

<b>Zeitschrift:</b>	Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Astronomische Gesellschaft
<b>Band:</b>	61 (2003)
<b>Heft:</b>	316
<b>Artikel:</b>	Planeten-, Kometen-, und Satellitenbahnen
<b>Autor:</b>	Beutler, Gerhard
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-898403">https://doi.org/10.5169/seals-898403</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Planeten-, Kometen- und Satellitenbahnen

GERHARD BEUTLER

Der Artikel gibt eine Übersicht über Fragestellungen der modernen Himmelsmechanik des Planetensystems und des erdnahen Raumes. Drei Themenkreise werden entwickelt und durch Computer-Simulationen illustriert:

1. Unser Planetensystem ist etwa 4.5 Milliarden Jahre alt, was auf eine bemerkenswerte Stabilität deutet (jedenfalls verglichen mit der Stabilität politischer Systeme auf der Erde). Ob das System als Ganzes tatsächlich stabil ist, kann heute nicht abschliessend beurteilt werden. Numerische Experimente zeigen, dass es im Planetensystem Instabilitäten und chaotisches Verhalten gibt.
2. Das Dreikörperproblem ist nach dem Zweikörperproblem scheinbar die «zweit-leichteste» Aufgabe der Himmelsmechanik – und trotzdem ist sie in geschlossener Form schon dann nicht lösbar, wenn alle Himmelskörper als Punktmassen genähert werden. Hier wird eine Einführung in das Dreikörperproblem Erde-Mond-Sonne gegeben, bei dem Erde und Mond als Körper endlicher Größe angenommen werden. Die Lösung der Aufgabe erfordert damit nicht nur eine Bahncharakterisierung, sondern auch die Beschreibung der Rotation von Erde und Mond. Kenndaten und moderne Erkenntnisse der Erd- und Mondrotation werden anhand numerischer Experimente erläutert.
3. Die Raumfahrt hat für die Himmelsmechanik, aber auch für die astronomische Positionsbestimmung und Navigation, eine neue Ära eingeläutet. Heute wird nicht mehr mit Sextanten und Chronometern navigiert, sondern mit Satellitensystemen. Etwas überspitzt kann man sagen, dass künstliche Erdsatelliten die Sterne als «Leuchtfelder» abgelöst haben. Allerdings muss man dazu die Bahnen dieser künstlichen Erdsatelliten sehr genau bestimmen und voraussagen können. Die wichtigsten Bahn-Charakteristiken künstlicher Erdsatelliten werden anhand von numerischen Simulationen illustriert.

## Präambel: Klassische und moderne Hilfsmittel der Himmelsmechanik

*Die klassischen Bahnelemente:* Es ist ein zentrales Anliegen der Fundamentalastronomie, die Bahnen von Planeten, Kometen, und Satelliten unseres Sonnensystems mit möglichst wenigen Kenngrössen zu beschreiben und zu präzidieren. Es war eine epochale Leistung von JOHANNES KEPLER (1571-1630) zu zeigen, dass jede Planetenbahn mit nur sechs Bahnelementen beschrieben werden kann. Figur 1 illustriert einen von mehreren Sätzen von Bahnelementen, nämlich

- die Halbachse  $a$ ,
- die numerische Exzentrizität  $e$ ,
- die Neigung  $i$  der Bahnebene,
- die ekliptikale Länge  $\Omega$  des aufsteigenden Knotens,
- der Abstand  $\omega$  des Perihels vom Knoten sowie
- die Periheldurchgangszeit  $T_0$ .

*Die Bewegungsgleichungen des Planetensystems:* Es war eine ebenso fundamentale Einsicht von ISAAC NEWTON (1643-1727), dass die Bahnen der Himmelskörper durch differentielle mathematische Beziehungen beschrieben werden können und dass die Massenanziehung zwischen zwei beliebigen Massenelementen dem Gesetz der universellen Gravitation genügt.

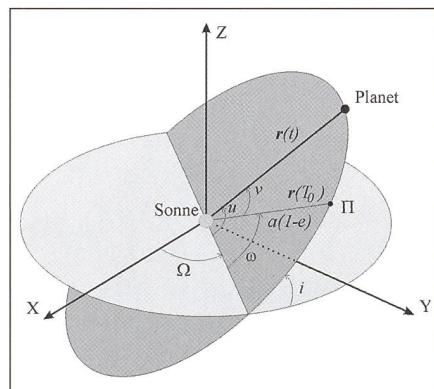


Fig. 1: Keplersche Bahnelemente.

Das zweite Newtonsche Axiom besagt, dass die Änderung der Bewegung (in heutiger Sprechweise die erste Ableitung des Impulses nach der Zeit) der vektoriellen Summe der wirkenden Kräfte gleichzusetzen ist. Dieses zweite Gesetz kann interpretiert werden als Bewegungsgleichung – nicht algebraisch, sondern in Worten ausgedrückt.

Das Newtonsche Gesetz der universellen Gravitation besagt bekanntlich, dass die Anziehungskraft zwischen zwei Körpern längs ihrer Verbindungslinie wirkt, den beiden Massen direkt, und dem Quadrat ihres Abstandes indirekt proportional ist.

Beim klassischen planetaren N-Körperproblem werden nur Punktmassen betrachtet. In einem Inertialsystem (z.B. im Schwerpunktssystem des Sonnensystems) wird unser (jedes) Planetensystem mathematisch durch ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in der Zeit  $t$  beschreiben:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \cdot \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} := \mathbf{f}_i, \quad i=1,2,\dots,N \quad (1)$$

Dabei ist das Quadrat der sog. Gaußschen Konstanten  $k=0.01720209\ 895$

gleich der Gravitationskonstanten, wobei man als Zeiteinheit den Tag, als Masseeinheit die Sonnenmasse und als Längeneinheit (im Wesentlichen) die astronomische Einheit verwendet.

Eine partikuläre Lösung des Systems ist definiert, wenn die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren sämtlicher beteiligter Himmelskörper zu einem Zeitpunkt  $t_0$  vorgegeben sind. Die Bewegungsgleichungen wurden erstmals von LEONHARD EULER (1707-1783) in der noch heute verwendeten Form (allerdings in Komponentenschreibweise) niedergeschrieben.

Ist die Zahl der Himmelskörper  $N=2$ , bewegen sich die beiden Punktmassen auf Kegelschnitt-Bahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt und umeinander (d.h., dass sowohl  $\mathbf{r}_1(t)$ ,  $\mathbf{r}_2(t)$  als auch  $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$  Kegelschnitte darstellen). Aus jedem Satz von Orts- und Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{r}(t)$  und  $\mathbf{v}(t)$  können dann die Keplerschen Bahnelemente mit Formeln, die im Wesentlichen schon auf KEPLER zurückgehen, berechnet werden.

*Numerische Integration als universale Lösungsmethode:* Ist die Zahl der Himmelskörper  $N>2$ , resultieren (möglichlicherweise) sehr komplizierte Bahnen. Jedenfalls gelingt die Lösung des Systems (1) im Allgemeinen nicht mehr in geschlossener Form. Bei gegebenen Anfangsbedingungen kann dieses aber mit den Methoden der numerischen Integration «mit beliebiger Genauigkeit» gelöst werden.

Die «Urversion aller Methoden zur numerischen Integration» ist die Eulerische Methode, welche ein Integrationsintervall  $[t_0, t_n]$  durch die Teilpunkte  $t_k$  in Teilintervalle (z. B. gleicher Länge) unterteilt und innerhalb eines Teilintervalls  $[t_k, t_{k+1}]$  die Lösung durch das folgende Polynom zweiten Grades (entsprechend einer Taylorreihe der Ordnung 2) approximiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(t) &= \mathbf{r}_i(t_k) + (t-t_k) \cdot \mathbf{v}_i(t_k) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (t-t_k)^2 \cdot \mathbf{f}_i(t_k), \text{ für } t \in [t_k, t_{k+1}] \end{aligned} \quad (2)$$

EULER verwendete die Formel (2) insbesondere, um an der Stelle  $t_{k+1}$  neue Anfangsbedingungen, d.h., die Vektoren  $\mathbf{r}_i(t_{k+1})$  und  $\mathbf{v}_i(t_{k+1})$  zu bestimmen. Den Geschwindigkeitsvektor erhält man natürlich durch Ableiten der Formel (1) nach der Zeit:

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}(t_k) + (t-t_k) \cdot \mathbf{f}_i(t_k) \quad (3)$$

Damit aber ist die universale Eulersche Lösungsmethode gegeben: Beginnend mit den Anfangsbedingungen kann man mit Hilfe der Differentialgleichungen (1) die Lösung stückweise durch ein Polynom zweiten Grades darstellen. Die Eulersche Lösungsmethode hat zwei bemerkenswerte Eigenschaften:

- Entgegen einer weitverbreiteten Meinung liefert die Eulersche Methode eine approximierende Funktion als Lösung: die Formeln (2) und (3) erlauben es, Funktionswerte und deren Ableitungen an jeder beliebigen Stelle (und nicht nur an den Teilpunkten  $t_k$ ) zu berechnen.
- Durch eine feinere Unterteilung erreicht man eine genauere Lösung.

Moderne Integrationsmethoden, die diesen Namen verdienen, teilen diese Eigenschaften mit der Eulerschen Methode. Sie unterscheiden sich lediglich darin von der Eulerschen Methode, dass die Lösungen lokal durch Polynome (Taylorreihen) höheren als zweiten Grades (Ordnung) approximiert werden (typischerweise werden Polynome vom Grad  $q=10-14$  verwendet). Der Polynomgrad wird vom Benutzer festgelegt. Die Polynomkoeffizienten werden durch die Forderung festgelegt, dass die approximierende Funktion das Differentialgleichungssystem (1) lokal nicht nur (wie bei der Eulerschen Methode) an einer, sondern an mehreren Stellen erfüllt. Moderne Methoden sind um viele Größenordnungen effizienter als die Eulersche Methode. Die bekannten Vielschrittverfahren und die sogenannten Kollokationsverfahren sind Vertreter dieser Klasse von Integrationsverfahren. Für Einzelheiten verweisen wir auf [1].

**Oskulierende und mittlere Bahnelemente:** Die numerisch integrierten Lösungen des Differentialgleichungssystems (1) sind approximierende Funktionen, die es uns erlauben, die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren (sowie bei Bedarf höherer Ableitungen) sämtlicher beteiligter Himmelskörper zu beliebigen Zeitpunkten innerhalb des durch die Integration überdeckten Intervalls zu berechnen.

Selbstverständlich ist es auch möglich, Funktionen dieser Vektoren zu berechnen. Instruktiv ist es insbesondere, eine Tabelle sogenannter *oskulierender Bahnelemente zu bestimmten Zeitpunkten  $t_k$ ,  $k=1,2,\dots$*  zu berechnen. Oskulierende Bahnelemente zur Zeit  $t$  erhält man, indem man mit den Formeln des Zweikörperproblems die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren umrechnet in die Bahnelemente:

$$r(t); v(t) \rightarrow a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), T_0(t) \quad (4)$$

Die oskulierenden Bahnelemente sind einfach zu interpretieren: Der betrachtete Himmelskörper würde sich auf der durch die auf der rechten Seite von (4) stehenden Bahnelemente definierten Kepler-Bahn bewegen, wenn vom Zeitpunkt  $t$  an die gravitative Wirkung sämtlicher Himmelskörper (mit Ausnahme von zweien) ausgeschaltet würde.

