

Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 60 (2002)
Heft: 309

Artikel: Ballet dans le ciel : les résonances gravitationnelles dans le système solaire
Autor: Fischer, Gaston
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-898478>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ballets dans le ciel

Les résonances gravitationnelles dans le système solaire

GASTON FISCHER

Introduction

Les phénomènes de résonance nous sont bien connus, en particulier en acoustique et en électrodynamique. Les pendules sont des systèmes résonants où intervient la gravité, mais la gravité intervient aussi dans de très nombreux effets de résonance entre corps célestes [1]. Dans ce qui suit nous nous limiterons à étudier une série d'interactions dans le système solaire, que l'on doit qualifier d'effets résonants, puisqu'ils se reproduisent avec une parfaite régularité pendant des millions d'années. La régularité répétitive des orbites planétaires et des satellites est bien connue, mais notre intérêt se portera sur d'autres coïncidences beaucoup plus surprenantes, qui ne peuvent s'expliquer que par des interactions gravitationnelles plus complexes, elles aussi d'une très grande régularité.

1. Fox-trot, on danse face à face

Tous les observateurs de la Lune savent bien que depuis la Terre on ne perçoit jamais qu'un seul et même côté de cet astre, le même hémisphère longitudinal. Pour chaque tour d'orbite autour de notre planète, il faut donc que la Lune tourne exactement une fois sur elle-même. Il n'en a pourtant pas toujours été ainsi. Ce qu'on observe aujourd'hui est le résultat des interactions entre la Terre et la Lune, qui se manifestent surtout par les marées.

Lorsqu'on parle de marées on pense généralement à ces mouvements de la mer, soulevés par l'attraction gravitationnelle de la Lune, et dans une moindre mesure par le Soleil. Les marées dissipent de grandes quantités d'énergie et à long terme elles ralentissent la vitesse de rotation de la Terre. En conséquence, la longueur des jours ira en augmentant et si rien d'autre ne venait perturber le système Terre-Lune, la Terre finirait, elle aussi, par ne montrer qu'une même moitié de son pourtour à son satellite [1,2]. Mais bien avant que cet état ne puisse se réaliser, le Soleil passera par des phases explosives de nova qui balayeront le système Terre-Lune, voire des planètes plus éloignées, comme Mars et Jupiter.

Le phénomène des marées ne se limite pourtant pas uniquement à la mer. La partie solide de la Terre connaît aussi des marées, mais les déplacements

engendrés se font sans heurts et nous ne les percevons pas, même s'ils représentent des variations du rayon terrestre de l'ordre de 50 cm à 1 m. Aujourd'hui on peut mettre en évidence ces variations de niveau au moyen de gravimètres très sensibles. La Lune, entièrement solide, est elle aussi déformée: ainsi elle est un peu allongée dans la direction de l'axe Terre-Lune. Vu l'ellipticité de l'orbite lunaire, la distance entre les deux astres n'est pas constante et la déformation lunaire ne l'est pas non plus. On peut montrer que l'ensemble des effets de marées considérés plus haut ne ralentit pas seulement la rotation propre de la Terre, mais qu'elle a aussi ralenti la Lune pour l'amener dans la situation actuelle. De plus, elle fait maintenant s'éloigner notre satellite au rythme de quelques trois centimètres par année [2]. Cet éloignement progressif a pu être confirmé grâce aux rétro-rélecteurs déposés sur la Lune par les astronautes d'Apollo [3].

Le cas de satellites qui sont dans le même état que celui de la Lune par rapport à la Terre est en fait très fréquent dans le système solaire. Ainsi les deux satellites de Mars, Phobos et Deimos, sont dans cette situation. Pour Jupiter, au moins huit des seize satellites les plus importants [4] y sont aussi, en particulier les quatre grands satellites GALILÉENS, Io, Europa, Ganymède et Callisto; dans trois cas la rotation propre des satellites est encore inconnue. Parmi les dix-huit satellites répertoriés de Saturne, pas moins de neuf sont figés dans cette attitude et pour huit autres leur rotation propre n'a pas encore été élucidée.

Pluton et son unique satellite Charon ont depuis longtemps atteint cette sorte de phase encore plus ultime évoquée au début, celle de deux objets célestes dont les mêmes hémisphères se font continuellement face. Il faut dire que ces deux corps ont des masses assez semblables (0,0026 masses terrestres pour Pluton et 0,000325 pour Charon) et qu'ils sont très rapprochés (19600 km, soit seulement 1/20 environ de la distance entre la Terre et la Lune).

2. Pas-de-deux

Les observations optiques de Mercure suggéraient que par rapport au Soleil, cette planète qui en est la plus proche,

se trouvait dans l'état ultime décrit au § 1, tournant sur elle-même au rythme de sa période orbitale et présentant ainsi toujours la même face au Soleil. La communauté des astronomes ne fut donc pas peu surprise, lorsque l'effet Doppler constaté lors de réflexions radar sur les limbes de la planète, révélèrent que la rotation propre de Mercure ne se fait pas en 87,969 jours, mais seulement en 58,646 jours, soit exactement aux deux tiers de sa période orbitale [5]. Ce synchronisme particulier n'est pas un phénomène passager. La précision du rapport observé implique une très grande stabilité temporelle. Alors que dans l'état ultime soupçonné d'abord un côté de l'astre aurait été très chaud et l'autre extrêmement froid, cette rotation un peu plus rapide réduit profondément cette différence de températures à la surface de l'astre. Le côté éclairé peut tout de même atteindre +340°C alors que le côté sombre se refroidit quelquefois à -60°C.

Ce phénomène de résonance signifie qu'à l'intérieur de Mercure la distribution des masses ne satisfait pas une symétrie parfaitement sphérique. En d'autres termes, les deux moments d'inertie principaux dans le plan de l'orbite sont inégaux. La résonance correspond à un état piégé. Lorsque la planète est au périhélie de son orbite l'axe du moment minimal pointe toujours en direction du Soleil, mais à chaque tour elle lui montre des faces opposées! De toute évidence, l'excentricité de l'orbite joue aussi un rôle important dans cette résonance.

3. Pas-de-trois

Le 7 janvier 1610 Galilée découvrait les premiers satellites d'une planète autre que la Terre. Le soir suivant, ces mêmes satellites étaient aussi vus par un astronome allemand, Marius, et c'est Marius qui leur donna les noms par lesquels ils sont désignés aujourd'hui : Io, Europa, Ganymède et Callisto [5]. Jupiter et ces quatre satellites formaient une sorte de système solaire en miniature. Galilée, qui avait déjà proposé ses lunettes à la marine vénitienne, eut bientôt l'idée que ce système représentait une horloge très précise, susceptible de fournir l'heure exacte aux marins, n'importe où sur le globe. Il fallait, bien sûr, que Jupiter soit visible au firmament nocturne de l'endroit. De telles conditions ne sont malheureusement réalisées que moins d'une fois sur deux. Galilée savait aussi que, suite aux rotations orbitales de la Terre et de Jupiter, la distance entre ces deux planètes n'est pas constante. Pour obtenir l'heure il fallait donc aussi tenir compte du temps de parcours de la lumière. Mais à cette épo-

que on n'avait aucune idée concernant la vitesse de la lumière, bien qu'il soit avéré que Galilée a essayé de la déterminer au moyen de signaux émis depuis des montagnes aux alentours de Pise. Mais les moyens nécessaires à de telles mesures étaient alors totalement inadéquats pour cette entreprise.

