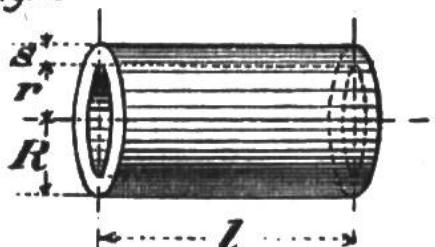


Fig. 34

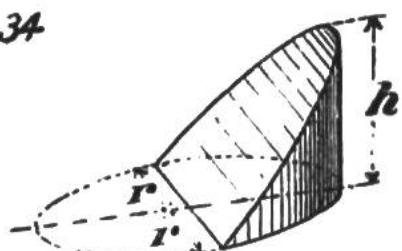


Fig. 35

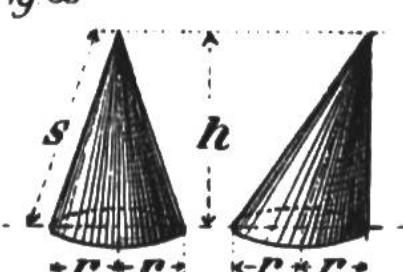
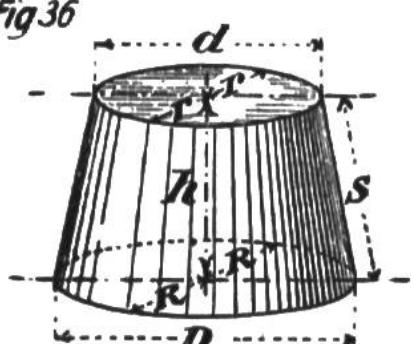


Fig. 36

Cylinder (Walze)

Radius -  $r$ , Durchmesser -  $d$ , Höhe -  $h$

Inhalt  $K = r^2 \pi h$  oder  $\frac{d^2}{4} \pi h$

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}, \quad h = \frac{K}{r^2 \pi}$$

Mantel =  $2r\pi h$  oder  $d\pi h$ .

Oberfläche =  $2r\pi(r+h)$  oder  $d\pi(\frac{d}{2}+h)$

Schiefabgeschnittener Cylinder.

Grösste Höhe =  $H$ , kleinste Höhe =  $h$ ,

Inhalt  $K = r^2 \pi \frac{H+h}{2}$  oder  $\frac{d^2}{4} \pi \frac{H+h}{2}$

Mantel =  $r\pi(H+h)$

Hohlzylinder (Rohr):

innerer Radius =  $r$ ,

äußerer Radius =  $R$ , Länge =  $l$ ,

Wandstärke =  $s = R - r$ ,

Inhalt  $K = \pi l (R^2 - r^2)$ , oder

$K = \pi l s (2R - s)$  oder  $\pi l s (2r + s)$ .

Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche =  $r$ ,

Höhe des Hufes =  $h$ , Mantel =  $2rh$ .

Inhalt:  $K = \frac{2}{3} r^2 h$ .

Kegel:

Radius der Grundfläche =  $r$ ,

Höhe =  $h$ , Seite =  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ,

Mantel  $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$  oder  $\pi r s$ ,

Oberfläche =  $\pi r^2 + r\pi s$  oder  $r\pi(r+s)$   
oder =  $\pi r (r + \sqrt{r^2 + h^2})$ .

Inhalt  $K = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

$$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi h}}, \quad h = \frac{3K}{r^2 \pi}$$