Hat man eine Tabelle von oskulierenden Bahnelementen erstellt, kann man die zeitliche Entwicklung der Bahnen studieren. Die tatsächliche Bahn ist die Enveloppe der durch die Elemente (4) gegebenen Zweikörperbahnen. Dies ist sehr viel instruktiver und einleuchtender, als direkt die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zu analysieren – es käme keinem Himmelsmechaniker in den Sinn, direkt die Zustandsvektoren zu interpretieren.

Die oskulierenden Bahnelemente zeigen periodische Störungen verschiedenster Perioden. Die kürzesten sind gegeben durch die (ungestörten) Umlaufzeiten der Himmelskörper selber. Will man die Entwicklung eines Systems über sehr lange Zeit studieren (über Tausende von Umläufen), ist man im allgemeinen gut beraten, *mittlere Bahnelemente* als Mittelwerte der oskulierenden Elemente über längere Zeitintervalle zu bilden. Man erhält dann ein sehr viel besseres Bild der Entwicklung einer Bahn über lange Zeiträume. Als Mittlungsperioden verwendet man mit Vorteil die Umlaufzeiten der betrachteten Himmelskörper oder ganzzahlige Vielfache davon.

**Das Programmsystem Celestial Mechanics:** In diesem Artikel möchten wir einige wichtige Aspekte der Himmelsmechanik mit Hilfe numerischer Experimente behandeln, resp. illustrieren. Dazu verwenden wir das vom Autor entwickelte Programmsystem *Celestial Mechanics*, das dem Buch [1] beigegeben ist. Das Programmsystem umfasst acht Programme, zwei Testprogramme für numerische Integration, ein Programm zur Fourieranalyse, eines für Bahnbestimmung (für Erdsatelliten und

Kleinplaneten, Kometen, etc.), eines zur kinematischen Bestimmung der Bahn eines Satelliten mit Hilfe von GPS-Messungen (GPS=Global Positioning System), das Programm PLASYS zur Integration des Planetensystems, das Programm ERDROT zur Beschreibung der Rotation von Erde und Mond, sowie das Programm SATORB, mit welchem unter anderem Bahnen künstlicher Erdsatelliten simuliert werden können. Mit den drei letztgenannten Programmen wurden die meisten Figuren in diesem Artikel erzeugt.

Das Programmsystem ist konzipiert für Personal Computer (PC) mit Windows-Betriebssystemen. Um das Programmsystem effizient einzusetzen, ist ein leistungsfähiger PC mit einer Taktfrequenz von 500 MHz (oder mehr) und einer Speicherkapazität in der Größenordnung einiger Gbytes sinnvoll.

### Numerische Experimente im Planetensystem

**Das Programm PLASYS:** Sämtliche Simulationen in diesem Abschnitt wurden mit dem Programm PLASYS (siehe [1]) durchgeführt, das es erlaubt, unser Planetensystem zu konfigurieren (eine beliebige Auswahl der neun grossen Planeten sowie ein Kleinplanet mit wählbaren Bahnelementen können eingeschlossen werden) und, ausgehend von der Gegenwart (auch der genaue Ausgangszeitpunkt kann gewählt werden), vorwärts oder rückwärts über «beliebige Zeitintervalle» zu integrieren.

PLASYS erzeugt eine Datei mit Planetenpositionen sowie eine Datei mit Integrationskonstanten (zu Kontrollzwecken), die entweder mit dem mitgelieferten Grafik-System oder mit irgend einem Graphik-Programm dargestellt werden können. Durch Darstellung der Planetenpositionen erhält man einen Eindruck vom Verlauf der Planeten- und Planetoidenbahnen. Figur 2 zeigt die Positionen der Planeten Jupiter (innerster Ring), Saturn (zweiter Ring von innen), Uranus (dritter Ring), Neptun (vierter Ring), sowie Pluto (äußerster «Ring») bei einer Integration des äusseren Planetensystems über die nächste Million Jahre. Die Integration erfolgte mit einem Vielschrittverfahren der Ordnung  $q=14$  für Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Schrittweite betrug 30 Tage.

Für jeden Himmelskörper werden zusätzlich entweder die sechs oskulierenden oder die sechs mittleren Bahnelemente als Funktion der Zeit in je eine Datei abgespeichert. Werden mittlere Elemente gespeichert, muss die Mittlungsperiode (in Einheiten der unge-

störten Umlaufszeiten) angegeben werden. Die gespeicherten Elemente können dann mit einem eigens entwickelten oder einem beliebigen anderen Graphik-Programm dargestellt werden. Sämtliche Darstellungen in diesem Artikel sind mit dem sogenannten «gnu-plot» System erzeugt worden.

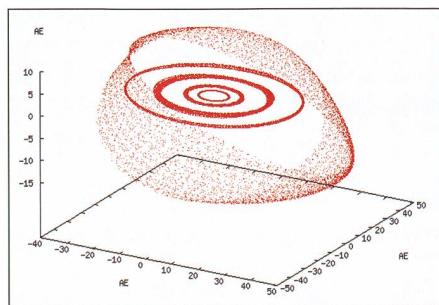


Fig. 2: Das äussere Planetensystem über eine Million Jahre.

*«Sinnvolle» numerische Experimente:* Das Programm PLASYS erlaubt es, eine ganze Palette von numerischen Experimenten zum Thema Entwicklung des Planetensystems anzustellen. Wir erwähnen nur deren drei, die im folgenden kurz gestreift werden sollen:

- Entwicklung des äusseren Planetensystems über einige Millionen Jahre.
- Entwicklung des inneren Planetensystems über einige 100000 Jahre.
- Entwicklung spezieller Planetoidenbahnen

Das Attribut «sinnvoll» ist vielleicht etwas provokativ. Man kann natürlich aus jeder Simulation etwas lernen. Man sollte aber vor der Simulation präzise Fragen stellen und diese dann mit gezielten numerischen Experimenten beantworten. Hier wollen wir zeigen, dass die mechanische Entwicklung des äusseren Systems im Wesentlichen durch die Planeten Jupiter und Saturn geprägt ist. Zudem werden wir die Frage nach der Stabilität des Planetensystems kurz anschneiden. Das innere Planetensystem ist geprägt durch das Wechselspiel zwischen den Planeten Venus und Erde. Wir gehen auf einige Klima-relevante Aspekte bei der Erde ein. Mit unserer Analyse von Kleinplanetenbahnen wollen wir illustrieren, wie man sich heute den Transfer von Materie vom äusseren ins innere Planetensystem vorstellt. Diese neuen Vorstellungen sind in den 1980er Jahren wesentlich von numerischen Experimenten geprägt worden.

*Die Entwicklung des äusseren Planetensystems:* Figur 2 deutet an, weshalb sich die IAU (Internationale Astronomische Union) schwer tut, den Planeten

Pluto als Hauptplaneten zu akzeptieren. Seine Neigung gegenüber der (momentanen) Ekliptikebene ist mit etwa  $17^\circ$  deutlich grösser als die der übrigen Planeten (die nächst kleinere Neigung ist die von Merkur mit  $7^\circ$ ). Zudem ist Pluto's Exzentrizität mit  $e=0.25$  so gross, dass ein Teil seiner Bahn innerhalb der fast kreisförmigen Bahn von Neptun verläuft. Dass sich Pluto bisher trotzdem in seiner Bahn behaupten konnte, hängt damit zusammen, dass seine Umlaufszeit sich zu derjenigen von Neptun wie 3:2 verhält. Damit finden die nahen Begegnungen (von der Sonne aus gesehen die Konjunktionen) der beiden Planeten genähert immer im gleichen Gebiet statt. Pluto hat es so eingerichtet, dass die Konjunktionen immer in der Nähe seines Aphels stattfinden. Sämtliche numerischen Experimente (ähnlicher Art wie unseres) deuten darauf hin, dass sich Pluto auf einer stabilen Bahn befindet. Mit einer Integration über eine Million Jahre kann natürlich abschliessend nur festgestellt werden, ob sich ein Planet während dieses Zeitintervalls in einer stabilen Bahn befand. Anhand der erzielten Resultate lassen sich über ein zehn mal längeres Zeitintervall allenfalls Prognosen (wie beim Wetter) abgeben. Damit ist aber auch angedeutet, warum man versucht, das Planetensystem über immer längere Zeitintervalle zu integrieren. Heute darf man mit einiger Sicherheit behaupten, dass unser System mindestens über Zeiträume von etwa einer Milliarde Jahre keine offensichtliche Instabilität zeigt.

Weitaus der grösste Teil der Masse, der Energie und des Drehimpulses des Planetensystems ist im Dreikörperproblem *Sonne Jupiter* (mit einer Tausendstel Sonnenmasse) *Saturn* (mit einer Dreitausendstel Sonnenmasse) enthalten. Man darf also davon ausgehen, dass die mechanische Entwicklung des Planetensystems durch dieses Dreikörperproblem geprägt ist. Experimente der hier vorgestellten Art bestätigen dies eindeutig. So zeigt beispielsweise Figur 3 (ein Ausschnitt, der die Entwicklung der mittleren Halbachsen über die nächsten zehntausend Jahre zeigt), dass die Bahnhalbachsen von Jupiter und Saturn fast zu 100% antikorreliert sind (wenn die Halbachse von Jupiter maximal ist, ist diejenige von Saturn minimal und umgekehrt). Die Periode der Änderungen beträgt im Mittel etwa 940 Jahre. Da die Halbachse einer Planetenbahn die mittlere Bewegung festlegt, werden durch diese Störungen in der Halbachse sehr grosse Störungen in der ekliptikalalen Länge der Planeten induziert. Der Effekt ist unter der Bezeichnung *grosse Ungleichheit* in der Himmelsmechanik wohlbekannt. Er wurde von PIERRE SIMON DE LAPLACE

(1749-1827) als langperiodische Störung, verursacht durch die 5:2-Kommensurabilität der Umlaufszeiten von Jupiter und Saturn, erklärt. Es ist übrigens bis heute nicht geklärt, ob diese Kommensurabilität zufälliger Natur ist, oder ob es dafür einen Grund gibt. Figur 3 illustriert aber auch sehr schön den Energieerhaltungssatz: In guter Näherung kann die Gesamtenergie des Planetensystems berechnet werden als Summe der Zweikörperenergien der Planeten. Diese Zweikörperenergie ist aber ihrerseits indirekt proportional der Halbachse  $a$ . Vernachlässigt man die Massen aller übrigen Planeten (ausser denjenigen von Jupiter und Saturn), ist die Gesamenergie  $E$  des Systems zu nähern durch

$$E = -\frac{m_j}{2a_j} - \frac{m_s}{2a_s}$$

Durch die Forderung  $E=const.$  ergibt sich

$$\delta a_s = -\frac{m_j}{m_s} \cdot \frac{a_s^2}{a_j^2} \cdot \delta a_j = -11.2 \cdot \delta a_j$$

Diese Beziehung wird durch Figur 3 sehr schön bestätigt. Die Amplitudenvariationen in Figur 3 sind übrigens nicht etwa Integrationsfehlern zuzuschreiben. Diese sind durch die Störungen der übrigen Planeten verursacht. Mit ähnlichen Näherungen gelingt es, die Störungen in der Exzentrizität zu erklären durch die Erhaltung des Betrages des Drehimpulses. Auch die Störungen in den Exzentrizitäten von Jupiter und Saturn sind antikorreliert. Man kann mit demselben Experiment «beweisen», dass die Bahnebenen von Jupiter und Saturn um ein und dieselbe Achse mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit präzidieren (rotieren). Der Beobachter erhält also den Eindruck, dass die Bahnebenen von Jupiter und Saturn (fast) als starres Gebilde um ein und dieselbe Achse (die Achse des totalen Drehimpulses) rotieren – auch diese Eigenschaft eine Folge eines Erhaltungssatzes (für den Drehimpuls). Die numerischen Experimente zeigen, dass das äusserne Planetensystem, wie eingangs erwähnt, tatsächlich durch das Dreikörperproblem Sonne-Jupiter-Saturn geprägt ist. Für weitere Informationen sei auf [1] verwiesen.