En 1858 on avait déjà d'excellents moyens de mesurer des écarts de temps et l'horloge jupiterienne fut alors utilisée pour confirmer que la vitesse de la lumière dans l'espace sidéral est bien la même que celle trouvée par les mesures de laboratoire. En effet, si on observe Jupiter en opposition et en conjonction avec le Soleil, la différence des distances entre la Terre et Jupiter est égale au diamètre de l'orbite de la Terre. Ce diamètre est très proche de 300 millions de km et la différence d'heure enregistrée, soit 16 minutes et demi, est voisine de 1000 secondes. Ainsi, le rapport de ces deux nombres donne bien les 300 000 km/s qui nous sont familier [6].

Bien après GALILÉE on remarqua que les périodes orbitales des trois satellites intérieurs, Io, Europa et Ganymède, étaient liées par un surprenant synchronisme. La période T_2 d'Europa est environ le double de celle T_1 d'Io,

$$T_2 \approx 2 T_1, \quad (1)$$

et celle T_3 de Ganymède est à son tour à peu près deux fois plus longue que celle d'Europa,

$$T_3 \approx 2 T_2. \quad (2)$$

La période orbitale de Callisto, par contre, n'est pas un multiple simple de celle de Ganymède.

Vers 1800 PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827) réussit à démontrer que les périodes sidérales, exprimées en jours terrestres, $T_1 = 1,769137786$ j, $T_2 = 3,551181041$ j, $T_3 = 7,15455296$ j, sont soumises à la relation apparemment parfaitement exacte [7]:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{3}{T_2} + \frac{2}{T_3} = 0. \quad (3)$$

Avec les périodes les plus récentes connues [4], cette équation est vraiment satisfaite à la perfection, l'écart résiduel étant celui de la dernière décimale, soit environ 10^{-10} j⁻¹!

Laplace remarqua aussi que les longitudes respectives des satellites obéissent à la relation

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 180^\circ. \quad (4)$$

Cette équation peut aussi être écrite de deux autres façons plus explicites:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) + 2(\lambda_3 - \lambda_2) = 180^\circ \quad (5)$$

et

$$3(\lambda_1 - \lambda_2) + 2(\lambda_3 - \lambda_1) = 180^\circ. \quad (6)$$

Par l'Eq. (5) on voit que périodiquement, lorsque les satellites 2 et 3 (Europa et Ganymède) sont sur le même rayon, le premier, Io, est sur le rayon opposé. Ces conjonctions des trois satellites sont appelées **grandes conjonctions**. Mais la ligne des grandes conjonctions n'est pas immobile; elle tourne lentement à la vitesse angulaire de [8]:

$$360^\circ \times \left[\frac{1}{T_1} - \frac{2}{T_2} \right] = 360^\circ \times \left[\frac{1}{T_1} - \frac{2}{T_3} \right] = 0,7395062^\circ \text{ par jour}^{(1)}. \quad (7)$$

Manifestement, c'est parce que les relations $T_2 \approx 2 T_1$ et $T_3 \approx 2 T_2$ ne sont pas satisfaites exactement que la ligne des grandes conjonctions est en rotation. Si elles étaient parfaitement suivies, les périodes suivraient automatiquement l'Eq. (3), et cette troisième relation ne serait alors plus indépendante des deux premières.

Il y a aussi des conjonctions ordinaires, avec deux satellites sur un même rayon; le troisième est alors à 90° ou 60° de ce rayon. Ainsi, lorsque $\lambda_2 = \lambda_1$ on tire de l'Eq. (5) que $\lambda_3 = \lambda_2 + 90^\circ$, et si $\lambda_3 = \lambda_1$ l'Eq. (6) exige que $\lambda_2 = \lambda_1 - 60^\circ$.

Tout ce que nous venons de dire concernant les orbites des trois premiers satellites Galiléens se rapporte en réalité à des sortes de points d'attache qui sont des minima de potentiel, autour desquels les satellites exécutent de petits mouvements, appelés **mouvements de libration**. Ces points particuliers des orbites sont d'ailleurs appelés **points de libration**. Le terme de **libration** signifie que l'objet oscille généralement autour du minimum de potentiel, tout en tournant autour de la planète. On peut dire que les satellites exécutent de minuscules orbites secondaires dans les systèmes de coordonnées liés à ces points d'attache.

Selon SINCLAIR [9] il faut considérer les équations (1) à (3) comme représentant trois résonances indépendantes. En effet, la relation (3) ne concerne que les longitudes des trois satellites, alors que les relations (1) et (2) séparément se rapportent aux excentricités. On peut mentionner ici que le volcanisme bien connu d'Io est précisément causé par l'excentricité à laquelle son orbite est **forcée** par la résonance que décrit l'Eq. (1). Un argument de poids vient confirmer le point de vue de SINCLAIR: les périodes orbitales des satellites d'Uranus, Miranda ($T_1 = 1,41347925$ j), Ariel ($T_2 = 2,52037935$ j) et Umbriel ($T_3 = 4,1441772$ j) satisfont aussi la relation (3), bien que de façon beaucoup moins parfaite, soit à $2 \cdot 10^{-4}$ j⁻¹ près; mais les périodes de ces trois satellites ne sont pas dans des rapports simples comme celles des trois satellites Galiléens intérieurs,

dont nous avons vu qu'ils satisfont assez bien les relations (1) et (2). De plus, malgré de très soigneuses observations, on n'a pas observé de mouvements de libration pour ces satellites uraniens.

Des résonances semblables, bien que ne concernant que deux corps célestes, sont aussi réalisées par les paires de satellites de Saturne «Mimas – Thétyss» et «Encélade – Dioné», avec des rapports de périodes de 1 à 2, et par la paire «Titan – Hypérion», où les périodes sont dans le rapport de 3 à 4 [4]. Les deux premiers exemples sont particulièrement intéressants en ce sens que les deux partenaires ne sont pas sur des orbites adjacentes. SINCLAIR [10] a pourtant montré qu'on peut expliquer leur synchronisme **forcé** par une interaction gravitationnelle de marées, comme nous l'avons vu au § 1.

Des arguments de cette nature ne peuvent pas être invoqués pour le couple Titan-Hypérion. Alors que les quatre satellites précédents ont des dimensions toutes inférieures à 600 km, on sait que Titan est un des plus grands satellites du système solaire, nettement plus grand que notre propre Lune et quelques 6000 fois plus massif que son partenaire Hypérion. Selon SINCLAIR ce couple s'est probablement formé il y a fort longtemps, à une époque où d'énormes quantités de matière circulaient sur une grande variété d'orbites. Alors que les satellites majeurs prenaient forme, presque toute cette matière s'est accrétée aux satellites en formation ou a été éjectée. Les seuls objets qui purent rester au voisinage de Saturne sont ceux dont par chance les orbites évitaient régulièrement celle de Titan! Nous retrouverons une situation tout à fait semblable au § 7, lors de l'étude de la résonance entre Pluton et Neptune.