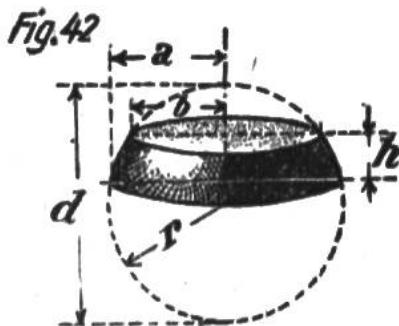
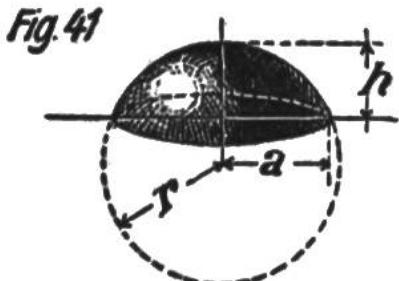
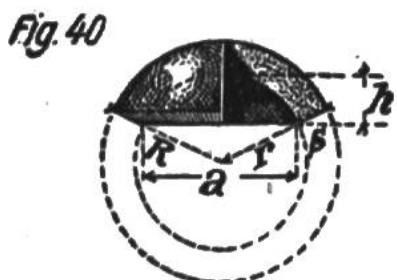
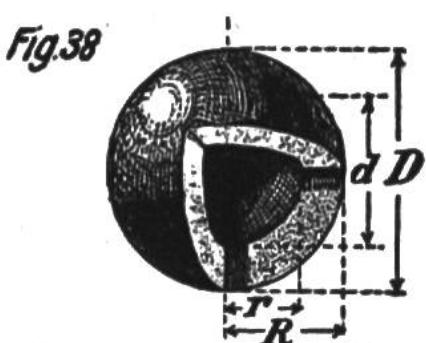
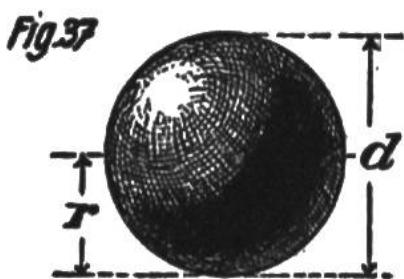
Abgestumpfter Kegel:

Radius der parallelen Endflächen =  $R$  und  $r$ , Durchmesser =  $D$  und  $d$ , Höhe =  $h$ , Seite =  $s$ ,

Inhalt  $K = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$

$$= \pi h^2 (\frac{D^2 + Dd + d^2}{12})$$

Mantel  $M = \pi s (R+r)$ .



### Kugel:

Radius =  $r$ , Durchmesser =  $d$ ,  
Oberfläche  $O = 4\pi r^2 = 12,566 r^2$ , oder  $d^2 \pi$ .  
Inhalt  $K = \frac{4}{3} \pi r^3 = 4,189 r^3$ ,  $K = \frac{\pi r^3}{3}$ ,  
 $\pi K = \frac{d^3 \pi}{6} = 0,5236 \cdot d^3$ ,  
Radius  $r = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{K}{\pi}}$ ,  $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$

### Hohlkugel:

Ausserer Radius =  $R$ , innerer =  $r$ ,  
Ausserer Durchmesser =  $D$ , innerer =  $d$ ,  
Inhalt  $K = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6} (D^3 - d^3)$ .

### Kugelsektor:

Radius der Kugel =  $r$   
Begrenzende Kalotte, Höhe =  $h$ , Durchm. =  $c$ ,  
Oberfläche  $O = \frac{\pi r}{2} (4h + c)$   
Inhalt  $K = \frac{2}{3} r^2 \pi h = 2,0944 r^2 h$ .

### Hohlkugelsektor:

Ausserer Radius =  $R$  innerer =  $r$   
Wanddicke =  $R - r = s$ ,  $s = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$   
Inhalt  $K = 2,094 \frac{h}{r} (R^3 - r^3)$ .

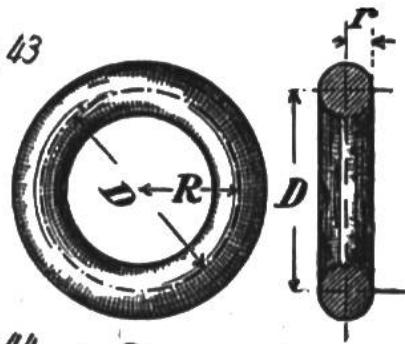
### Kugelsegment (Kugelkalotte):

Radius der Kugel =  $r$ ,  
Radius der Grundfläche =  $a$ ,  
Höhe der Kalotte =  $h$ ,  
Oberfläche =  $O = 2\pi r h = \pi (a^2 + h^2)$   
Inhalt  $K = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$  oder  
 $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$ .

