Zeitschrift: Pestalozzi-Kalender
Herausgeber: Pro Juventute
Band: 12 (1919)
Heft: [1]: Schülerinnen

Rubrik: Geometrie

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.10.2025

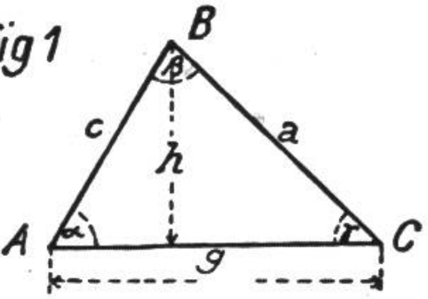
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

GEOMETRIE

Tafel I

Formeln zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern.

Fig 1



Dreieck:

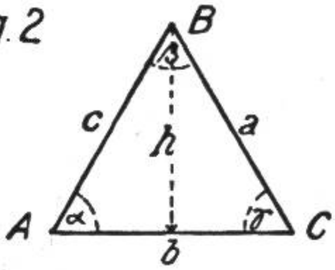
Grundlinie = g; Höhe = h; Fläche = F

$$F = \frac{g \times h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot g;$$

$$g = \frac{2F}{h}; \quad h = \frac{2F}{g}$$

$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma = 180^\circ = 2R$$

Fig. 2



Gleichseitiges Dreieck:

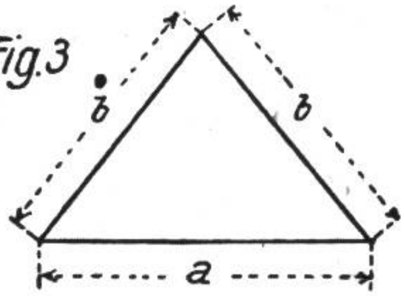
Seiten = $a = b = c$; $\sphericalangle\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 0.433\,a^2$$

(genauer $0,4330127\,a^2$)

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}};$$

Fig. 3

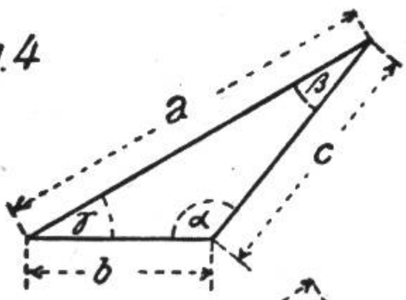


Gleichschenkliges Dreieck.

Grundlinie = a, gleiche Seiten = b

$$F = \frac{a}{4}\sqrt{(2b+a)\cdot(2b-a)} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)}.$$

Fig. 4

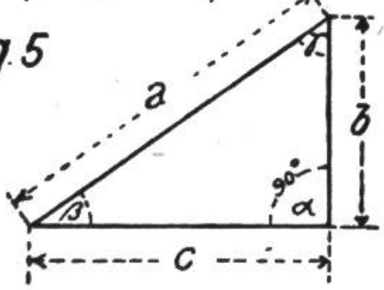


Ungleichseitiges Dreieck:

Seiten a, b und c, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Fig. 5



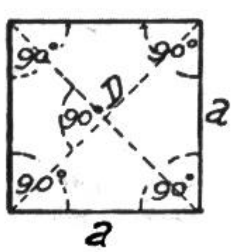
Rechtwinkliges Dreieck; $\sphericalangle\alpha = 90^\circ$

Hypothenuse = a, Katheten = b und c.

$$F = \frac{b \cdot c}{2}; \quad a^2 = b^2 + c^2; \quad a\sqrt{b^2 + c^2};$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Fig. 6



Quadrat:

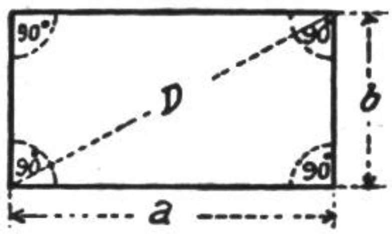
Seite = a, Diagonale = D;

$$F = a \times a = a^2 \qquad a = \sqrt{F}$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = a \cdot 1{,}4142$$