Comment faut-il comprendre la stabilité de ces résonances, par quel mécanisme ces mouvements maintiennent-ils leur régularité? Même si Copernic ne fut pas le premier à proposer pour les planètes des orbites circulaires, il réussit pour la première fois à faire accepter cette idée par le monde scientifique de son époque. Presque cent ans plus tard, au début du XVII^e s., Képler démontra que loin d'être circulaires, les orbites des planètes et de leurs satellites sont

1) Si les trois périodes étaient parfaitement concordantes les deux expressions de l'Eq. (7) devraient fournir des valeurs identiques à 9 ou 10 décimales près. Mais T_3 n'est donné que par 9 chiffres. Si on remplace la valeur du texte [4] par $T_3 = 7,154552964$ j, les deux expressions convergent sur $0,739506202^\circ \text{ j}^{-1}$ pour la vitesse de rotation des grandes conjonctions. On note aussi que cette valeur de T_3 satisfait l'Eq. (3) à 10^{-12} j⁻¹ près!

en réalité des ellipses. Aujourd'hui on a franchi un pas supplémentaire, on sait que l'ellipticité des orbites n'est qu'une très bonne première approximation de la réalité. A la suite d'interactions, du type de celles qui sur la Terre produisent les marées, ces orbites subissent des déformations. Les ellipses ne sont en réalité pas parfaitement fermées, leur excentricité n'est pas stable, ni non plus l'orientation de leurs axes. Dans un système où deux ou trois corps sont en résonance, si l'un d'entre eux arrive un peu en retard à son rendez-vous, les orbites de tous les participants seront un peu déformées, de façon à accélérer le retardataire et rétablir le synchronisme parfait de la résonance. C'est ce mécanisme qui assure la grande pérennité de la résonance des satellites galiléens de Jupiter, mais aussi celle de toutes les résonances que nous évoquons dans cet article, en particulier l'interaction qui permet à Pluton de rester toujours bien éloigné de sa grande voisine Neptune.

4. Polonaise

A peu près à la même époque qui voyait LAPLACE étudier les satellites galiléens de Jupiter, JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813) s'attaquait au problème des trois corps. S'il est bien connu que ce problème n'a apparemment pas de solution analytique, LAGRANGE lui trouva pourtant quelques propriétés des plus intéressantes : lorsqu'une planète tourne autour du Soleil, les deux points de l'orbite qui sont 60° en avance ou 60° en retard sur la planète sont des endroits où il y a un maximum du potentiel gravitationnel. Mais sous l'effet de la force de Coriolis, un objet de très petite masse par rapport à la planète peut se trouver piégé autour de l'un ou l'autre de ces deux points. Sa période de révolution autour du Soleil serait alors identique à celle de la planète. Ces points particuliers sont appelés points de **libration de Lagrange** ; une représentation en est donnée à la Fig. 1.

Du temps de LAGRANGE on ne trouvait pas d'exemple qui aurait illustré et confirmé les calculs du mathématicien. Aujourd'hui on connaît plus de 450 astéroïdes qui oscillent autour des deux points de libration de LAGRANGE, en avance (L_4) ou à la traîne (L_5) de Jupiter. Le premier de ces astéroïdes, découvert en 1906, a été nommé Achille. Les suivants ont tous reçu le nom d'un des héros de la guerre de Troie, de sorte que l'on parle maintenant des astéroïdes du **groupe de Troie** (cf. Fig. 2).

Le potentiel gravitationnel autour des points de libration L_4 et L_5 est loin d'avoir une symétrie sphérique; la forme des surfaces équipotentielles est plutôt celle de

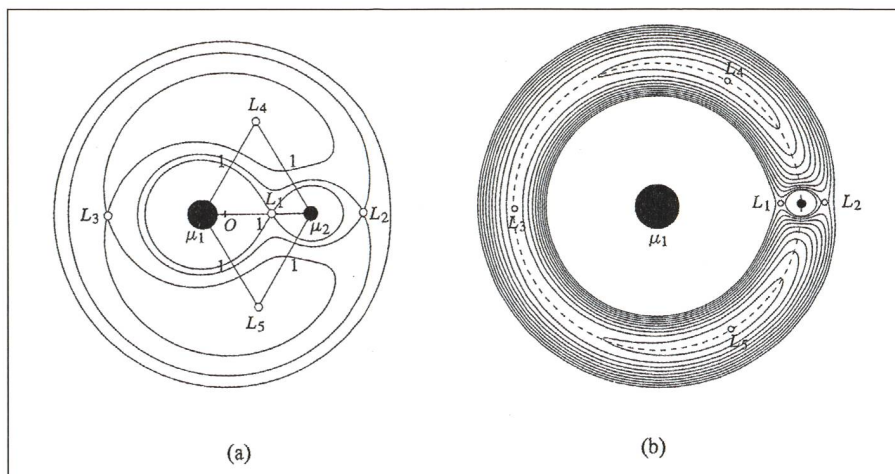
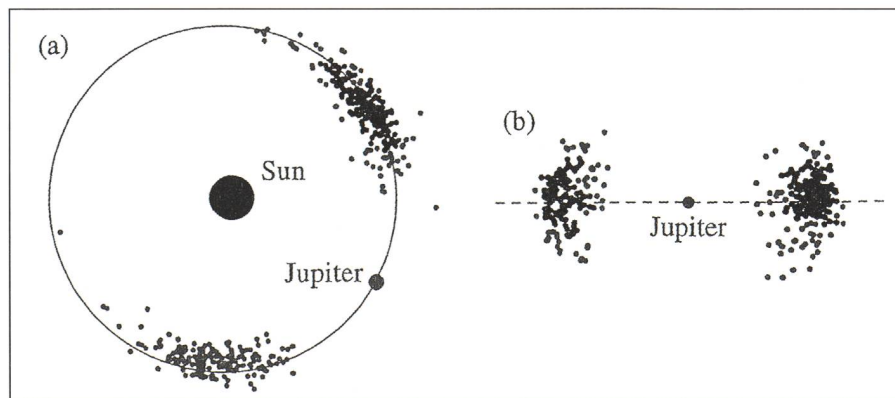