*Entwicklung des inneren Planetensystems:* Das innere Planetensystem mit den erdähnlichen Planeten besteht aus Merkur, Venus, Erde und Mars. Von der Masse, der Energie und vom Drehimpuls her ist das Paar Venus – Erde ebenso dominant wie das Paar Jupiter – Saturn im äusseren System. Während die Eigenschaften des äusseren Systems sehr gut ohne das innere System studiert werden können, gilt sinngemäss dasselbe nicht für das innere System.

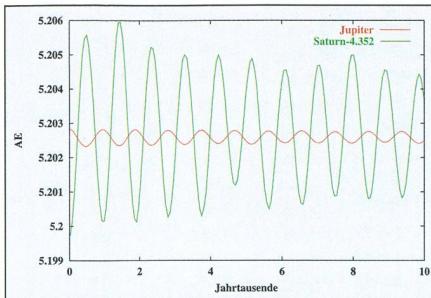
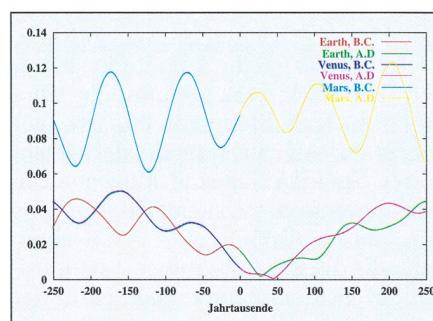


Fig. 3: Halbachsen von Jupiter (rot) und Saturn (grün) während der nächsten zehntausend Jahre.

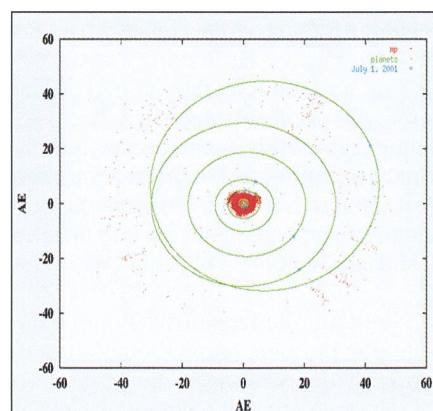
Würden wir das innere System ohne das äussere integrieren, könnten wir wesentliche Eigenschaften nicht verstehen. Die Integration des inneren Systems ist aufwendiger, da wir die Schrittweite der Integration dem schnellsten Planeten anpassen müssen. Selbst wenn wir den «Winzling» Merkur bei der Integration weglassen, müssen wir die Schrittweite der Integration auf fünf Tage reduzieren. Um zu sinnvollen Aussagen zu kommen, wurden bei der Integration sämtliche Planeten von Venus bis Neptun eingeschlossen. Wir beschränken uns hier auf die Diskussion eines Resultates, nämlich der Entwicklung der Bahn-Exzentrizitäten von Venus, Erde und Mars über die letzten und die nächsten 250 000 Jahre. Das Ergebnis findet man in Figur 4. Zunächst sieht man, dass die Halbachse von Mars wesentlich stärker durch die äusseren Planeten (insbesondere durch Jupiter) gestört wird als die Exzentrizitäten von Venus und Erde. Ähnlich wie beim Paar Jupiter-Saturn sieht man eine deutliche Antikorrelation der Exzentrizitäten, was zu interpretieren ist als Austausch von Drehimpuls zwischen den beiden inneren Planeten. Dem überlagert ist eine langperiodische Änderung, die den Exzentrizitäten beider Planeten gemein ist. Diese ist (wie man durch ein kleines Experiment sehr leicht nachweisen kann) durch die Störungen des äusseren Planetensystems verursacht. Man beachte, dass die momentane Exzentrizität der Erdbahn etwa  $e=0.016$  beträgt und dass diese während der nächsten etwa 30 000 Jahren fast bis auf  $e=0$  abnehmen wird. Vor etwas mehr als 200 000 Jahren hingegen betrug die Exzentrizität der Erdbahn mehr als  $e=0.04$ ! Solche Unterschiede können klimatisch durchaus von Bedeutung sein: Während bei einer fast kreisförmigen Bahn praktisch keine Winter-Sommer Asymmetrien auf den beiden Hemisphären auftreten können, sind bei grösseren Exzentrizitäten deutliche Unterschiede (je nach Lage des Perihels der Erdbahn) zu erwarten: Zum einen ist bei grösserer

Exzentrizität die von der Sonne erhaltene Strahlung im Perihel deutlich grösser als im Aphel (der relative Unterschied beträgt  $4e$ ), zum anderen werden die sonnen-näheren Teile der Bahn schneller durchlaufen als die sonnen-ferner. MILUTIN MILANKOVITCH (1879-1958) hat mit mässigem Erfolg versucht, die klimatischen Veränderungen auf der Erde himmelsmechanisch zu deuten. Figur 4 weist darauf hin, dass gewisse langperiodische Änderungen der Bahnelemente durchaus bedeutend sein können.

Fig. 4: Die Exzentrizitäten von Venus, Erde und Mars während der letzten und nächsten 250 000 Jahre.



*Die Bahnen von Kleinplaneten:* In der Neujahrsnacht des Jahres 1801 entdeckte GIUSEPPE PIAZZI (1746-1826) den ersten Kleinplaneten zwischen Mars und Jupiter. Der deutsche Mathematiker CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) begründete zum mindesten einen Teil seines Ruhmes auf der erfolgreichen Bestimmung der Bahn von Ceres aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen. Heute sind weit über 100 000 Kleinplaneten mit Umlaufszeiten zwischen denen von Mars und Jupiter gesichert. Zudem kennt man heute schon einige hundert Objekte im Kuiper-Gürtel im äusseren Planetensystem. Figur 5 gibt die Positionen sämtlicher gesicherter Kleinplaneten am 1. Juli 2001 sowie der Planetenpositionen wieder. Sehr deutlich ist der



Ring zwischen Mars und Jupiter zu sehen. Ebenso sieht man je eine Wolke von Kleinplaneten etwa  $60^\circ$  von Jupiter entfernt auf der Jupiterumlaufbahn. Es ist dies die Gruppe der Trojaner und der Griechen. Die Kleinplaneten haben sich um eine stabile Lösung des Dreikörperproblems herum «ansiedeln» können.

Figur 6 gibt einen besseren Eindruck von der Verteilung der Kleinplaneten zwischen Mars und Jupiter. Sie stellt die Anzahl der Kleinplaneten mit grossen Halbachsen in Intervallen der Breite von  $\Delta a=0.002$  AE dar. Diese Zahlen werden als Funktion der (aus der Halbachse berechneten) Umlaufszeit, in Einheiten der Umlaufszeit von Jupiter, dargestellt. Deutlich sieht man im Gürtel Häufungen, aber auch Lücken. Das Bild widerspricht intuitiven Erwartungen: Ein unvergängenommener, nicht einschlägig vorbelasteter Wissenschaftler würde wohl eine Art Gaussvereilung mit einem Maximum irgendwo zwischen Mars und Jupiter erwarten. Ganz abwegig ist die Vorstellung nicht: Immerhin entspricht die Enveloppe des Histogramms grob diesen Vorstellungen. Man merkt natürlich sofort, dass (zum mindesten einige der) Häufungen und Lücken nicht zufällig verteilt sind, sondern dass sie an Stellen auftreten, wo das Verhältnis der Umlaufszeiten von Jupiter und Kleinplanet durch einen Quotienten kleiner ganzer Zahlen ausgedrückt werden kann. Man sagt in diesem Falle auch, dass die Umlaufszeiten kommensurabel sind. Deutlich sehen wir die Gruppe der Trojaner, deren Umlaufszeit mit der von Jupiter übereinstimmt (bei der Abszisse = 1) sowie die Hilda-Gruppe, deren Umlaufszeit  $2/3$  derjenigen von Jupiter beträgt.

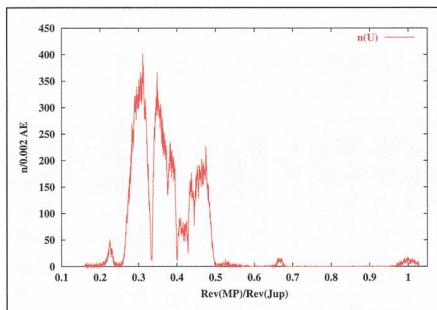
Die heutige Verteilung der Kleinplaneten hat sich aus einer ursprünglich ganz anderen (die wohl eher den oben geäusserten Vorstellungen entsprach) entwickelt. Damit stellt sich naturgemäß die Frage, wie sich die Gruppen und Lücken entwickelt haben. Relativ einfach kann man die Gruppen erklären: Die Kleinplaneten der Trojaner und der Hilda-Gruppe haben «Nischen» stabiler Lösungen des Dreikörperproblems Sonne-Jupiter-Kleinplanet (einer Koexistenz mit Jupiter) ausgebildet, die über Jahrtausende nicht aufgelöst werden. Man darf übrigens ja nicht meinen, dass jeder Kleinplanet mit einer Umlaufszeit von  $2/3 U_J$  sich in einer stabilen Bahn befinden würde: Weitaus die meisten Kleinplaneten mit einer solchen Umlaufszeit stürzen entweder auf Jupiter ab oder sie werden durch ihn in ganz an-

Fig. 5: Positionen der Planeten und Planetoiden am 1. Juli 2001.

dere Bahnen geschleudert. Man könnte übrigens hier durch gezielte Experimente (Monte-Carlo-artige Simulationen) Aufschluss über die ursprüngliche Verteilung erhalten.

Nachdem wir die Existenz der Gruppen sozusagen «rein gravitativ» erklärt haben, stellt sich die Frage, wie die Lücken zu erklären sind. Die Frage ist natürlich nicht neu. Sie wurde erstmals vom amerikanischen Astronomen DANIEL KIRKWOOD (1814-1895) gestellt, der gegen Ende des 19ten Jahrhunderts aus der damals bekannten Population von etwa 100 Kleinplaneten glaubte, Lücken in der Verteilung von Kleinplaneten bei Kommensurabilitäten zu sehen – eine überaus spekulativen Aussage (man dividiere die Zahlen in Figur 6 durch 1000 und überzeuge sich davon, dass man kaum mehr von einer «reichen» statistischen Basis sprechen kann!).

Fig. 6: Anzahl der Kleinplaneten pro 0.002 AE in der Halbachse, als Funktion der Umlaufzeit in Einheiten der Jupiter-Umlaufzeit.