E. Pachen

Fig. 7



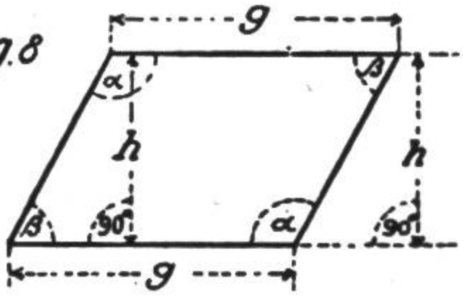
Rechteck:

Seiten = a und b, Diagonale = D

$F = a \cdot b;\quad a = \frac{F}{b};\quad b = \frac{F}{a};$

$D = \sqrt{a^2 + b^2}.$

Fig. 8

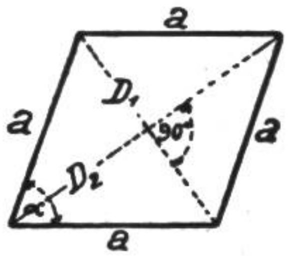


Parallelogramm:

Grundlinie = g; Höhe (rechtwinklig auf Grundlinie) = h

$F = g \cdot h;\quad g = \frac{F}{h};\quad h = \frac{F}{g};$

Fig. 9

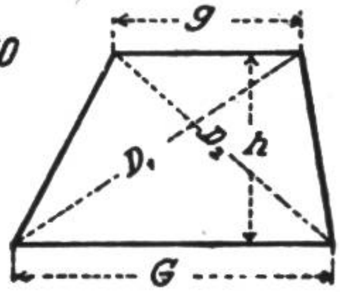


Rhombus:

Gleiche Seiten = a, Diagonalen D_1 u. D_2

$F = a^2 \sin\alpha;\quad F = \frac{D_1 \cdot D_2}{2}.$

Fig. 10



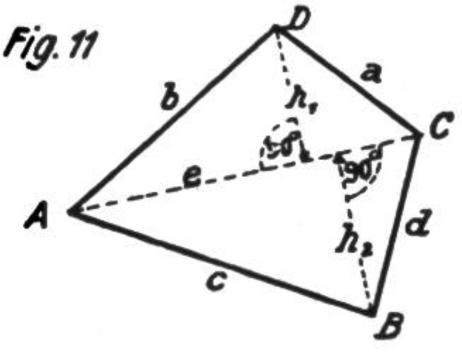
Trapez:

Parallelseiten = G und g, Höhe = h

Diagonalen = D_1 und D_2

$F = \frac{G+g}{2} \cdot h;$

Fig. 11

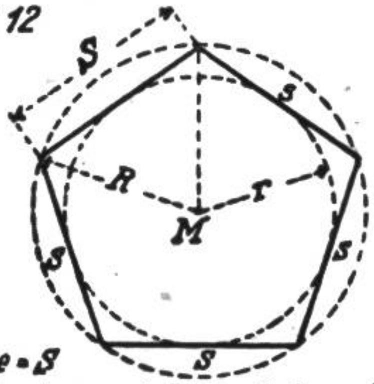


Trapezoid:

Diagonale $\overline{AC}$ und rechtwinklig darauf die Höhen h_1 und h_2

$F = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot h_1 + h_2 \, = \frac{e}{2} \cdot h_1 + h_2;$

Fig. 12



Seite = S
Radius des umschriebenen Kreises = R
Radius des eingeschriebenen Kreises = r

Reguläre Vielecke (Polygon):

Polygon	R	r	S	F
Dreieck	0.577 S	0.289 S	1.732 R od. 3.463 r	0.433 S² od. 1.299 R²
Quadrat	0.707 S	0.500 S	1.414 R „ 2.000 r	1.000 S² „ 2.000 R²
Fünfeck	0.851 S	0.695 S	1.176 R „ 1.453 r	1.721 S² „ 2.378 R²
Sechseck	1.000 S	0.866 S	1.000 R „ 1.155 r	2.598 S² „ 2.598 R²
Siebeneck	1.152 S	1.038 S	0.868 R „ 0.963 r	3.364 S² „ 2.736 R²
Achteck	1.307 S	1.208 S	0.765 R „ 0.828 r	4.828 S² „ 2.828 R²
Neuneck	1.462 S	1.374 S	0.684 R „ 0.728 r	6.182 S² „ 2.892 R²
Zehneck	1.618 S	1.540 S	0.618 R „ 0.649 r	7.694 S² „ 2.939 R²
Elfeck	1.775 S	1.704 S	0.563 R „ 0.587 r	9.366 S² „ 2.973 R²
Zwölfeck	1.932 S	1.866 S	0.518 R „ 0.536 r	11.190 S² „ 3.000 R²