Fig. 1. Il est bien connu que le problème des trois corps n'a probablement pas de solution analytique. Mais le cas un peu plus simple où deux corps de masses appréciables sont en rotation sur des orbites circulaires, alors que le troisième a une masse négligeable, a été étudié par de nombreuses méthodes approchées. Lagrange en particulier a pu montrer qu'il y a alors deux points particuliers L_4 et L_5 où le potentiel devient maximum. Ces points sont respectivement 60° en avance et 60° en retard sur l'orbite du plus petit des deux corps majeurs. Suivant l'amplitude et la trajectoire d'incidence, un très petit objet peut, sous l'effet de la force de Coriolis, se trouver piégé autour d'un de ces deux points, qui deviennent ainsi des centres de libration. Mais cela n'est possible que si le rapport de masse des deux corps majeurs dépasse la valeur de 24,96. Le graphe (a) se rapporte au cas d'un rapport des masses de 5, alors qu'en (b) ce rapport de 100 est proche de celui entre la Terre et la Lune (81). Les trois premiers points L_1 , L_2 et L_3 sont sur la droite reliant les corps principaux. Il s'agit de points selle du potentiel. Des orbites stables autour de ces points ne sont possibles qu'avec l'aide de petites fusées d'appoint. L_1 , L_2 et L_3 ne sont donc pas des points de libration [11]. (figure reprise de [1])

crêtes allongées. Les orbites des astéroïdes gravitant autour de ces points ne sont donc pas des ellipses fermées, mais une suite de boucles de dimensions très variables, canalisées par les crêtes et souvent perturbées par les autres occupants du site. Dans le jargon astronomique ces trains de boucles qui ne se referment pas sont appelés **orbites en têtards** (de l'anglais: *tadpole orbits*). Si l'énergie totale des astéroïdes y reste en général constante, elle est cependant continuellement modulée entre les formes cinétiques et potentielles.

Il vaut aussi la peine de mentionner qu'un satellite artificiel a été placé autour du point L_1 du système Soleil-Terre, à environ 1/100 d'UA de la Terre (une UA ($1,496 \cdot 10^8$ km) est la distance moyenne entre la Terre et le Soleil; on rencontre souvent l'équivalent anglais AU, Astronomical Unit; pour simplifier AU sera utilisé dans les figures). Ce satellite ne peut être maintenu autour de cet autre maximum du potentiel qu'à l'aide de petites fusées d'appoint. Il permet l'observation du Soleil hors de l'atmosphère et surtout, il nous avertit avec une avance

Fig. 2. Distribution des astéroïdes de Troie sur l'orbite de Jupiter, le 18 décembre 1997 à 0^h UT. En (a) les astéroïdes sont projetés sur le plan de l'écliptique, en (b) ils sont vus le long de l'axe Jupiter-Soleil et la ligne en tirets représente l'orbite de la planète. (repris de [1])



de l'ordre d'une heure, des variations d'intensité du vent solaire. Les éruptions violentes à la surface du Soleil sont à l'origine des orages magnétiques, susceptibles de perturber sévèrement nos communications radio et nos systèmes de distribution d'électricité. Grâce au satellite artificiel il est alors possible de prendre des mesures préventives.

Les deux petits satellites Télésto (15 x 12,5 x 7,5 km) et Calypso (15 x 8 x 8 km) de Saturne sont eux sur les points de Lagrange à l'avant et à la traîne du gros satellite Thétys, raison pour laquelle leurs périodes orbitales sont toutes trois absolument identiques (1,887802160 j) [9]. Les dimensions des deux petits satellites trahissent la faiblesse de la force gravitationnelle, comparée aux autres forces de la physique. En effet, des objets de petite dimension n'ont généralement pas une forme sphérique. C'est seulement à partir de dimensions de l'ordre de plusieurs centaines de kilomètres qu'une forme sphérique se réalise, comme le démontre Thétys avec ses dimensions presque isotropes de 536 x 528 x 536 km.

5. Valse

Un des plus beaux jeux de résonance est celui que présentent les deux satellites Janus et Epiméthée de Saturne. On constate d'abord que ces deux satellites ont pratiquement la même période (en ce moment, 0,6945 j pour Janus et 0,6942 j pour Epiméthée [4]). Les deux satellites sont tous deux petits: 97 x 95 x 77 km pour Janus et 69 x 55 x 55 km pour Epiméthée. Le jeu que jouent ces deux corps est le suivant. A un moment donné, Janus est sur une orbite à peine plus proche de Saturne qu'Epiméthée. Sa vitesse angulaire est alors un peu supérieure à celle de son compagnon. Cela se déduit aisément de la troisième loi de Képler. Si on appelle T_J et T_E les périodes orbitales des deux satellites et R_J et R_E les rayons de leurs orbites, supposées parfaitement circulaires (leurs excentricités sont effectivement très faibles: $e_J = 0,007$ et $e_E = 0,009$), il vient avec Képler

$$\frac{R_J^3}{T_J^2} = \frac{GM}{4\pi^2}, \quad (8)$$

et pour la vitesse on obtient

$$V_J = \frac{2\pi R_J}{T_J} = \sqrt{\frac{GM}{R_J}}, \quad (9)$$

ainsi que des relations similaires pour Epiméthée, où M est la masse de la planète, ici Saturne, et G la constante de la gravitation. On voit que la vitesse du satellite intérieur est toujours plus grande que celle du satellite extérieur; cette différence est encore accentuée pour

les vitesses angulaires. Le satellite intérieur va donc progressivement rattraper le satellite lancé sur l'orbite extérieure.

Tant que les deux satellites sont éloignés l'un de l'autre, leurs trajectoires respectives sont entièrement contrôlées par la masse 10^9 à 10^{10} fois plus grande de Saturne. Mais lorsque le satellite intérieur se rapproche de son compagnon extérieur par l'arrière, les deux commencent à ressentir leur présence mutuelle. On pourrait s'attendre à une collision, mais les deux corps ne s'approchent jamais à moins de 15 000 km environ l'un de l'autre ($\sim 5,6^\circ$ sur les orbites). Sous l'effet de leur attraction mutuelle on pense que le satellite intérieur, plus rapide, va encore accélérer, mais ce qui se passe en réalité est qu'il augmente son énergie potentielle et passe progressivement sur une orbite supérieure où, selon la troisième loi de Képler, sa vitesse se trouve diminuée, un comportement qui peut, à première vue, paraître surprenant²⁾. Le satellite de l'orbite extérieure, par contre, descend sur une orbite plus basse, de sorte que sa vitesse augmente! Les satellites font donc simplement un échange d'orbites; le satellite intérieur devient satellite extérieur, et vice-versa. Après l'échange d'orbite tout est prêt pour que le jeu recommence, avec des satellites qui ont simplement échangé leurs rôles respectifs. C'est donc bien une véritable valse qu'effectuent Janus et Epiméthée!

Après la découverte des deux satellites par la sonde *Voyager 1*, la NASA avait d'abord présenté un film où l'on voyait le satellite intérieur dépasser son compagnon. Les deux échangeaient alors leurs orbites en faisant une demi-rotation l'un autour de l'autre. Une étude plus sérieuse a montré qu'il n'y a jamais de dépassements [1]. L'échange d'orbite se fait avant que le dépassement ne se produise, de sorte que le satellite rapide est ralenti et voit filer son compagnon. Les deux objets restent donc toujours dans le même ordre et les sauts d'orbites se produisent à peu près tous les quatre ans.