Man ist intuitiv geneigt, die Lücken durch resonante Störungen zu erklären. Bewegt sich nämlich ein Kleinplanet in der prominenten 3:1-Lücke, erfährt er nach jeweils drei siderischen Umläufen wieder praktisch dieselben Störungen durch Jupiter. Eine Aufschaukelung der Störungen scheint durchaus plausibel. Ein Nachweis war – vor der Computer-Ära – aber extrem schwierig, ganz einfach weil analytische Methoden über mehr als einige hundert Umläufe schlicht nicht mehr zuverlässig sind. Aus patriotischen Gründen sei ein statistischer Erklärungsversuch von Prof. MAX SCHÜRER erwähnt: Er wollte die Lücken als ein statistisches Artefakt «wegdiskutiert» haben: Setzt man einen Kleinplaneten in einer Lücke aus, wird er vergleichsweise starke periodische Störungen (auch) in der Halbachse erleiden und so (genau wie ein Pendel im tiefsten Punkt) sich nur während vergleichsweise kurzer Zeit in der Lücke (entsprechend dem tiefsten Pendelpunkt) aufhalten. Diese statistische Hypothese wurde von FRANCOIS SCHWEIZER

in seiner Diplomarbeit [2] mit damals (in den 1960er Jahren) sehr aufwendigen numerischen Experimenten widerlegt.

Das Rätsel konnte, jedenfalls für die 3:1-Resonanz, erst gelöst werden durch die Arbeiten von JACK WISDOM [3], der eine grosse Zahl von Simulationen über Zeiträume von Hunderttausenden von Jahren mit den damals schnellsten Rechnern durchführen konnte. Interessanterweise lag der Schlüssel zur Erklärung der Lücken *nicht* in den Störungen der Halbachsen selbst verborgen, sondern in den Störungen der Bahnexzentrizitäten. Zwar beobachtet man durchaus resonante Störungen in den Halbachsen in der Nähe der 3:1- Resonanz. Diese sind aber immer noch deutlich zu klein, um die Lücken in Figur 6 statistisch zu erklären (die Amplituden betragen in tiefster Resonanz einige Hundertstel AE an Stelle von einigen Tausendsteln AE ausserhalb der Resonanz). Spektakulär sind hingegen die Störungen in der Exzentrizität  $e$ . Dies wird durch Abbildung 7 veranschaulicht, die die Exzentrizitäten von fünf simulierten Kleinplanetenbahnen in der Nähe der 3:1-Resonanz darstellt (mit Umlaufszenen von 0.32633, 0.32833, 0.33033, 0.33133, 0.33233 Jupiterumlaufszeiten). Zum Ausgangszeitpunkt war die Exzentrizität in allen Fällen auf  $e=0.1$  gesetzt. Man beachte, dass in den beiden Beispielen mit der tiefsten Resonanz (0.33133, 0.33233) Exkursionen in der Exzentrizität bis  $e=0.3$  an der Tagesordnung sind und dass Exzentrizitäten bis zu  $e=0.6-0.7$  durchaus über längere Zeitintervalle vorkommen können!

Erklären diese grossen Störungen in den Exzentrizitäten die Lücke in Figur 6 bei der 3:1-Kommensurabilität? Nach WISDOM kann die Frage wie folgt bejaht werden: Ein Kleinplanet in der 3:1-Kommensurabilität hat eine Halbachse von  $a=2.5$  AE. Das Perihel liegt in einer heliozentrischen Distanz von  $r_p=a(1-e)$ . Bei einer Exzentrizität von  $e=0.4$  liegt das Perihel eines Kleinplaneten bei einer heliozentrischen Distanz von  $r_p=1.5$ , also im Bereich der Marsbahn, bei einer Exzentrizität von  $e=0.6$  sogar im Bereich der Erdbahn! WISDOM behauptet nun schlicht, dass alle Kleinplaneten, die während längerer Zeit grosse Bahnexzentrizitäten aufweisen, auf die genannten inneren Planeten abstürzen resp. abgestürzt sind – womit die 3:1-Lücke rein mechanisch erklärt ist. Die Erklärung ist ebenso plausibel wie genial!

Nicht nur die Exzentrizität, auch die Lage des Perihels einer Kleinplanetenbahn erleidet Störungen. Es ist instruktiv, den zum Perihel weisenden Vektor

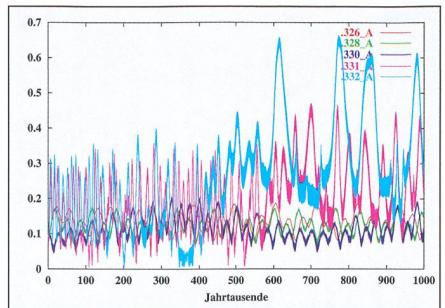


Fig. 7: Exzentrizitäten von fünf Kleinplaneten in 3:1-Resonanz mit Jupiter über eine Million Jahre.

mit der Länge  $e$  (auch Laplacescher Vektor genannt) im Inertialsystem als Funktion der Zeit aufzutragen. Die Figuren 8, 9 und 10 zeigen die Wanderung dieses Vektors für drei der Fälle von Figur 7. Figur 8 zeigt (schon fast) die normale Präzession des Laplaceschen Vektors eines «normalen» Kleinplaneten. Die Figuren 9 und 10 zeigen die chaotische Bewegung dieses Vektors im Falle tiefer Resonanz. Das Perihel scheint in beiden Fällen zu torkeln. Ähnliche Bilder erhält man beim Aufzeichnen des Bahnnormalenvektors. Störungen in der Neigung von mehr als zehn Grad sind durchaus keine Seltenheit. Aus Platzgründen wird auf diese Darstellungen verzichtet. Die Leserschaft sei auf die vertiefte Behandlung in [1] verwiesen.

### Erd- und Mondrotation

Die Bewegungsgleichungen (1) charakterisieren ein N-Körperproblem, bei dem sämtliche beteiligten Himmelskörper als punktförmig angenommen werden. Bei vielen Problemstellungen der Himmelsmechanik genügt diese Näherung, bei anderen aber nicht. Das Dreikörperproblem Sonne-Erde-Mond, wie es in Figur 11 dargestellt ist, verlangt, dass Erde und Mond als ausgedehnte Himmelskörper behandelt werden. Wie passt man die Bewegungsgleichungen den verallgemeinerten Bedingungen an? Die Antwort, zuerst von EULER gegeben, lautet: *im Prinzip* ist keine Anpassung nötig, man hat aber Gleichungen vom Typ (1) für jedes Massenelement eines jeden Himmelskörpers aufzustellen. Durch geeignete Kombination aller Gleichungen vom Typ (1) pro Himmelskörper erhält man anschliessend

- je einen Satz von Differentialgleichungen für die Bewegung der Schwerpunkte der drei Himmelskörper sowie
- je einen Satz von Differentialgleichungen für die zeitliche Entwicklung der Drehimpulse der drei Himmelskörper (Drehimpulse bezogen auf die jeweiligen Schwerpunkte).

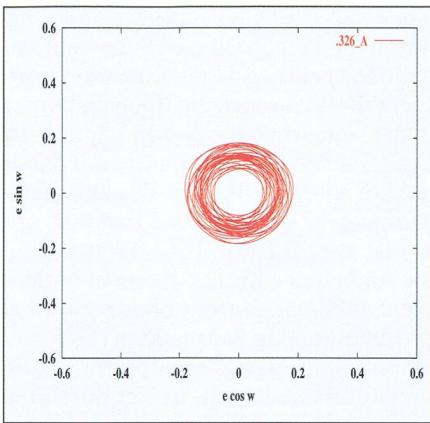


Fig. 8: Der Laplace-Vektor eines Kleinplaneten in seichter 3:1-Resonanz mit Jupiter.

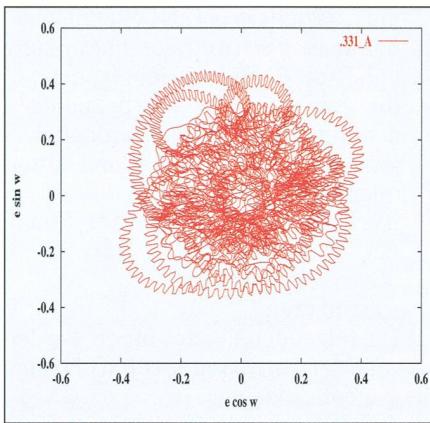


Fig. 9: Der Laplace-Vektor eines Kleinplaneten in tiefer 3:1-Resonanz mit Jupiter.

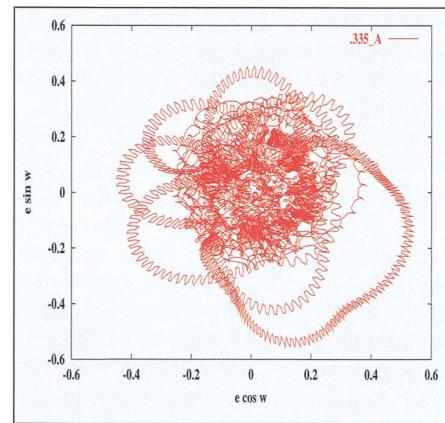


Fig. 10: Der Laplace-Vektor eines Kleinplaneten in tiefer 3:1-Resonanz mit Jupiter.

Figur 11 dient nicht nur als Hilfsmittel zur Herleitung der verallgemeinerten Bewegungsgleichungen des Systems, sie zeigt auch, wie die Aufgabe zu parametrisieren ist. Dazu wollen wir zunächst annehmen, dass Erde und Mond starre Körper sind. Das Dreikörperproblem ist offensichtlich gelöst, wenn wir zu jedem Zeitpunkt die Schwerpunkte der drei Himmelskörper und die Lage je eines mit der Erde und mit dem Mond starr verbundenen Koordinatensystems kennen. Figur 12 zeigt, wie man das körperfeste Koordinatensystem der Erde wählen kann. Zudem zeigt sie eine Möglichkeit für die Wahl eines raumfesten Koordinatensystems.