E. Pochon

Fig 13

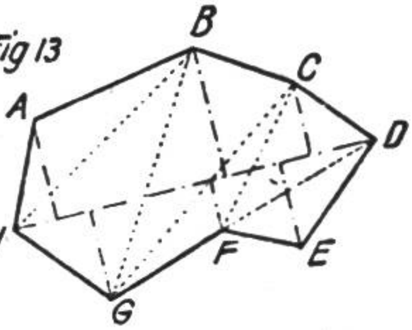


Fig 14

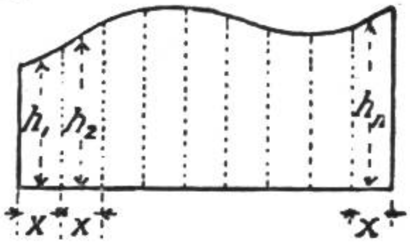


Fig 15

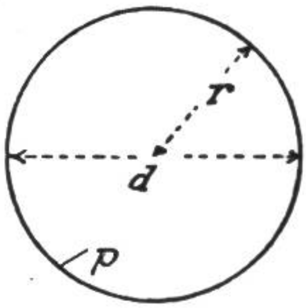


Fig 16

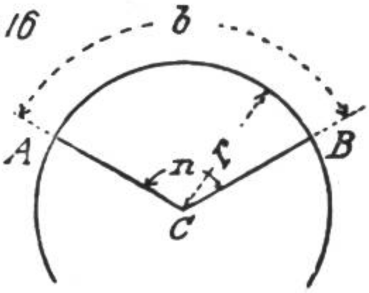


Fig 17

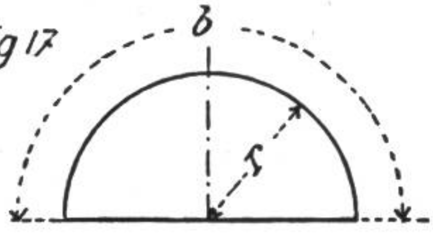
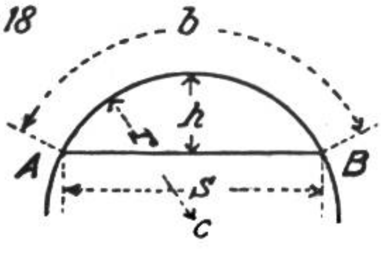


Fig.18



Unregelmassige Vielecke od. Flachen:

Die Fläche kann bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittelst Diagonalen und Summierung der ermittelten Dreiecksflächen, oder durch Einteilung in Trapeze u. Dreiecke vermittelst der Koordinaten der Eckpunkte auf eine rechtwinklig gewählte Axe Fig 13.

Durch Zerlegung in parallele Streifen gleicher Breite Fig. 14

$$F = x.(h_1 + h_2 + \ldots\ldots\ldots h_n)$$

Kreis:

Durchmesser = d; Radius = r
Umfang = p; Inhalt = F

$$p = d.\pi = d.3{,}14159$$
$$= 2r\pi;$$
$$F = \frac{d^2\pi}{4} = 0{,}785\,d^2 = r^2\pi.$$
$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}564\sqrt{F};$$
$$d = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1{,}128\sqrt{F}.$$

Kreissektor: (ABC) Fig 16

Radius = r; Bogen = b;
Zentriwinkel = n;

$$F = \frac{r^2\pi . n}{360} = \frac{b.r}{2}$$
$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}\cdot\frac{360}{n}} = \frac{b}{\pi}\cdot\frac{180}{n};$$
$$n = 360\frac{F}{r^2\pi} = \frac{b}{r\pi}\cdot 180$$
$$b = 2r\pi\cdot\frac{n}{360} = r\pi\cdot\frac{n}{180}.$$