Les masses des deux satellites étant dans un rapport voisin de 1 à 4, le rayon d'environ 150 000 km de l'orbite du plus léger varie de quelques 80 km et celui du plus lourd de 20 km seulement. Dans le système de coordonnées qui tourne autour de Jupiter à la vitesse du moyen mouvement des deux satellites, les orbites prennent la forme d'un **fer à cheval** très étroit et hautement circulaire. On pourrait aussi parler de segments de deux cerceaux très étroits. Le segment d'arc couvert par Epiméthée est quatre fois plus long ($\sim 285^\circ$ contre $\sim 70^\circ$) et comme nous l'avons vu, il est quatre

fois plus large que celui de Janus. C'est une conséquence du rapport de masse des deux satellites. Au § 6 nous rencontrerons à nouveau des orbites en forme de fer à cheval, mais d'un type beaucoup plus compliqué.

On sait aujourd'hui que la densité de ces satellites est très faible, de 0,65 g/cm³ environ, semblable à celle de comètes plutôt que d'astéroïdes. Ainsi Janus et Epiméthée sont probablement des fragments de comètes happés par Saturne.

6. Tango

En 1986 on a cru découvrir un astéroïde au voisinage du point L_4 de Lagrange qui précède la Terre sur son orbite. Cet astéroïde a été l'objet de plusieurs controverses avant qu'on ne soit certain de son comportement, d'où au début une pléthore de noms (3753, 1986 TO, 1983 UH). On a, par exemple, pu l'identifier sur un cliché obtenu en 1983, d'où la désignation de 1983 UH. Finalement, une fois que son orbite compliquée fut comprise, en 1997 [11], on se fixa sur le chiffre **3753** et sur le nom de **Cruithne**, tiré de la mythologie des Pictes (nom donné jusqu'au IX^e s. au peuple établi dans les basses terres de l'Écosse; c'est pour se protéger de ce peuple guerrier qu'en 122 de notre ère les Romains construisirent la fameuse muraille d'Hadrien, ou mur des Pictes, qui traverse l'Angleterre d'une côte à l'autre, près du niveau du 55^e parallèle). L'astéroïde Cruithne est très petit. De sa magnitude visuelle absolue de 15,1 on en a déduit que ses dimensions ne sont que de l'ordre de 5 km.

Comme la Lune, Cruithne est un compagnon de la Terre; mais son orbite est beaucoup plus compliquée. Plusieurs figures sont nécessaires pour décrire son

2) On rencontre un phénomène semblable lors du freinage atmosphérique de satellites artificiels. Une partie de la perte d'énergie potentielle est absorbée par le freinage, mais le reste se retrouve dans une énergie cinétique accrue: la vitesse du satellite augmente lorsqu'il perd de l'altitude, en accord avec les lois de Képler. Dans l'interaction entre Janus et Epiméthée on note que la vitesse de l'un des satellites diminue alors que celle de l'autre s'accroît. Il y a une certaine analogie avec le cas d'un électron dans un puits de potentiel: suivant la direction d'un champ électrique appliqué et la position de l'électron dans le puit, l'électron peut voir son énergie potentielle croître ou décroître et même lors d'une augmentation de cette énergie potentielle, la vitesse de l'électron pourra s'accroître. Ces phénomènes sont bien connus pour les électrons dans le potentiel des solides. Suivant la position d'un électron dans la structure des bandes d'énergie, un champ électrique externe aura des effets variables sur sa vitesse et sur son énergie potentielle. Ces comportements, d'abord surprenants, ont donné naissance au concept de **masse effective** des électrons dans les solides.

comportement. Dans la Fig. 3 nous avons dessiné les orbites des quatre planètes mineures Mercure, Vénus, Terre et Mars, ainsi que l'orbite elliptique et rétrograde de Cruithne, indiqué par le point noir. Il se trouve que le demi grand-axe a de l'astéroïde est presque identique à celui de l'orbite terrestre, de sorte que les deux périodes orbitales sont très proches. Dans la situation actuelle, qui est aussi celle de la Fig. 3, le demi grand-axe de Cruithne est un peu plus petit que celui de la Terre. Selon la troisième loi de KÉPLER (Eq. 5), sa période orbitale, proportionnelle à $a^{3/2}$, est donc un peu plus courte: pendant que la Terre fait une révolution annuelle, Cruithne va un peu au-delà d'un tour de son orbite elliptique. Mais l'orbite de Cruithne n'est pas vraiment fermée; non seulement l'astéroïde va au-delà d'un tour d'orbite, mais il se déplace aussi un peu vers l'avant, c.-à-d. dans le sens positif du dessin (sens contraire aux aiguilles d'une montre). Au cours du temps, les points a et b de la Fig. 3 prennent donc progressivement de l'avance sur la Terre.

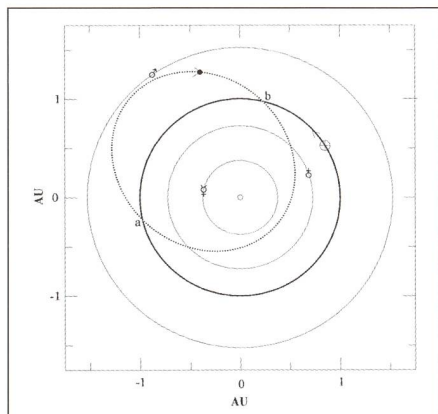


Fig. 3. L'orbite de 3753 Cruithne et celles des planètes mineures, Mercure, Vénus, Terre et Mars, projetées sur le plan de l'écliptique. L'orbite de Cruithne est rétrograde, elle croise celles de la Terre et de Vénus et s'approche de celles de Mars et Mercure. Le demi grand-axe a de cette orbite elliptique est presque le même que celui de la Terre et sa période orbitale est donc très proche d'une année. Mais l'orbite de Cruithne ne se referme pas parfaitement, de sorte que les positions respectives de son orbite et de celle de la Terre ne sont pas fixes, mais évoluent comme cela est décrit à la Fig. 4.

La Fig. 4 est une autre représentation de ce que nous venons de décrire et qui devrait aider la compréhension. Cette figure est semblable à la Fig. 3, mais elle décrit ce qui se passe dans un système de coordonnées liées à la Terre. Alors que dans la Fig. 3 la Terre tourne dans le sens de la flèche, dans la Fig. 4 elle reste fixée au point indiqué. L'orbite

presque parfaitement elliptique de Cruithne dans la Fig. 3 est alors complètement déformée; elle prend la forme d'une fève de haricot ou d'un rein (en anglais on parle de *kidney bean orbit*). Dans la Fig. 4 le trait fin correspond à la situation présente, où la période orbitale de Cruithne est un peu plus courte qu'une année et sur cette figure on voit effectivement que l'orbite n'est pas exactement fermée, de sorte qu'après chaque tour d'orbite l'astéroïde augmente un peu son avance sur la Terre. Il finira alors par arriver dans la position correspondant à l'orbite dessinée au moyen d'un trait épais. Le point d'abord marqué a est devenu A . Dans cette situation Cruithne s'est fortement rapproché de la Terre et l'interaction avec notre planète renvoie l'astéroïde sur ses pas. Sa période devient alors un peu plus longue qu'une année, période au cours de laquelle il ne réussit pas à faire un tour d'orbite complet. L'orbite ne se referme toujours pas, mais va maintenant au-delà du point b . Cruithne s'éloigne à nouveau de la Terre, mais à reculons cette fois, comparé à la séquence précédente.