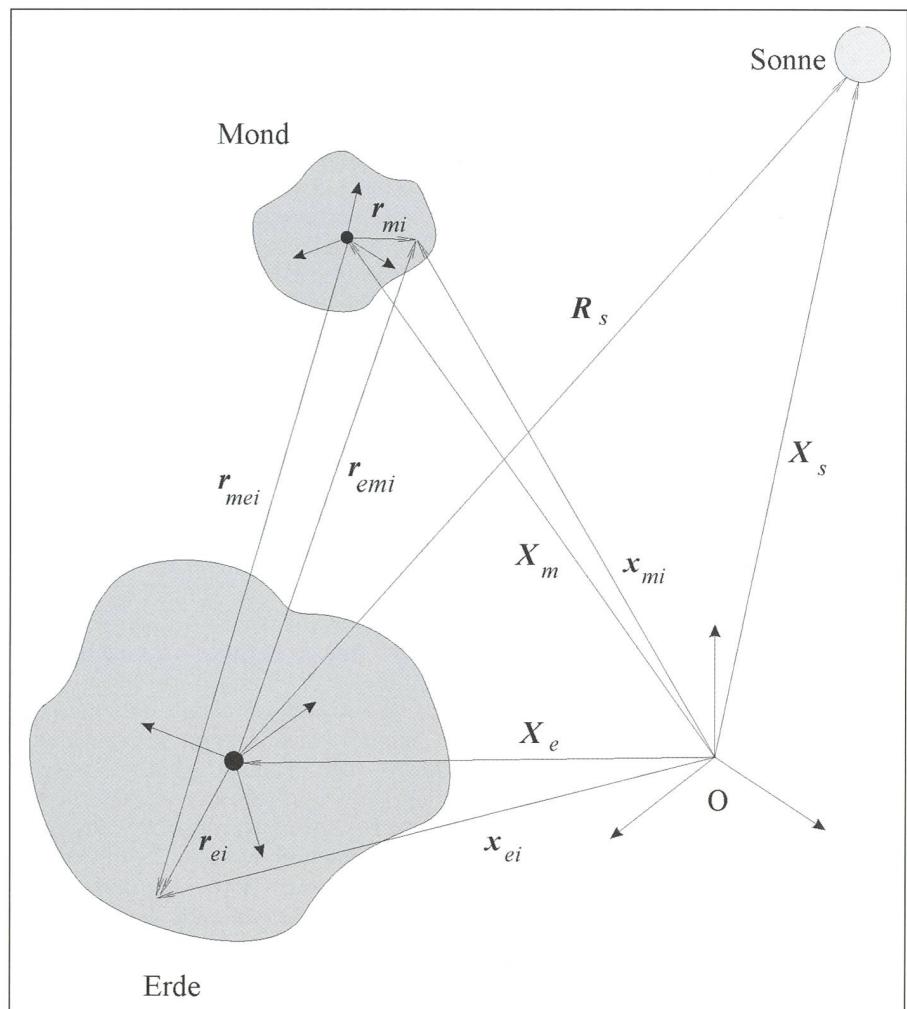
Um unsere Aufgabe zu lösen, müssen wir uns jetzt lediglich noch fragen, wie denn die Lage eines Koordinatensystems im inertialen Raum zu beschreiben ist. Figur 12 zeigt, dass dazu drei Winkel, auch Eulersche Winkel genannt, benötigt werden. In Figur 12 haben wir im inertialen Raum ein ekliptikales Koordinatensystem eingeführt. Ein ekliptikales Koordinatensystem hat die Ebene der Bahn des Systems Erde-Mond um die Sonne als Fundamentalebene (d.h., als erste Koordinatenebene). Da diese Bahnebene – infolge der Planetenstörungen – selber im Raum nicht fix sein kann, müssen wir genauer von einem Eklipziksystem zu einer bestimmten Epoche sprechen. Normalerweise verwendet man zu diesem Zweck heute das auf den 1. Januar 2000 bezogene System und bezeichnet es als System J2000.0. Als erdfestes System verwendet man üblicherweise ein geozentrisches, äquatoriales System – also ein konventionelles geographisches System.

Figur 12 zeigt also, dass die Lage des erdfesten, äquatorialen Systems im inertialen Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt durch die drei Eulerschen Winkel  $\Psi$ ,  $\epsilon$ ,  $\Theta$  beschrieben werden kann. Sie sind «im Prinzip» zu identifizieren mit

der Summe  $\Psi$  aus Präzession und Nutation in Länge, der Nutation in Schiefe  $\epsilon$  und der Sternzeit  $\Theta$ . Allerdings ist zu beachten, dass wir diese Winkel hier einfach als Transformationsparameter zwischen dem raumfesten, ekliptikalnen und dem erdfesten, äquatorialen Koordinatensystem eingeführt haben. Vom Standpunkt der Himmelsmechanik aus gesehen ist dies das einzige Richtigste und Vernünftige.

Unterscheidungen zwischen wahren und mittleren Systemen sowie eine künstliche Aufspaltung in Präzession und Nutation, wie sie in Astronomie-Grundvorlesungen gebräuchlich sind, sind durch nichts zu rechtfertigen. Immerhin sei angemerkt, dass die Winkel  $\Psi$  und  $\epsilon$  sich nur vergleichsweise langsam ändern, während  $\Theta$  pro (Stern)Tag um  $360^\circ$  anwächst. Es sei nochmals vermerkt, dass

Fig. 11: Das Dreikörperproblem Sonne-Erde-Mond.



man im Prinzip auch ganz andere Koordinatensysteme hätte einführen können. Wichtig ist lediglich, dass eines raumfest (inertial), und das andere erdfest ist.

Die Bewegungsgleichungen der Erde setzen sich also zusammen aus drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit, welche die Bewegung des Schwerpunktes der Erde im inertialen Raum beschreiben, sowie drei (gekoppelten) Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den drei Winkeln  $\Psi$ ,  $\epsilon$ ,  $\Theta$ , welche die Lage des erdfesten Systems beschreiben. Anzumerken bleibt, dass aus den ersten zeitlichen Ableitungen der drei Eulerschen Winkel die momentane Lage der Rotationsachse und die Winkelgeschwindigkeit (aus der wiederum die Länge des siderischen Tages folgt) berechnet werden kann.

Sinngemäß gelten dieselben Überlegungen für die Bahn- und Rotationsbewegung des Mondes. Das Resultat kann verallgemeinert werden: In einem N-Körperproblem müssen für jeden Körper endlicher Ausdehnung drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die drei Eulerschen Winkel den Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkte beigesellt werden. Die Differentialgleichungen für die Bewegung der Schwerpunkte und für die Rotation der Himmelskörper sind alle miteinander gekoppelt. Man kann also im Prinzip die Entwicklung der Eulerschen Winkel (für Erde und Mond) nur im Rahmen der Lösung des verallgemeinerten Dreikörperproblems Erde-Sonne-Mond studieren.

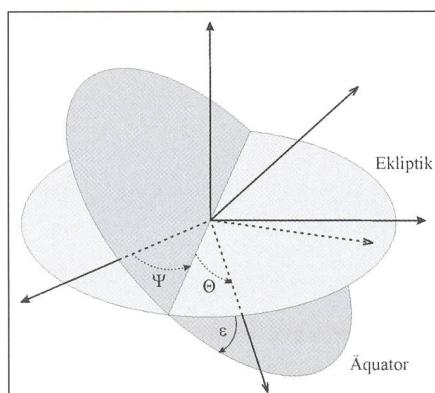


Fig. 12: Die drei Eulerschen Winkel.

Die Koppelung zwischen Bahn- und Rotationsbewegung ist allerdings nicht sehr stark. Man kann daher einen genäherten Eindruck von der Erdrotation erhalten, indem man die Schwerpunktsbewegung durch das System (1) beschreibt und diese in den Differentialgleichungen für die Eulerschen Winkel als bekannt annimmt. Das Programm ERDROT, das für die folgenden Simulationen verwendet wurde, erlaubt es,

- die Erdrotation bei als bekannt angemauerter Schwerpunktsbewegung von Erde, Sonne und Mond oder
- die Mondrotation bei als bekannt angemauerter Schwerpunktsbewegung von Erde, Sonne und Mond oder aber
- das Dreikörperproblem Erde, Sonne und Mond vollständig korrekt im oben erläuterten Sinn zu studieren.

Die folgenden Illustrationen wurden alle mit der korrekten (dritten) Lösung der Aufgabe erzeugt.

*Die Rotation der Erde:* Bei der numerischen Integration müssen die Anfangsbedingungen spezifiziert werden. Im Programm ERDROT werden die Positionen und Geschwindigkeiten der Schwerpunkte der beteiligten Himmelskörper aus einer sehr genauen Ephemeride (im wesentlichen einer «elektronischen» Version der Jahrbücher) übernommen, die Winkel  $\Psi$ ,  $\epsilon$ , und  $\Theta$  werden aus den Formelsammlungen der IAU (Internationalen Astronomischen Union) übernommen. Die ersten Ableitungen dieser Größen werden aus dem vorgegebenen Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\omega$  berechnet. Dieses Vorgehen erlaubt es, die Lage der Rotationsachse der Erde zum Ausgangszeitpunkt realistisch zu wählen. Bei der nachfolgenden Simulation wurde die Lage der Rotationsachse etwa  $0.2''$  vom geographischen Nordpol entfernt gewählt.

Figur 13 zeigt die Projektion der Rotationsachse auf die Erdoberfläche (von oberhalb des Nordpols aus gesehen). Wir sehen, dass sich diese in guter Näherung auf einem Kreis mit Radius  $0.2''$  (dies entspricht auf der Erdoberfläche etwa 6 m) um den geographischen Pol herum bewegt hat. Die Periode dieser Kreisbewegung beträgt bei einer starren Erde etwa 300 Tage. Sie wird Eulersche Periode genannt und kann allein aus der Tageslänge und aus den Hauptträgheitsmomenten der Erde berechnet werden. In Wirklichkeit beträgt die Hauptperiode der Polschwankung nicht 300, sondern etwa 430 Tage. Der Unterschied erklärt sich aus der Tatsache, dass die Erde nicht vollkommen starr ist. Die reale 430-tägige Periode wird nach ihrem Entdecker SETH CARLO CHANDLER (1846-1913) *Chandler-Periode* genannt. Die Chandler-Periode kann aus der Tageslänge, den Hauptträgheitsmomenten der Erde und aus der Elastizität der Erde berechnet werden. Der «grossen» Kreisbewegung von  $0.2''$  sind kleine Kreise mit variierendem Radius überlagert. Dieser Anteil der Polschwankung wird Oppolzer-Bewegung genannt (nach Freiherr RITTER VON OPPOLZER [1841-1886]). Die Periode beträgt (fast)

einen Tag. Die Oppolzer-Bewegung wird durch die von Mond und Sonne auf die Erde ausgeübten Drehmomente verursacht. Befinden sich die Himmelskörper in der Äquatorebene, verschwinden die betreffenden Drehmomente und damit die zugehörigen Radien der Oppolzer-«Kringel». Da der Mond zweimal pro Monat die Äquatorebene kreuzt, sind die Radien der Kringel zweimal im Moment minimal. Da die Sonne zweimal pro Jahr (zu den Zeitpunkten des Frühjahrs- und des Herbstbeginns) die Äquatorebene kreuzt, ist der durch die Sonne bedingte Radius der Oppolzer-Kringel zweimal pro Jahr minimal. Man könnte also der Oppolzer-Bewegung in Figur 13 die Zeitpunkte der Äquinoktien zuordnen.

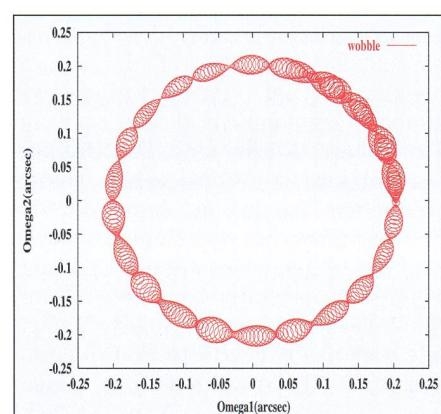


Fig. 13: Die Polschwankung während eines Jahres.

Wie bewegt sich der Rotationspol im Raum? Die Figuren 14-16 geben die (wohlbekannte) Antwort. Figur 14 zeigt, dass der Winkel  $\Psi$  in der Ekliptikebene pro Jahr im Mittel um etwa  $50.4''$  abnimmt. Dies entspricht der Präzessionsbewegung des Rotationspols um den Ekliptikpol herum. Die zugehörige Periode beträgt folglich etwa 26000 Jahre. Man entnimmt der Figur 14 aber auch, dass der linearen Abnahme von  $\Psi$  deutlich eine periodische Komponente überlagert ist. Diese kann man genauer studieren, wenn man rein rechnerisch den linearen Anteil in Figur 14 eliminiert.