Halbkreis: Bogen = $b = \pi.r$; Fläche = $F = \frac{\pi.r^2}{2}$

Viertelkreis: Bogen = $b = \frac{\pi.r}{2}$; Fläche = $F = \frac{\pi.r^2}{4}$

Kreisabschnitt: Fig.18

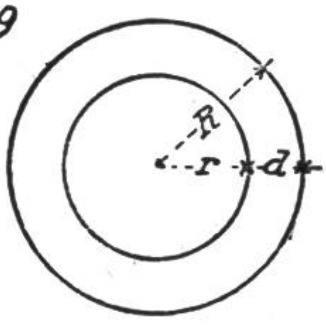
Sehne = s, Höhe = h, $F = \frac{2}{3}s.h$;

genau $F = \frac{r^2\pi n}{360} - \frac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{br - s.(r-h)}{2}$

$$s = 2\sqrt{h(2r-h)};\quad r = \frac{s^2}{8h} - \frac{h}{2}.$$

E. Pochon

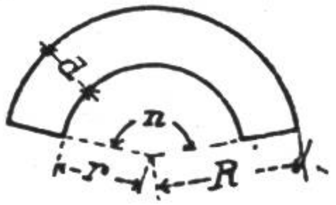
Fig. 19



Kreisring:

Aeusserer Radius $= R$,
Innerer Radius $= r$,
$F = R^2\pi - r^2\pi$.
$= \pi.(R+r).(R-r)$.
wenn d = radiale Breite des Kreisrings
so ist $F = \pi.(2r+d).d$.

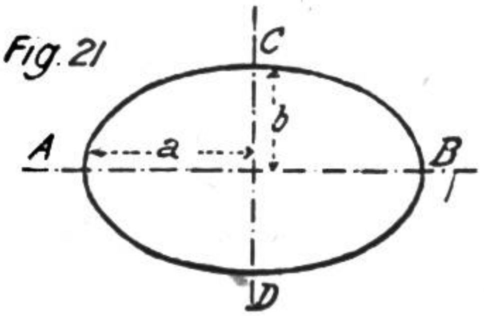
Fig. 20



Kreisringstück: (Konzentrisch)

Aeusserer Radius $= R$,
Innerer Radius $= r$,
Zentriwinkel $= n$, radiale Breite $= d$
$F = (R^2\pi - r^2\pi)\frac{n}{360} = (R^2 - r^2).\frac{\pi.n}{360}$
$= (R+r)d\frac{\pi.n}{360} = = (R+r)d.n.0.0087$

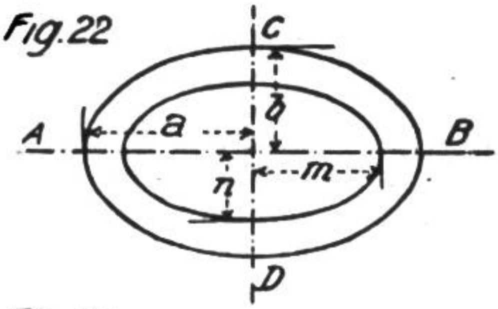
Fig. 21



Ellipse:

Halbe Achsen der Ellipse $= a$ und b,
$F = a.b.\pi$;

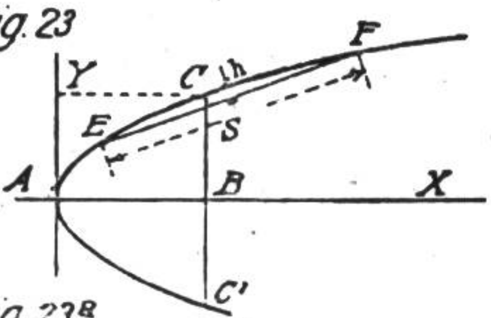
Fig. 22



Elliptischer Ring:

Halbe Achsen der äussern Ellipse $= a, b$
Halbe Achsen der innern Ellipse $= m, n$
$F = \pi.(a.b - m.n)$.

Fig. 23



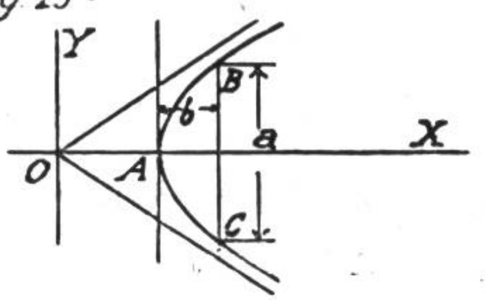
Parabelsegment ECF:

$F = \frac{2}{3} s.h$; $s = \overline{EF}$;

Parabelfläche CAC':

$F = \frac{2}{3}\overline{CC'}.\overline{AB}$;