C'est seulement lorsque le point a de l'orbite s'approche de la Terre que les inversions décrites plus haut se produisent. En effet, l'orbite de Cruithne est inclinée d'environ 20° , comme le montre la Fig. 5, et le point b , au-dessous du plan de l'écliptique, est très éloigné de la Terre, alors que le point a est pratiquement dans ce plan. C'est donc toujours dans une situation proche de celle décrite par l'orbite en trait épais que les renversements se produisent. Les derniers renversements ont eu lieu en 1515 et 1900 environ et l'orbite fléchée se rapporte au début de l'an 2000. En ce moment le temps nécessaire pour parcourir la fève de l'orbite de Cruithne est donc un peu plus court qu'une année. Le prochain renversement, en 2285, verra ce temps s'élever au-dessus d'une année, alors qu'il redevenra plus court vers 2670.

La Fig. 6 est un graphe des changements de longueur du demi grand-axe a de l'orbite en forme de fève de Cruithne en fonction du temps. Comme nous l'avons vu plus haut ces longueurs oscillent autour d'une UA et entraînent des variations de la période de part et d'autre d'une année. Mais ces variations de périodes ont elles-mêmes une périodicité d'environ 770 ans, de sorte que la **véritable période de Cruithne**, soit le temps nécessaire pour retrouver des conditions identiques, est effectivement de **770 ans!**

Revenons à cette véritable orbite de Cruithne, et admettons qu'on l'aurait vraiment dessinée sur 770 ans. Dans la

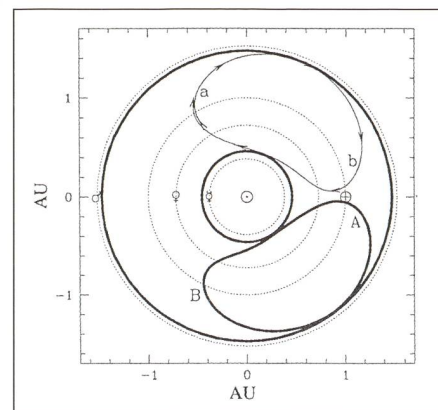


Fig. 4. Représentation semblable à celle de la Fig. 3, mais dans un système de coordonnées fixé à la Terre. Dans une telle représentation l'orbite de Cruithne prend la forme d'une fève ou d'un rein. On note que son orbite effleure toujours celles de Mars et de Mercure. Le trait fin fléché se rapporte à l'an 2000. En ce moment la période orbitale de Cruithne est un peu plus courte qu'une année. A l'opposé de la Fig. 3 on montre correctement ici que cette orbite n'est pas fermée et que les points a et b se déplacent progressivement dans le sens positif. Vers 2285 l'orbite sera dans la position du trait plein et les points a et b seront alors devenus A et B . Le point A est proche de la Terre et l'interaction avec notre planète y est plus forte, interaction dans laquelle l'astéroïde voit son grand-axe s'allonger au-delà d'une UA et sa période devenir plus longue qu'une année (cf. Fig. 6). L'orbite n'est toujours pas fermée, mais maintenant c'est du côté du point b qu'elle s'épanche: l'orbite se déplace dans le sens négatif pour revenir presque dans la situation du trait plein, où elle se fait renvoyer dans le sens positif. Le point b de l'orbite étant situé hors du plan de l'écliptique (cf. Fig. 5) il ne peut pas jouer le même rôle que le point a . (repris de [11])

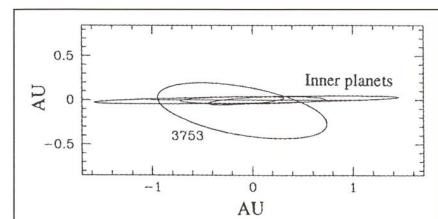


Fig. 5. Les orbites des planètes mineures et de l'astéroïde Cruithne vues dans la direction du point vernal, c.-à-d. dans une direction parallèle au plan de l'écliptique avec le Soleil à l'origine. Le point a de l'orbite de Cruithne est proche de ce plan, alors que le point b est bien au-dessous. (repris de [11])

représentation de la Fig. 4, cette orbite prendrait alors la forme d'un **fer à cheval**. Mais il vaut maintenant la peine d'insister sur les différences essentielles entre les orbites en fer à cheval de Janus et Epiméthée et celle de Cruithne. Dans le

cas de Janus et Epiméthée nous avons vu que les fers à cheval ont la forme de cerceaux bien circulaires mais très étroits. D'autre part, le pourtour des fers représente les orbites obtenues dans le système de coordonnées en rotation. Le cas de Cruithne est bien différent. D'abord, le fer à cheval est un disque parfaitement circulaire, d'environ 3 UA de diamètre et percé d'un grand trou de près d'une UA. Le forgeron a fermé le disque en faisant se recouvrir les deux extrémités du fer d'une surface correspondant à peu près à une orbite en forme de fève. Ensuite, le pourtour du fer ne représente que l'enveloppe des parcours de l'orbite: le fer en forme de disque percé est sans cesse traversé du bord intérieur vers le bord extérieur du disque, et vice-versa, 770 fois au cours de la vraie période de Cruithne!

Un autre aspect de la comparaison avec Janus et Epiméthée vaut encore la peine d'être discuté. Janus et Epiméthée sont deux petits corps qui ont presque la même grandeur. Leur interaction se réduit à un échange d'orbites et se traduit par ces orbites en forme de fers à cheval. Dans le cas de la Terre et de Cruithne les astres concernés ont des masses totalement incommensurables et on ne peut parler d'échange d'orbites. Lors des interactions la Terre n'est pas vraiment perturbée par le minuscule astéroïde. Cruithne, au contraire, est fortement affecté par une interaction du même genre que celle qui se produit lorsque Janus et Epiméthée sont soudain proches l'un de l'autre; mais comme le montre la Fig. 6 il faut de nombreuses approches successives de la Terre pour effectuer les inversions des mouvements de l'orbite.

Par suite d'une lente précession, l'orbite de Cruithne croquera celle de la Terre en 2750, mais il est peut probable qu'une collision se produira. Dans 8000 ans, par contre, l'astéroïde sera nettement plus proche de Vénus, mais pourrait bien éviter aussi cette planète, tout comme il a évité Mars voici 2500 ans. D'un côté on pourrait penser que ces approches répétées de planètes signifient que l'orbite de Cruithne n'est pas très stable, mais d'un autre côté, la précision avec laquelle l'orbite est adaptée à ces planètes suggère qu'une origine récente est peu probable. Les calculs d'orbite vivent cependant vers le chaos dans un avenir pas très lointain, chaos dont l'origine pourrait cependant être de caractère purement numérique. Comme nous l'avons dit ailleurs [12], lorsque les conditions initiales ne sont qu'imparfaitement connues, la prédiction de l'avenir est forcément limitée.