Das Resultat ist in Figur 15 enthalten. Wir erkennen eine grosse 18.6-jährige periodische Bewegung mit einer Amplitude von etwa  $17''$  sowie halbjährliche Terme mit Amplituden von etwa  $1.3''$ . Der erste Term, der Hauptterm der Nutation in Länge, wird durch die periodische Änderung der Neigung der Mondbahnebene gegenüber der Äquatorebene «verschuldet»: Die Neigung der Mondbahnebene gegenüber der Ekliptikebene ist in etwa konstant mit  $i=5^\circ$ . Nun läuft aber der Mondknoten (die

Schnittgerade der Mondbahnebene mit der Ekliptikebene) einmal pro 18.6 Jahren in der Ekliptikebene (im Uhrzeiger) herum. Daraus folgt, dass der Schnittwinkel der Mondbahnebene mit der Äquatorebene sich innerhalb der Grenzen  $\epsilon-5^\circ$  und  $\epsilon+5^\circ$ , also grob zwischen den Grenzen  $18.5^\circ$  und  $28.5^\circ$ , ändert. Unnötig zu sagen, dass die Präzession den maximalen (negativen) Wert annimmt, wenn die Neigung der Mondbahnebene gegen die Äquatorebene maximal ist. Figur 16 zeigt, dass der Winkel  $\epsilon$  nur periodischen Änderungen unterworfen ist. Die Hauptperiode beträgt wiederum 18.6 Jahre, die Amplitude etwa  $9.2^\circ$ . Die Figuren 14 und 16 zusammengenommen sagen, dass sich der Rotationspol der Erde in etwa auf einem geraden Kreiskegel mit  $23.5^\circ$  Neigung um den Ekliptikpol herum bewegt. Zum Abschluss sei festgehalten, dass wir zwar in den Figuren 15 und 16 bloss zwei Terme (die 18.6-jährigen und die halbjährlichen Terme) identifizieren konnten. Eine Spektralanalyse der Zeitreihen zeigt jedoch, dass es Dutzende von Termen mit Amplituden grösser als eine Millibogensekunde gibt. Setzt man die Grenze noch tiefer an, kommt man «problemlos» auf Hunderte von Termen.

**Mondrotation:** Im Prinzip sollten wir nun eine ähnliche Diskussion zum Thema Mondrotation führen, wie wir sie oben zum Thema Erdrotation geführt haben. Platzgründe verbieten dies. Wir beschränken uns daher auf eine summarische Zusammenfassung der Resultate. Genau wie die Erde rotiert auch der Mond im inertialen Raum. Aus der Tatsache, dass wir (im Wesentlichen) immer dieselbe Seite des Mondes sehen, wissen wir, dass seine Rotationsperiode und seine Umlaufszeit heute identisch sind, also einen (siderischen) Monat betragen. Genau wie die Erde weist auch der Mond eine Polschwankung auf. Die der Eulerschen Periode entsprechende Periode ergibt sich wiederum aus den Hauptträgheitsmomenten des Mondes und aus der Rotationsperiode des Mondes. Die Periode beträgt etwas mehr als 140 Jahre. Beobachtet wurde sie

allerdings noch nie! Figur 17 deutet an, weshalb dem so ist. Sie zeigt, dass das Äquivalent zur Oppolzer-Bewegung vergleichsweise riesig ist: Anstelle von einigen Millibogensekunden wie im Falle der Erde (siehe Figur 13) beobachten wir Amplituden von mehreren hundert Bogensekunden! Die Bewegung erscheint im Übrigen sehr chaotisch. Die Grösse der Amplituden ist naturgemäß durch das vergleichsweise sehr grosse Drehmoment bedingt, das durch die Erde auf den Mond ausgeübt wird. Man hat im Übrigen auch diese Bewegung auf dem Mond noch nie beobachtet. ( $100''$  auf dem Mond entsprechen etwa  $0.5''$  von der Erde aus gesehen).

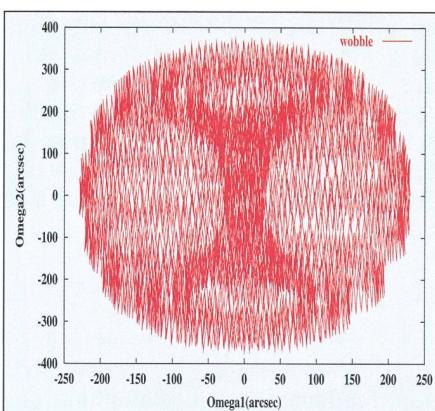


Fig. 17: Die Polschwankung des Mondes über 140 Jahre.

Wie bewegt sich der Rotationspol des Mondes im Raum? Nun, genau wie bei der Erde führt auch der Rotationspol des Mondes eine Präzessionsbewegung um die Ekliptikebene aus. Allerdings beträgt die Periode nur 18.6 Jahre an Stelle der etwa 26 000 Jahre bei der Präzession der Erdachse – sie ist gekoppelt mit der Präzession der Mondbahnebene. Die Neigung der Rotationsachse des Mondes gegenüber der Ekliptikebene beträgt übrigens nur etwa  $1.5^\circ$  (und nicht  $23.5^\circ$  wie im Falle der Erde). Die grundlegenden Fakten der Mondrotation sind längst bekannt. Sie wurden von GIOVANNI DOMENICO CAS-

Fig. 14: Präzession plus Nutation in Länge.

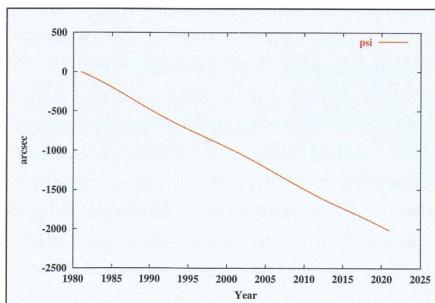
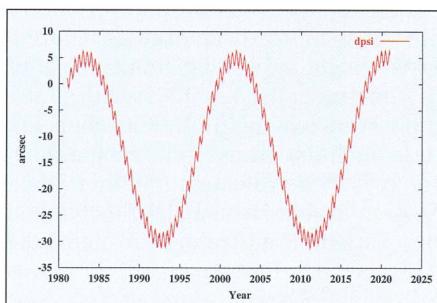


Fig. 15: Nutation in Länge.



SINI (1625-1712) rein empirisch aus langen Beobachtungsreihen gefunden und in Form von drei «Gesetzten» festgehalten:

1. Vom Nordpol aus gesehen rotiert der Mond gleichförmig im Gegenuhrzeigersinn um eine feste Achse. Siderische Rotationsperiode und Bahnumlaufszeit sind identisch.
2. Die Neigung der Mondbahnebene gegen die Ekliptik ist konstant.
3. Die Rotationsachse des Mondes, der Pol der Ekliptik und der Pol der Mondbahnebene liegen (in dieser Reihenfolge) in einer und derselben Ebene.

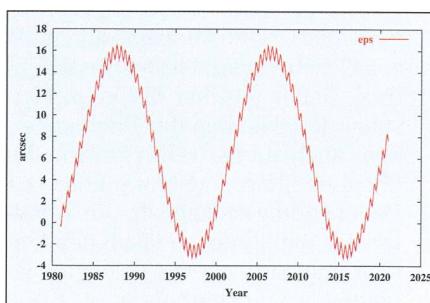
*Cum grano salis* ist die Rotation des Mondes durch die drei Cassinischen Gesetze recht gut erfasst. Man muss natürlich in Betracht ziehen, dass die sehr wohl existierenden (und heute, nicht zuletzt dank den Laser-Distanzmessungen zum Mond eindeutig nachgewiesenen) Nutationsbewegungen des Mondes im 17ten Jahrhundert nicht beobachtbar waren. Mehr Aufschluss zum Thema Mondrotation wird man durch Mondmissionen, wie sie beispielsweise von der japanischen Weltraumagentur geplant sind, erhalten.

### Künstliche Erdsatelliten

**Geschichtliches:** Mit dem Start des ersten künstlichen Erdsatelliten Sputnik-I am 4. Oktober des internationalen geophysikalischen Jahres 1957 brach eine neue Ära in der Himmelsmechanik an. Künstliche Erdsatelliten können mit sehr hoher Genauigkeit über sehr lange Zeiträume beobachtet werden. Wichtig ist insbesondere, dass man eine Bahn über Hunderte von Umläufen genau beobachten kann. Die Raumflüge brachte in der Himmelsmechanik in mehrererlei Hinsicht eine Neuorientierung:

- Während bislang ausschliesslich Richtungen zu Himmelskörpern beobachtet wurden, kamen jetzt auch andere Beobachtungsarten zum Zuge. Zu nennen sind insbesondere
  - Distanzbeobachtungen zu Satelliten, die mit Reflektoren ausgerüstet sind,

Fig. 16: Nutation in Schiefe.