Fig. 23a

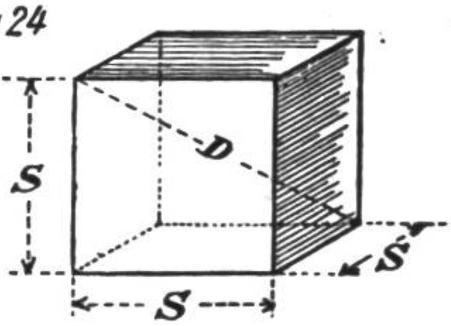


Hyperbelsegment ABC:

Sehne $= a$; Höhe $= b$
F(annähernd) $= \frac{3}{5} b.a$;

E. Pochon

Fig. 24



Würfel:

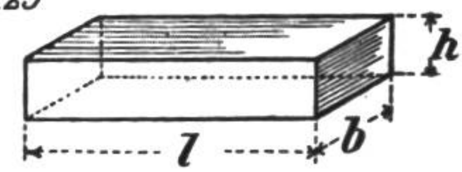
Seite = S, Inhalt = K, Oberfläche = O

$K = S^3$; $O = 6S^2$;

$S = \sqrt[3]{K}$

Diagonale $= D = \sqrt{3S^2} = S\sqrt{3} =$
$S \cdot 1{,}732050$

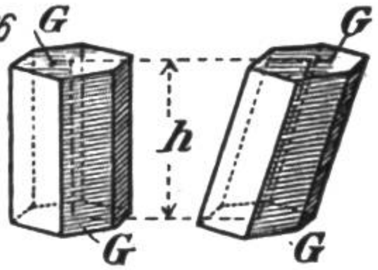
Fig. 25



Parallelflach:

Länge = l, Breite = b, Höhe = h,
Inhalt = $K = l.b.h$.
Oberfläche $= O = 2.(l.b + l.h + b.h)$

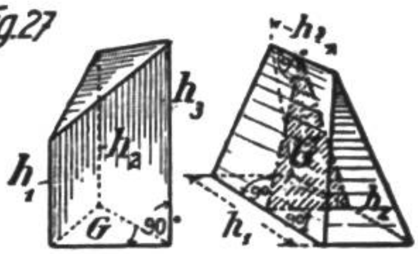
Fig. 26



Prisma:

Grundfläche = G, Höhe = h;
Inhalt $= K = G.h$.
Oberfläche O = Umfang der Grundfläche $U \times h + 2G$.

Fig. 27

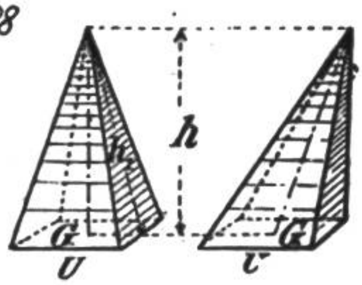


Schiefabgeschnittenes Prisma:

Flächeninhalt des senkrechten Querschnittes = G.
Länge der Kanten = $h, h_2, h_3, \ldots\ldots h_n$.
Inhalt $K = G.\dfrac{h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots h_n}{n}$

Bei mehr als 3 Kanten ist das Prisma regelmässig oder hat dasselbe wenigstens Axensymetrie.

Fig. 28

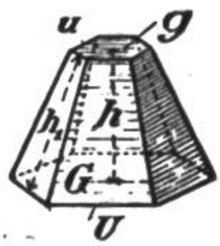


Pyramide:

Grundfläche = G, Höhe = h,
$K = \dfrac{G.h}{3}$; $h = \dfrac{3K}{G}$, $G = \dfrac{3K}{h}$,

Mantel M = Umfang der Grundfläche $U \times \dfrac{h_1}{2}$;
Oberfläche $O = M + G$

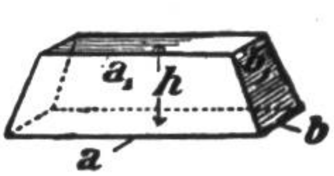
Fig. 29



Abgestumpfte Pyramide:

Parallele Endflächen = G, g, ihr Abstand = h.
ihre Umfänge U, u. Mantel $M = \dfrac{U+u}{2}.h_1$,
$K = \dfrac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg})$; $O = M + G + g$.