Une étude plus récente [13] arrive à la conclusion que Cruithne devrait bien-

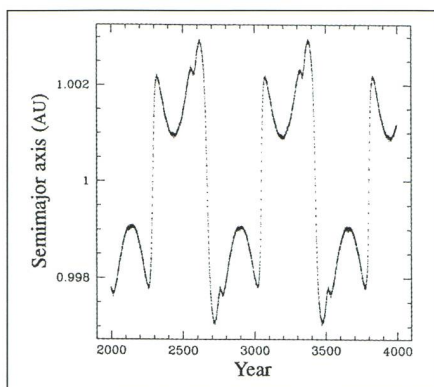


Fig. 6. Les variations du demi grand-axe a de l'orbite de Cruithne en fonction du temps pour les 2000 ans à venir. La période étant proportionnelle à $a^{2/3}$, elle passe de valeurs un peu inférieures à une année à des valeurs légèrement supérieures. Ces transitions correspondent aussi aux inversions du déplacement des orbites, en particulier celles en forme de fèves de haricot dans le système de coordonnées de la Fig. 4, qui est lié à la Terre. (repris de [11])

tôt devenir un satellite rétrograde de la Terre, dans quelques 10000 ans déjà, pour finalement rejoindre la grande catégorie des astéroïdes dont l'orbite croise celle de la Terre (les NEAs, de l'anglais «near Earth asteroids»). Les auteurs de ce travail postulent que parmi les NEAs il y en a un certain nombre qui sont en fait temporairement des satellites de la Terre, cela pour des périodes de quelques milliers ou dizaines de milliers d'années, le plus souvent sur des orbites rétrogrades, dont ils se font finalement éjecter.

7. A la disco, chacun pour soi

Les planètes Neptune et Pluton ont aussi des périodes orbitales qui sont dans un rapport simple de nombres entiers: $T_N \approx 164$ années et $T_P \approx 246$ années, soit dans le rapport de 2:3. Mais ici l'explication ne doit pas être cherchée dans une interaction gravitationnelle directe entre les deux corps, comme nous l'avons vu p. ex. au § 3. La résonance apparente provient ici du fait que Pluton doit absolument éviter de trop s'approcher de Neptune!

Lorsqu'on étudie Pluton on ne peut manquer de constater trois caractéristiques très particulières de cette planète: 1) l'inclinaison de l'orbite de Pluton sur le plan de l'écliptique dépasse 17° , c'est la plus grande de toutes les planètes; 2) cette orbite est aussi la plus excentrique de toutes, à tel point qu'elle plonge régulièrement à l'intérieur de celle de Neptune; 3) La masse de Pluton (0,00252 fois celle de la Terre) est presque 7000 fois inférieure à celle de Nep-

tune (17,2 fois la masse de la Terre) [4]. Ayant fait ces constatations on comprend aisément que si Pluton devait s'approcher un peu trop de Neptune, son orbite serait violemment perturbée. On peut imaginer que la petite planète pourrait, p. ex., entrer en collision avec Neptune, se faire capturer et devenir un simple satellite, ou encore se voir projeter hors du système solaire. Cela suggère que Pluton n'est pas une planète comme les autres, qui se sont formées en même temps, ou peu après, que la nébuleuse solaire ne s'effondre pour devenir l'astre que nous connaissons. Pluton n'est probablement qu'un gros astéroïde qui a été happé bien plus tard par le système solaire, mais dont, par chance, la trajectoire périodique qui s'est alors établie évitait régulièrement Neptune (cf. Fig. 7).

Sur la base de ces réflexions quelques astronomes ont entrepris une recherche systématique d'autres objets dont les orbites évitent soigneusement celle de Neptune et à leur grande surprise ils en ont trouvé des dizaines! Ces astéroïdes, piégés dans les parties extérieures du système solaire, forment une famille [14]. Leurs périodes orbitales ne sont pas toutes dans le rapport de 3:2 par rapport à celle Neptune, mais pour ceux dont la forte excentricité les fait plonger à l'intérieur de l'orbite de cette grande planète, les rapports sont toujours simples, comme on le voit à la Fig. 8. Dans la catégorie des rapports 2:1 on a trouvé deux objets et plusieurs dans les classes 4:3 et 5:3. La catégorie 3:2 de Pluton est la plus nombreuse. Les astéroïdes dont l'orbite plonge à l'intérieur de celle de Neptune ont reçu le nom de **Plutinos** et Pluton est le membre le plus massif et le plus grand de cette famille. Dans cette famille il y a probablement plus de 10000 objets dont les dimensions dépassent 100 km. Le rayon de Pluton, par exemple, est proche de 1200 km. Les astéroïdes qui ne plongent pas à l'intérieur de l'orbite de Neptune ont en général une petite excentricité. C'est aussi une famille composée de très nombreux partenaires, comme le suggère la Fig. 8.

Comment s'y est-on pris pour identifier tant d'astéroïdes aux confins du système solaire, dans ce qu'on nomme la ceinture de Kuiper? Les recherches ont commencé en 1986 avec le télescope de 1,3 m de l'Observatoire de Kitt Peak en Arizona et un détecteur CCD. Elles se poursuivent maintenant avec un instrument plus grand, le télescope de 2,2 m de la collaboration Canada-France-Hawaii, situé sur le meilleur site au monde, le sommet du volcan éteint de Mauna Kea aux îles Hawaii, à 4200 m

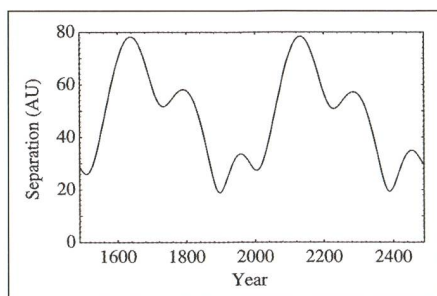


Fig. 7. Les variations de distance entre Neptune et Pluton, calculées pour la période entre les années 1500 et 2500, exprimées en UA. (repris de [1])

d'altitude. On utilise aussi le détecteur CCD de 100 millions de pixels, le plus sensible au monde, placé dans un appareil photographique immergé dans de l'azote liquide. Comme l'indique l'Eq. (9), à ces grandes distances les objets se déplacent plus lentement que ceux plus proches du Soleil. De plus, il était évident que ces astéroïdes lointains devaient nous apparaître bien moins brillants que ceux de la ceinture entre Mars et Jupiter. La stratégie a donc été de chercher des objets qui se déplacent à petite vitesse sur un fond d'étoiles fixes. La Fig. 9 est une suite de clichés montrant l'image du premier objet découvert par cette stratégie dans la ceinture de Kuiper. Sur ces photographies on voit le fond d'étoiles fixes, un astéroïde proche et relativement brillant qui transite rapidement et un astéroïde lointain, indiqué par la flèche, peu lumineux mais qui se déplace très lentement [14].