- Beobachtung des Dopplereffektes von Frequenzen, die von aktiven Satelliten ausgesandt werden,
  - Messung der Laufzeit von Signalen, die von aktiven Satelliten ausgesandt werden.
  - Während man in der klassischen Himmelsmechanik des Planetensystems die auf einen Probekörper wirkenden Kräfte im Normalfall als bekannt annehmen durfte, war dies bei künstlichen Erdsatelliten zum Mindesten zu Beginn der Raumflugära nicht der Fall. Man musste das Gravitationsfeld der Erde aus den beobachteten Bahnen selbst ableiten. Schon Ende der 1960er Jahre wurden Dutzende von Termen des Gravitationsfeldes bestimmt. Bis Ende des zwanzigsten Jahrhunderts wurden in der Größenordnung einige tausend Terme bestimmt, Ende des ersten Jahrzehnts des dritten Jahrtausends wird man gegen Hunderttausend solcher Terme mit grosser Genauigkeit bestimmt haben.
  - In der klassischen Himmelsmechanik mussten im Allgemeinen nur Gravitationskräfte beachtet werden. Bei künstlichen Erdsatelliten mussten von Anbeginn weg auch andere Kräfte beachtet werden:
    - Der Luftwiderstand ist in Umlaufbahnen bis 1000 km Höhe von zentraler Bedeutung.
    - Unabhängig von der Höhe des Satelliten ist der sogenannte Strahlungsdruck zu beachten. Er ist dem Umstand zuzuschreiben, dass elektromagnetische Strahlung einen Impuls mit sich trägt: Jedes Photon, das auf eine Satellitenoberfläche auftrifft und absorbiert wird, überträgt auf diese den Impuls der Grösse  $h\nu/c$  ( $h$  ist die Plancksche Wirkungskonstante,  $\nu$  die Frequenz der Strahlung,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit) in Richtung Sonne-Satellit. Wird das Photon reflektiert, wird im Maximum der doppelte Impuls normal zum Flächenelement, auf den das Photon auftraf, übertragen.
    - Wird ein Satellit von der Erde aus beobachtet (Richtung, Distanz, Doppeler, Laufzeit), enthält diese Beobachtung nicht nur Information zur geozentrischen Bahn des Satelliten, sondern auch zur Position und allenfalls zur Geschwindigkeit des Beobachters. Damit wurden die geozentrischen Koordinaten der Beobachter, aber auch subtilere Effekte wie die oben erwähnte Polschwankung der Beobachtung zugänglich. Das Zeitalter der Satellitengeodäsie, der Vermessung der Erde mit Hilfe von Satelliten, war angebrochen.
- Die Bewegungsgleichungen:* Man hatte also in der Himmelsmechanik mit einem Schlag sehr viel kompliziertere Aufgaben zu lösen. Himmelsmechanik wurde auch, vielleicht sogar vor allem, eine wichtige Anwendung der Theorie der Parameterbestimmung. Dies wird unter anderem dokumentiert durch die im Vergleich mit den Grundgleichungen (1) sehr viel komplexeren Grundgleichungen der Satellitenbewegung:
- $$\ddot{\mathbf{r}} = -G \iiint_v \frac{\rho(dV)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dv}|} \cdot dV + \mathbf{a}_{Mond} + \mathbf{a}_{Sonne} + \sum \mathbf{a}_{ng} \quad (5)$$
- Dabei ist  $G$  die Gravitationskonstante,  $\rho(dV)$  die Dichte der Materie in einem Volumenelement  $dV$  der Erde;  $\mathbf{r}$  ist der geozentrische Radiusvektor des Satelliten,  $\mathbf{r}_{dv}$  derjenige des Volumenelementes.  $\mathbf{a}_{Mond}$  ist die auf den Satelliten ausgeübte Gravitationskraft des Mondes (im geozentrischen System),  $\mathbf{a}_{Sonne}$  diejenige des Mondes.  $\mathbf{a}_{ng}$  ist die Beschleunigung des Satelliten infolge einer nicht-gravitativen Kraft. Der erste Term in (5) kann noch als Gradient eines Potentials geschrieben werden:
- $$\ddot{\mathbf{r}} = G \cdot \text{grad} \left( \iiint_v \frac{\rho(dV)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dv}|} \cdot dV \right) + \mathbf{a}_{Mond} + \mathbf{a}_{Sonne} + \sum \mathbf{a}_{ng} \quad (6)$$
- Die Gleichungen (5) und (6) sind vom mathematischen Standpunkt aus gesehen gleichwertig. Der Vorteil der Gleichung (6) besteht darin, dass das Integral nun nicht mehr eine vektorielle, sondern nur noch eine skalare Grösse darstellt.
- Der erste Term in Gleichung (6) muss noch etwas eingehender diskutiert werden: Die Gleichungen (6) sind bezogen auf ein pseudo-inertiales, geozentrisches Koordinatensystem. Das System kann, weil geozentrisch, nicht echt inertial sein (es ist ja der beschleunigten Bewegung der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt Erde-Mond sowie der Bewegung dieses Schwerpunktes um die Sonne unterworfen). Wegen der Rotation der Erde in diesem System müsste man das Integral für jeden Zeitpunkt stets neu auswerten. Es empfiehlt sich daher, vor einer Auswertung in ein erdfestes System zu transformieren, das Integral dort auszuwerten, den Gradienten im erdfesten System zu bilden und dann das Resultat ins inertiale System zurückzutransformieren. Dies scheint aufwendig, lohnt sich aber in Anbetracht der Komplexität des Integrals in Gleichung (6). Damit sehen wir, dass auch die Transformationsparameter zwischen erdfestem und inertialem System in den Bewegungsgleichungen des Satelliten auftreten. Es bleibt die Aufgabe, das Integral in (6) in einem erdfesten System auszuwerten. Die

Schwierigkeit scheint darin zu bestehen, dass man die Dichte  $\rho(dV)$  gar nicht kennt. Man kann aber einstweilen «so tun als ob» und erhält formal die folgende einfache Darstellung für das Potential am Ort des Satelliten im erdfesten System:

$$G \iiint_v \frac{\rho(dV)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dv}|} \cdot dV = U(r, \lambda, \phi) = \frac{GM}{r} \cdot \sum_{i=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^i \sum_{k=0}^i P_i^k(\sin \phi) \left\{ C_{ik} \cdot \cos(k\lambda) + S_{ik} \cdot \sin(k\lambda) \right\} \quad (7)$$

$r$ ,  $\lambda$  und  $\phi$  sind die sphärischen Koordinaten (geozentrische Distanz, Länge und Breite) des Satelliten im erdfesten System,  $M$  ist die Erdmasse,  $a_e$  ist der Äquatorradius, die (...) sind die zugeordneten Legendreschen Funktionen, deren Definition jeder mathematischen Formelsammlung entnommen werden kann.  $i$  ist der Grad,  $k$  die Ordnung der Entwicklung. Die Terme  $C_{ik}$  und  $S_{ik}$  sind komplizierte Funktionen der Dichte. Dies stört für die Potentialbestimmung aber wenig: Man führt diese einfach als Unbekannte ein und bestimmt sie! Man beachte, dass sämtliche Terme  $S_{i0}$  gleich Null gesetzt werden können. Der allererste Term beträgt  $C_{00}=1$ , womit dieser erste Term der Entwicklung in (7) mit  $U_{00}=GM/r$  das Potential eines Massenpunktes der Masse  $M$  darstellt. Bezieht sich die Entwicklung auf ein Schwerpunktssystem, werden alle Terme vom Grad  $i=1$  zu Null. Nach dem Hauptterm ist der Term  $C_{20}$  dominierend. Er charakterisiert die Abplattung der Erde. Sein Einfluss auf einen tieffliegenden Satelliten ist etwa 1000 mal grösser als derjenige der nachfolgenden Terme.

*Charakteristische Störungen einer Satellitenbahn:* In Anbetracht dieser Dominanz lohnt es sich, die Störungen einer Satellitenbahn infolge der Abplattung kurz zu charakterisieren. Wir beschränken uns darauf, die Störungen in der Halbachse, in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens und im Argument des Perigäums (Winkelabstand des erdnächsten Punktes vom Knoten) darzustellen. Die Definition dieser Elemente kann in Figur 1 nachgesehen werden. Allerdings hat man zu beachten, dass die Bezugsebene für die geometrischen Elemente nun sinnvollerweise nicht mehr die Ekliptikebene, sondern die Äquatorebene ist. Bei den Abbildungen 18, 19 und 20 wurde ein Testsatellit mit einer oskulierenden Halbachse zum Zeitpunkt  $t_0=1$ . Januar 2001 von  $a=8000$  km, einer Exzentrizität von  $e=0.07$ , einer Neigung von  $i=35^\circ$  sowie einem Perihelabstand von  $\omega=0^\circ$  im Gravitationsfeld der abgeplatteten Erde integriert. Der oskulierende Knoten wurde bei  $\Omega=0^\circ$  angenommen

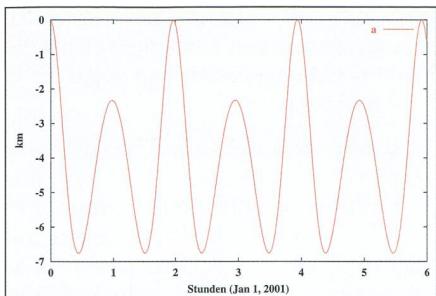


Fig. 18: Störungen der Halbachse durch die Abplattung.

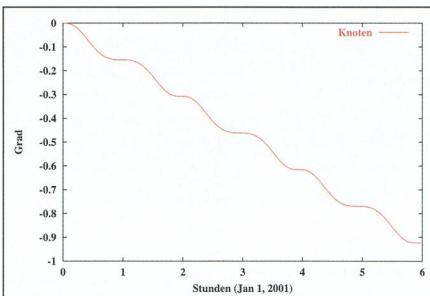


Fig. 19: Störungen der Rektaszension des aufsteigenden Knotens durch die Abplattung.

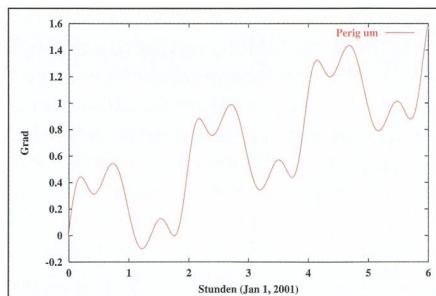


Fig. 20: Störungen des Perigäumsabstandes durch die Abplattung.

und die Integration wurde im Knoten (und somit auch im Perigäum) gestartet. Abbildung 18 zeigt die oskulierende Halbachse (minus 8000 km) über eine Zeitdauer von sechs Stunden. Man sieht nur periodische Störungen mit Perioden einer halben und einer vollen Umlaufzeit. Dieses Resultat war zu erwarten: Die Halbachse ist ja ein anderes Mass für die Energie eines Satelliten. Durch eine konservative Kraft kann aber die Energie nicht geändert werden. Ein ähnliches Bild würde man erhalten, wenn man die Exzentrizität als Funktion der Zeit auftragen würde.

Figur 19 zeigt die Entwicklung der oskulierenden Rektaszension des Knotens über denselben Zeitraum von sechs Stunden. Deutlich ist eine lineare Abnahme zu beobachten. Diese ist in der Tat bedeutend: Umgerechnet auf einen Tag beträgt die Regression des Knotens etwa  $3.6^\circ$ , was bedeutet, dass der Knoten einmal pro hundert Tage umläuft. Da andererseits die Neigung  $i$  gegen die Äquatorebene nur periodische Störungen kleiner Amplitude aufweist, bedeutet dies, dass der Bahnnormalenvektor auf einem geraden Kreiskegel der halben Öffnung  $i$  um die Polarachse präzidiert (im Uhrzeigersinn). Figur 20 dokumentiert, dass auch das Perigäum relativ zum Knoten nicht an Ort bleibt. Dieses dreht sich vorwärts mit einer Winkelgeschwindigkeit von etwa  $4.2^\circ$ . Die Figuren 18, 19 und 20 demonstrieren eindrücklich, dass die Störung der Satellitenbahnen infolge der Erdabplattung bedeutend ist.

Es stellt sich natürlich die Frage, wie repräsentativ die Resultate in den Figuren 18-20 sind. Dazu ist zu sagen, dass die Störungen mit der Höhe (Halbachse) der Satelliten rasch kleiner werden – im Falle des Knotens und des Perigäumsabstandes nehmen z.B. die Störbeträge mit der 3.5-ten Potenz der Halbachse ab. Zum andern gilt es, die Abhängigkeit der Störungen (bei sonst gleichbleibenden Elementen) von der Neigung der Satellitenbahn zu beachten. Figur 21 zeigt diese Abhängigkeit

für die Regression des Knotens. Um den Effekt klarer herauszuschälen, wurden in dieser Abbildung die mittleren Störungen (gemittelt über einen Umlauf des Satelliten) aufgetragen. Abgesehen von der Neigung wurden in Figur 21 (übrigens auch in Figur 22) die gleichen Elemente wie in den vorausgegangenen Simulationen verwendet. Die Neigungsabhängigkeit der Störungen im Knoten ist in der Tat dramatisch: Bei  $i=35^\circ$  erhalten wir die Winkelgeschwindigkeit von  $-3.6^\circ/\text{Tag}$  bestätigt, bei einer Neigung von  $i=63.4^\circ$  ist die Drehung etwa halb so gross, bei  $i=90^\circ$  kommt die Knotendrehung zum Stillstand (was übrigens aus Symmetriegründen einleuchtend ist). Bei Satelliten mit einer Neigung  $i>90^\circ$  dreht sich der Knoten vorwärts. Letztere Eigenschaft wird übrigens von Raumfahrtagenturen zum Erzielen sogenannter sonnensynchroner Bahnen ausgenutzt: Die Neigung wird so gewählt, dass die Bahnebene in Bezug auf die Sonne immer den gleichen Winkel einnimmt.