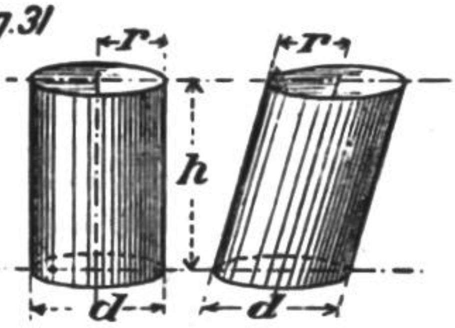
Fig. 30



Obelisk, Wall, (regelmässig aufgeschütteter Haufen)

$K = \frac{1}{6}h\left[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1\right]$

Fig. 31



Cylinder (Walze)

Radius = r, Durchmesser = d, Höhe = h

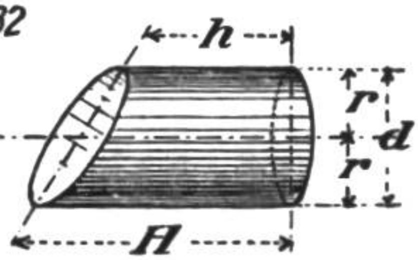
Inhalt $K = r^2 \pi . h$ oder $\frac{d^2}{4} \pi . h$

$r = \sqrt{\frac{K}{\pi h}}$; $h = \frac{K}{r^2 \pi}$.

Mantel = $2 r \pi . h$ oder $d \pi h$.

Oberfläche = $2 r \pi . (r + h)$ oder $d \pi . (\frac{d}{2} + h)$.

Fig. 32



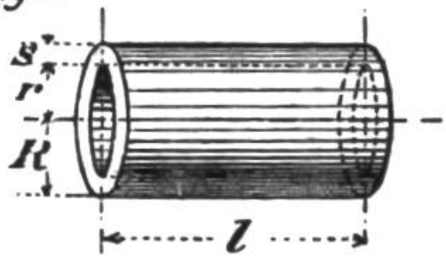
Schiefabgeschnittener Cylinder.

Grösste Höhe = H, kleinste Höhe = h,

Inhalt $K = r^2 \pi . \frac{H+h}{2}$ oder $\frac{d^2}{4} \pi . \frac{H+d}{2}$

Mantel = $r \pi (H + h)$

Fig. 33



Hohlcylinder (Rohr):

Innerer Radius = r,

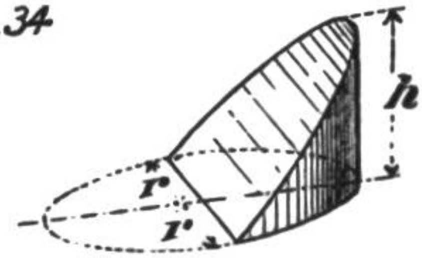
Äusserer Radius = R, Länge = l,

Wandstärke = s = $R - r$,

Inhalt $K = \pi . l . (R^2 - r^2)$, oder

$K = \pi . l . s\, (2R - s)$ oder $\pi . l . s\, (2r + s)$.

Fig. 34



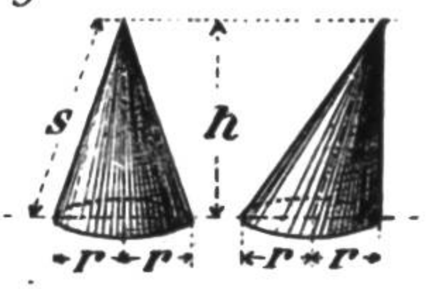
Cylinderhuf:

Radius der Grundfläche = r,

Höhe des Hufes = h, Mantel = $2 r . h$.

Inhalt: $K = \frac{2}{3} r^2 h$.

Fig. 35



Kegel:

Radius der Grundfläche = r.

Höhe = h. Seite = s = $\sqrt{r^2 + h^2}$,

Mantel $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ oder $\pi . r . s$,

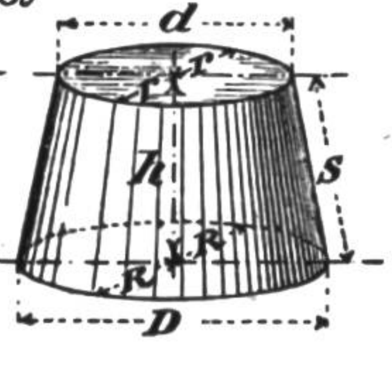
Oberfläche = $\pi . r^2 + r \pi . s$ oder $r \pi (r + s)$

oder = $\pi r . (r + \sqrt{r^2 + h^2})$.