Quelques mots encore sur la ceinture de Kuiper. Cette ceinture commence à l'orbite de Neptune et s'étend sur une vingtaine d'UA au-delà. Sur la Fig. 8 elle va donc de 30 à 50 UA. Son épaisseur est de l'ordre de 20 - 25 UA, au-dessus et au-dessous du plan de l'écliptique. On admet que la ceinture contient environ 100 000 objets plus grands que 100 km et probablement des milliards qui dépassent les 5 km. À côté de cette pléthore d'astéroïdes, la ceinture est aussi le home de nombreuses comètes périodiques, telles que la comète de Halley. La masse totale contenue dans la ceinture de Kuiper n'est pourtant que de quelques dixièmes de la masse de la Terre.

Remerciements

L'auteur tient à remercier les Professeurs ANDREW SINCLAIR, CARL MURRAY et JEREMY TATUM pour de très utiles conseils. La plupart des sujets abordés dans cet article sont traités d'une façon plus mathématique dans l'excellent texte de MURRAY et DERMOTT [1].

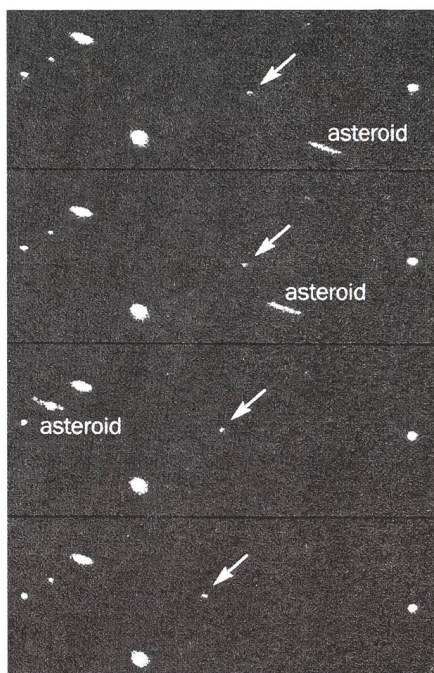


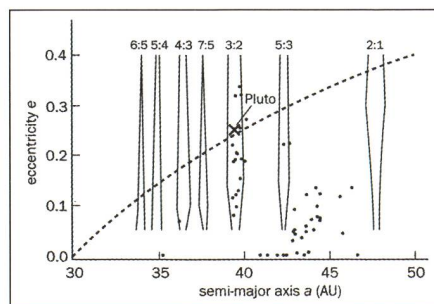
Fig. 9. La recherche d'objets de la ceinture de Kuiper se fait au moyen de très longues expositions avec les détecteurs CCD les plus sensibles (100 millions de pixels!), développés à l'Université de Hawaïi. Les astéroïdes n'ont pas de luminosité intrinsèque; ils ne peuvent que réfléchir la lumière du Soleil. Par conséquent, leur luminosité apparente décroît comme la quatrième puissance de leur éloignement. Dans cette suite de clichés on voit le premier objet trouvé dans la ceinture de Kuiper, **1992 QB1**, au moyen du télescope de 2,2 m de la collaboration Canada-France-Hawaïi sur le volcan éteint de Mauna Kea, à 4200 m d'altitude. L'objet, signalé par des flèches, se déplace lentement de la droite vers la gauche sur un fond d'étoiles et de galaxies fixes. Un astéroïde beaucoup plus proche, de la ceinture entre Mars et Jupiter, se manifeste par des traînées beaucoup plus brillantes qui se déplacent rapidement dans les trois clichés supérieurs. (repris de [14])

Dans un article à venir, mais en langue anglaise, l'auteur et deux collègues reviendront sur les points L_4 et L_5 de LA GRANGE. Il y sera montré comment la force de Coriolis permet à des objets de masse négligeable de se trouver piégés autour de ces points.

GASTON FISCHER
gfischer@vtx.ch

Rue de Rugin 1A, 2034 Pesieux, Suisse

Fig. 8. L'excentricité des astéroïdes trouvés dans la ceinture de Kuiper, reportée en fonction de leur demi grand-axe orbital (exprimé en unités astronomiques UA). Cette distribution n'est manifestement pas uniforme. On estime que plusieurs dizaines de milliers d'astéroïdes de plus de 100 km se trouvent dans la résonance 3:2, ces objets ayant une période égale à 3/2 fois celle de Neptune et un demi grand-axe d'environ 39,4 UA. Une autre grande famille est celle des astéroïdes qui ne plongent pas à l'intérieur de l'orbite de Neptune, ceux situés sous le trait en tirets. L'origine du graphique correspond pratiquement à l'orbite de Neptune, soit à un demi grand-axe d'environ 30 UA et à une très petite excentricité de $e=0,009$. (repris de [14])



Bibliographies

- [1] MURRAY C. D. AND DERMOTT S. F.: *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, **1999**. ISBN: 0 521 57295 9 h, 0 521 57597 4 p.
- [2] STACEY, FRANK D.: *Physics of the Earth*, 2nd Edition, John Wiley and Sons, Santa Barbara, **1977**. ISBN 0-471-81956-5.
- [3] DICKEY J. O. et al.: *Lunar Laser Ranging: A Continuing Legacy of the Apollo Program*, *Science* **265**, pp. 482-490 (22 July 1994).
- [4] *The Astronomical Almanac for the year 2001*, Washington and London.
- [5] BAKER, ROBERT H. AND FREDRIK LAURENCE W.: *Astronomy*, 9th Edition, Van Nostrand, New York, **1971**. Library of Congress No 74-127649.
- [6] *Scientific American*, January **1998**, p. 6: 50, 100, and 150 years ago, Velocity of light proved.
- [7] *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléiade, p. 1206, Gallimard, Paris, **1962**.
- [8] *Scientific American*, July **1981**, p. 54: Science and the Citizen, Resonant Explanations.
- [9] SINCLAIR, ANDREW T.: *On the Origin of the Commensurabilities Amongst the Satellites of Saturn*, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **171**, pp. 59-72, **1975**.
- [10] SINCLAIR, ANDREW T.: *The Orbital Resonance Amongst the Galilean Satellites of Jupiter*, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **160**, pp. 16-187, **1972**.
- [11] WIEGERT PAUL A., INNANEN KIMMO A. & MIKKOLA SEppo: *An Asteroïdal Companion to the Earth*, *Nature*, **387**, pp.685-686, (12 June 1997).
- [12] FISCHER GASTON: *Le système solaire est-il chaotique?*, *Orion*, **269**, pp. 210-211 (août 1995).
- [13] NAMOUNI F., CHRISTOU A. A. & MURRAY C. D.: *Coorbital Dynamics at Large Eccentricity and Inclination*, *Phys. Rev. Letters*, **83**, pp. 2506-2509 (27 September 1999).
- [14] JEWITT, DAVID: *The Kuiper Belt*, *Physics World*, p. 37 - 41, July **1998**, Institute of Physics, Dirac House, Temple Back, Bristol BS1 6BE, UK.