Figur 22 zeigt, dass auch die Perigäumsdrehung neigungsabhängig ist. Attraktiv ist insbesondere der Umstand, dass diese Drehung bei  $i=63.4^\circ$  zum Stillstand kommt. Diese Aussage stimmt für alle Halbachsen und Exzentrizitäten. Die Neigung wird deshalb (völlig unzutreffend) *kritische Neigung* genannt. Immerhin hat diese Eigenschaft eine wichtige praktische Bedeutung. Bringt man z.B. einen Satelliten mit

grosser Exzentrizität  $e$  in eine Umlaufbahn mit dieser Neigung und setzt das Perigäum auf  $\omega=-90^\circ$  (also in  $63.4^\circ$  südliche Breite), hält sich dieser Satellit die meiste Zeit über der Nordhalbkugel auf. Russische Kommunikationssatelliten nutzen diese Eigenschaft aus. Australien könnte durch eine sinngemäße Anwendung auch von der kritischen Neigung Gebrauch machen.

Es ist interessant, dass die Abplattung nur sehr kleine langperiodische Störungen verursacht. Langperiodische Sörungen existieren und werden insbesondere von längenabhängigen Termen verursacht. Figur 23 zeigt solche Störungen in der Exzentrizität bei Berücksichtigung aller Terme bis und mit Grad und Ordnung 4. Dargestellt werden die mittleren Störungen in der Exzentrizität über einen Zeitraum von zwei Jahren. Das realistische Beispiel ist in roter Farbe wiedergegeben, das hypothetische, bei dem der Abplattungsterm künstlich auf Null gesetzt wurde, in grüner Farbe. Die rote Kurve zeigt, dass die Störungen im Allgemeinen kleine Amplituden aufweisen. Ausnahmsweise können diese gross werden, wenn Umlaufszeit und Rotationsperiode der Erde durch ein Verhältnis kleiner ganzer Zahlen ausgedrückt werden können (was im vorliegenden Beispiel nicht der Fall ist).

Mit Simulationen kann man auch Fragen der Art «was wäre, wenn ...» stellen. Die grüne Kurve beantwortet

Fig. 21: Störungen im Knoten durch die Abplattung bei verschiedenen Neigungen.

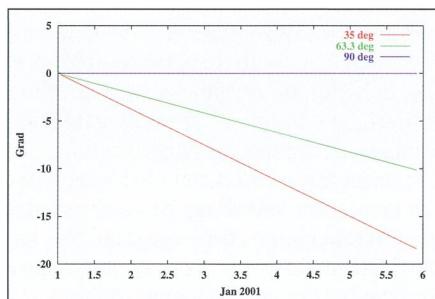
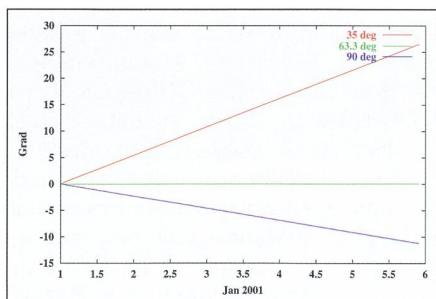
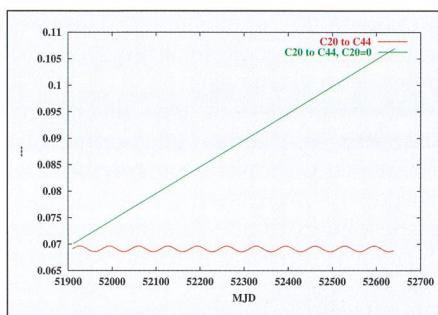


Fig. 22: Störungen im Perigäum durch die Abplattung bei verschiedenen Neigungen.



die Frage «was wäre, wenn die Abplattung der Erde gleich Null wäre, die übrigen Terme des Potentials jedoch unverändert blieben?» Merkwürdigerweise stellt man fest, dass in diesem hypothetischen Fall die Störungen in der Exzentrizität vergleichsweise riesig würden. Das Beispiel zeigt eindrücklich, dass die Abplattung der Erde eine stabilisierende Wirkung hat: Ganz offensichtlich bewirkt die «schnelle» Rotation der Bahn ebene eine ebenso schnelle Änderung der Störgeometrie, was zu einer ganz wesentlichen Abschwächung der Störinflüsse der höheren Terme des Erdgravitationsfeldes beiträgt.

Fig. 23: Störungen in der Exzentrizität über zwei Jahre infolge der Terme höherer Ordnung (mit und ohne  $C_{20}$ ).



Nicht-gravitative Störungen sind bei der Satellitenbewegung von grosser Bedeutung. Figur 24 gibt ein Beispiel. Dargestellt werden die Störungen des Perigäums und Apogäums einer Satellitenbahn in einer mittleren Höhe von ca. 700 km mit einer Exzentrizität von  $e=0.05$ . (Man kann die Störungen in diesen Grössen berechnen aus den Störungen in den Bahnelementen  $a$  und  $e$ .) Während die Perigäumshöhe nur leicht abnimmt, kommt das Apogäum vergleichsweise «rasant» (mit einer Geschwindigkeit von etwa 21 m/Tag) herunter. Ganz offensichtlich wird die Bahn immer kreisförmiger. Dieser Effekt wird tatsächlich beobachtet – und er ist einfach zu erklären: Bei einer Halbachse von  $a=7100$  km und einer Exzentrizität von  $e=0.05$  liegt das Apogäum um  $2ae = 710$  km höher als das Perigäum. Nun äussert sich der Luftwiderstand durch eine Bremsung in Bewegungsrichtung. Die Bremsung ist proportional der Dichte der Restatmosphäre in der Höhe des Satelliten. Diese Dichte ist höhenabhängig – sie nimmt exponentiell mit der Höhe ab. Das heisst aber, dass wir bei einem Satelliten mässiger Exzentrizität annehmen dürfen, dass nur in der Nähe des Perigäums eine wesentliche Bremsung stattfindet. Da im Perigäum der Bremseffekt senkrecht zum Radius-

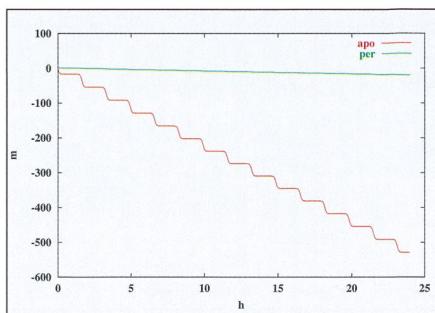


Fig. 24: Störungen im Perigäum und Apogäum infolge des Luftwiderstandes.

vektor (also normal zum Ortsvektor des Perihels) steht, kann dessen Höhe durch den Luftwiderstand kaum geändert werden. Hingegen bewirkt die Abnahme der Geschwindigkeit im Perigäum, dass der Satellit weniger weit nach aussen geschleudert werden kann: Die Apogäumshöhe nimmt ab. Es ist also quasi ein Naturgesetz, dass die Bahnen von Satelliten in tiefen Umlaufbahnen immer kreisförmiger werden. Ist die Bahn schliesslich fast kreisförmig, ist *de facto* «jeder Punkt ein Perihel» und es kann nur noch die Halbachse abnehmen, was schliesslich zum Absturz des Satelliten führt.

### Rückblick und Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, dass aus Planeten- und Kleinplanetenbahnen sehr viel ausgesagt werden kann über die Entwicklung unseres Planetensystems. Wir haben gesehen, dass unser Planetensystem mechanisch von den Planeten Jupiter und Saturn (und natürlich von der Sonne) geprägt ist. Das Studium ihrer Bahnelemente zeigt, dass ein immerwährender Austausch von Energie und Drehimpuls zwischen ihnen stattfindet. Im inneren Planetensystem spielen Venus und Erde eine ähnlich dominierende Rolle. Die Entwicklung ihrer Bahnelemente kann allerdings sinnvollerweise nur unter Einbezug des gesamten Planetensystems studiert werden. Auch zwischen Venus und Erde findet ein Austausch von Energie und Drehimpuls statt. Die «gemeinsam erlittenen» Störungen durch die Planeten des äusseren Systems bewirken zudem grosse Störungen sehr langer Perioden in Exzentrizität (und Bahnebene) der inneren Planeten. Heute beträgt die Exzentrizität der Erdbahn etwa  $e=0.016$ . Werte bis etwa  $e=0.07$  sind möglich. Solche vergleichsweise grossen Änderungen können Klima-relevant sein. Schliesslich haben wir einige numerische Experimente zum Thema «Erklärung der Lücken in der Verteilung der Halbachsen von Kleinplaneten» durchgeführt. Wir haben gezeigt, dass schon über einen relativ kurzen Zeitbereich von einer Million Jah-

ren massive Störungen in der Exzentrizität zum Absturz von Kleinplaneten auf die inneren Planeten Mars und sogar Erde führen können.

Wenn wir von Bahnen von Himmelskörpern sprechen, stellen wir uns normalerweise die Entwicklung der sechs oskulierenden Bahnelemente (siehe Figur 1) vor. Darf man in einem N-Körperproblem einige der Himmelskörper nicht als Massenpunkte nähern, müssen wir gleichzeitig für jeden dieser Körper die drei Eulerschen Winkel eines körperfesten Koordinatensystems mitbestimmen. Sind in einem N-Körperproblem alle Körper von endlicher Grösse, führt dies zu einer Verdoppelung der Dimension des Systems der Bewegungsgleichungen. Wir haben einige Resultate anhand des Dreikörperproblems Erde-Mond-Sonne vorgestellt.

Abschliessend haben wir einige Eigenschaften der Bahnen künstlicher Erdsatelliten vorgestellt, obwohl im Bereich Himmelsmechanik des erdnahen Raumes die Bahnen oft nur Mittel zum Zweck in sehr komplexen Parameterbestimmungsproblemen sind. Die Näherung durch Keplersche Bahnen ist im Allgemeinen schon über kurze Zeiten (wenige Stunden) nicht mehr genügend. Die wichtigste Störkraft wird durch die Abplattung der Erde verursacht, die beispielsweise die Bahnebenen tiefer Satelliten um mehrere Grad pro Tag präzidieren lässt. Wir haben auch darauf hingewiesen, dass die Bewegungsgleichungen künstlicher Erdsatelliten immer nicht-gravitative Störinflüsse modellmässig erfassen müssen. Bei Satelliten unter einer Höhe von 1000 km ist der Luftwiderstand, verursacht durch die Restatmosphäre in diesen Höhen, von grosser Bedeutung. Der Luftwiderstand hat die Eigenschaft, die Exzentrizität der Bahnen zu verringern und die Halbachsen zu verkleinern. Schliesslich sorgt der Luftwiderstand für den Absturz der Satelliten. Je nach der ursprünglichen Höhe kann dies jedoch ein sehr langwiger Prozess sein, der Jahrzehnte oder gar Jahrhunderte in Anspruch nehmen kann.

Prof. Dr. GERHARD BEUTLER  
Astronomisches Institut, Universität Bern,  
Sidlerstrasse 5, CH-3012 Bern  
E-mail: beutler@aiub.unibe.ch

### Bibliographie:

- [1] BEUTLER, G.: *Methods of Celestial Mechanics: Theory and Applications*, (Springer Verlag, 2004).
- [2] SCHWEIZER, F. *Astronomical Journal*, Vol. 74, No. 6, 1969, pp. 779-788.
- [3] WISDOM, J.: *Icarus*, pp. 51-74, No. 56, 1983.