Inhalt $K = \frac{1}{3} r^2 \pi . h$,

$r = \sqrt{\frac{3K}{\pi . h}}$; $h = \frac{3K}{r^2 \pi}$.

Fig. 36



Abgestumpfter Kegel:

Radien der parallelen Endflächen = R und r,

Durchmesser = D und d, Höhe = h, Seite = s,

Inhalt $K = \frac{1}{3} \pi h . (R^2 + Rr + r^2)$

$= \pi . h \left(\frac{D^2 + Dd + d^2}{12} \right)$

Mantel $M = \pi s (R + r)$.

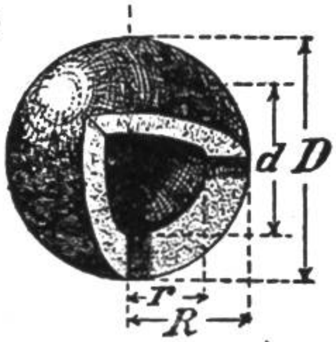
A. Pochak

Fig. 37

Kugel:

Radius $= r$, Durchmesser $= d$,
Oberfläche $O = 4r^2\pi = 12{,}566\, r^2$, oder $d^2\pi$.
Inhalt $K = \frac{4}{3} r^3 \pi = 4{,}189\, r^3$, $K = \frac{O \cdot r}{3}$,
» $K = \frac{d^3\pi}{6} = 0{,}5236 \cdot d^3$,
Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$; $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$

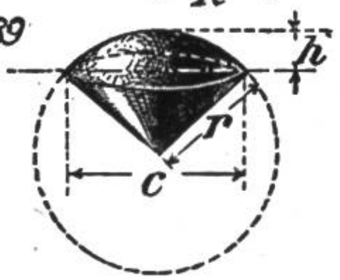
Fig. 38



Hohlkugel:

Aeusserer Radius $= R$, innerer $= r$,
Aeusserer Durchmesser $= D$, innerer $= d$,
Inhalt $K = \frac{4\pi}{3} \cdot (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$.

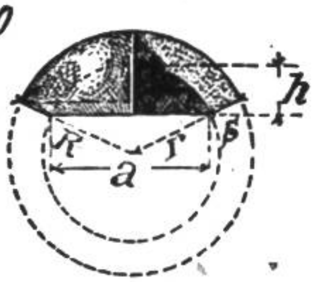
Fig. 39



Kugelsektor:

Radius der Kugel $= r$
Begrenzende Kalotte, Höhe $= h$, Durchm. $= c$,
Oberfläche $O = \frac{\pi r}{2}(4h + c)$
Inhalt $K = \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot h = 2{,}0944\, r^2 h$.

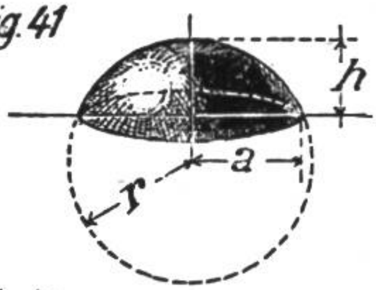
Fig. 40



Hohlkugelsektor:

Aeusserer Radius $= R$ innerer $= r$
Wanddicke $= R - r = s$, $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$
Inhalt $K = 2{,}094 \frac{h}{r}(R^3 - r^3)$.

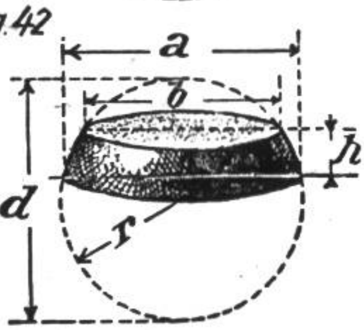
Fig. 41



Kugelsegment (Kugelkalotte):

Radius der Kugel $= r$,
Radius der Grundfläche $= a$,
Höhe der Kalotte $= h$,
Oberfläche $= O = 2\pi r h = \pi (a^2 + h^2)$
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + h^2)$ oder
$= \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$.