### Kugelzone:

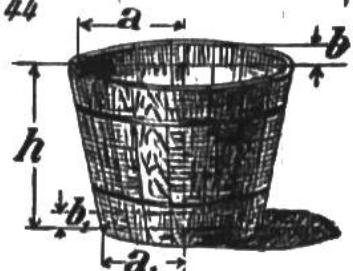
Höhe der Zone =  $h$ , Radius der Kugel =  $r$   
Durchmesser der Endflächen =  $a$  und  $b$ ,  
Mantel  $M = 2\pi r h$ , Oberfläche  $O = M + \frac{a^2 \pi}{4} + \frac{b^2 \pi}{4}$ .  
Inhalt  $K = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$ .

Fig. 43

Cylindrischer Ring:

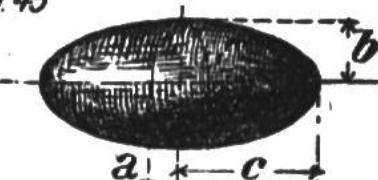
Radius des kreisförmigen Querschnittes -  $r$ ,  
Durchmesser des Ringes -  $D$ , Radius -  $R$ ,  
Inhalt  $K = 2\pi^2 R r^2 = 2,467 D d^2$ .  
Oberfläche  $O = 4\pi^2 R r = 9,87 D d$ .

Fig. 44

Kübel.

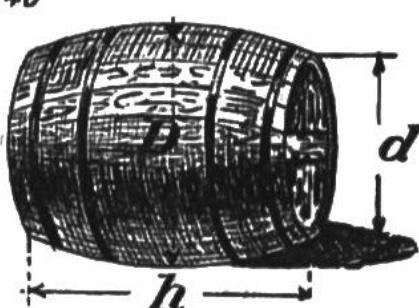
Die unter sich parallelen Endflächen sind Ellipsen mit den Halbachsen  $a$   $b$  und  $a_1$ ,  $b_1$ . Höhe zwischen den Endflächen -  $h$ .  
Inhalt  $K = \frac{1}{6}\pi h [2(ab+a_1b_1) + ab_1 + a_1b]$

Fig. 45

Ellipsoid:

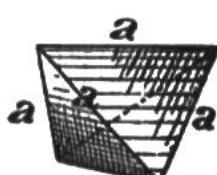
Bezeichnung der 3 Halbachsen -  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .  
Inhalt  $K = \frac{4}{3}\pi a b c$ .

Fig. 46

Fass.

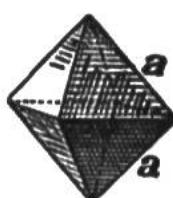
Spunddurchmesser -  $D$ ,  
Bodendurchmesser -  $d$ ,  
Höhe (resp. Länge) -  $h$ ,  
Inhalt  $K = 1,0453 h (0,4D^2 + 0,2Dd + 0,15d^2)$ .

Fig. 47

Reguläre Polyeder:Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante -  $a$ , Oberfl.  $O = a^2\sqrt{3} = 1,7320 a^2$   
Inhalt  $K = \frac{1}{12}a^2\sqrt{2} = 0,11785 a^3$

Fig. 48

Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

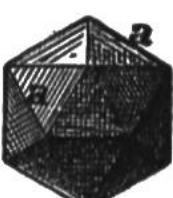
Kante -  $a$ , Oberfl.  $O = 2a^2\sqrt{3} = 3,464116 a^2$   
Inhalt  $K = \frac{a^2}{3}\sqrt{2} = 0,4714045 a^3$ .

Fig. 49

Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante -  $a$ , Oberfl.  $O = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 20,645729 a^2$   
Inhalt  $K = \frac{a^2}{4}(15+7\sqrt{5}) = 7,663119 a^3$ .

Fig. 50

Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante -  $a$ , Oberfl.  $O = 5a^2\sqrt{3} = 8,6602545 a^2$ .  
Inhalt  $K = \frac{5}{12}a^2(3+\sqrt{5}) = 2,181695 a^3$ .