Fig. 42

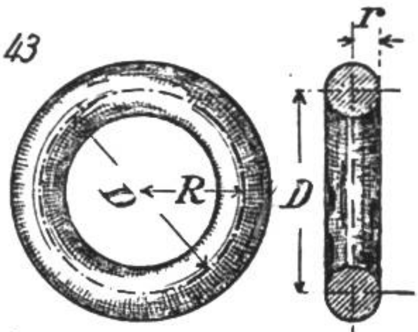


Kugelzone:

Höhe der Zone $= h$, Radius der Kugel $= r$
Durchmesser der Endflächen $= a$ und b,
Mantel $M = 2r\pi h$, Oberfläche $O = M + \frac{a^2\pi}{4} + \frac{b^2\pi}{4}$.
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$.

E. Pochon

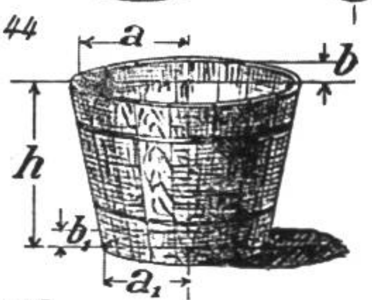
Fig. 43



Cylindrischer Ring:

Radius des kreisförmigen Querschnittes = r,
Durchmesser des Ringes = D, Radius = R,
Inhalt $K = 2\pi^2 R r^2 = 2,467\, D d^2$.
Oberfläche $O = 4\pi^2 R r = 9,87\, D d$.

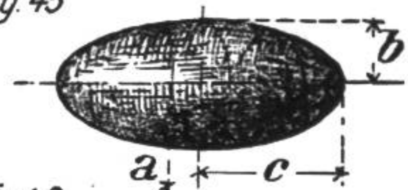
Fig. 44



Kübel.

Die unter sich parallelen Endflächen sind Ellipsen mit den Halbachsen a b und $a_1 b_1$, Höhe zwischen den Endflächen = h.
Inhalt $K = \frac{1}{6}\pi h\left[2(ab + a_1 b_1) + a b_1 + a_1 b\right]$.

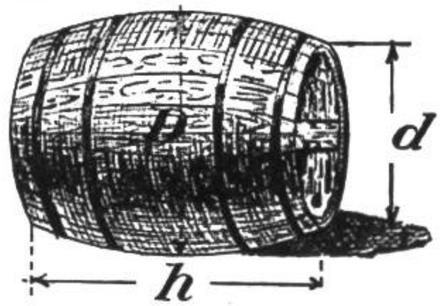
Fig. 45



Ellipsoid:

Bezeichnung der 3 Halbachsen = a. b, c.
Inhalt $K = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$.

Fig. 46

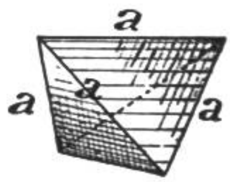


Fass.

Spunddurchmesser = D,
Bodendurchmesser = d,
Höhe (resp. Länge) = h,
Inhalt $K = 1,0453\, h\,(0,4 D^2 + 0,2 D d + 0,15 d^2)$.

Reguläre Polyeder:

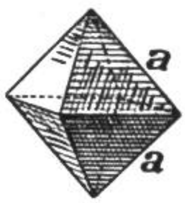
Fig. 47



Tetraeder: (4 gleichseitige Dreiecksflächen)

Länge der Kante = a, Oberfl. $O = a^2\sqrt{3} = 1,732\, a^2$
Inhalt $K = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} = 0,11785\, a^3$

Fig. 48



Oktaeder: (8 gleichseitige Dreiecksflächen)

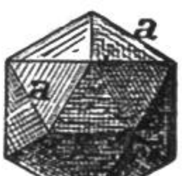
Kante = a, Oberfl. $O = 2a^2\sqrt{3} = 3,464116\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{3}\sqrt{2} = 0,4714045\, a^3$.

Fig. 49

Dodekaeder: (12 regelmässige Fünfecke)

Kante = a, $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20,645729\, a^2$
Inhalt $K = \frac{a^3}{4} \cdot (15 + 7\sqrt{5}) = 7,663119\, a^3$.

Fig. 50



Ikosaeder: (20 gleichseitige Dreiecksflächen)

Kante = a, $O = 5a^2\sqrt{3} = 8,6602545\, a^2$.
Inhalt $K = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5}) = 2,181695\, a^3$.

E. Pochon