

<b>Zeitschrift:</b>	Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Astronomische Gesellschaft
<b>Band:</b>	59 (2001)
<b>Heft:</b>	303
<b>Artikel:</b>	Die Expansion des Raumes in der relativistischen Kosmologie
<b>Autor:</b>	Fischer, Gaston
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-897894">https://doi.org/10.5169/seals-897894</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die Expansion des Raumes in der relativistischen Kosmologie

GASTON FISCHER

## 1. Ein Gedankenexperiment

Nach der Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit  $c$  eine Grenzgeschwindigkeit. Oft wird dies so ausgedrückt, es sei nicht möglich, Information mit Geschwindigkeiten zu übertragen, die  $c$  überschreiten. Die Ausweitung des Universums ist jedoch eine *Expansion des Raumes selbst* und ist dieser Begrenzung nicht unterworfen. Wie ist dies zu verstehen?

Dieses scheinbare Paradox versuchen wir mit einem Gedankenexperiment zu beleuchten. Wir stellen uns einen zweidimensionalen Raum vor, als Oberfläche einer grossen Kugel, wie in Fig. 1 skizziert. An einem begrenzten Ort dieser Kugel befindet sich eine Bevölkerung sehr kleiner und platter Lebewesen. Diese Geschöpfe sind sich nur der zwei Dimensionen der Kugeloberfläche bewusst und haben das Gefühl, die Welt erstrecke sich flächenmässig ins Unendliche. Eines ist sicher, die Grenzen Ihres Universums haben sie nie wahrgenommen. Ungeachtet, wo sie wohnen, haben sie geforscht und Wissenschaften wie Mathematik und Physik entwickelt. Genau wie wir, mussten sie bald einsehen, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht übertrffen werden kann. Weiter forschend kamen sie bald zum Schluss, dass die Summe  $\Sigma$  der Winkel grosser Dreiecke den Wert  $\pi$  (d.h.  $180^\circ$ ) immer übertrifft. Diese Beobachtung bewog sie dann anzunehmen, ihr Universum sei nicht flach, sondern es sei *kugelförmig*, oder zumindest aber *geschlossen* oder *elliptisch*. In einem *offenen* oder *hyperbolischen* Universum wäre  $\Sigma < \pi$ , und in einem *flachen* oder *parabolischen* Universum wäre  $\Sigma = \pi$ .

Dank systematischer Vermessungen finden sie heraus, dass für alle Dreiecke diese Summe  $\Sigma$  immer gleich  $\pi$  plus eine Grösse proportional der Fläche  $A$  des einbeschriebenen Dreiecks herauskommt, d.h.

$$\Sigma = \pi + \alpha \cdot A. \quad (1)$$

Dieser Befund bestätigt die *Kugelförmigkeit* ihres Weltalls und führt sie zur Annahme, die Konstante  $\alpha$  sollte gleich  $1/R^2$  geschrieben werden, wo  $R$  den Radius ihres kugelförmigen Universums angibt. Aus vertieften Studien ihrer Vergangenheit kommen sie jedoch zum Schluss, dass diese Deutung von  $\alpha$  nur dann für alle Zeiten gilt, wenn ange-

nommen wird, dass der Radius ihres Universums fortwährend angestiegen ist. Dies tut er offenbar auch heute noch und zwar so schnell, dass seine Wachstumsrate die Lichtgeschwindigkeit übertrifft. Mit anderen Worten,  $\dot{R}(t) = dR(t)/dt$  kann grösser als  $c$  sein!

Als aussenstehende Beobachter können wir nun einige interessante Schlüsse ziehen:

- 1) Auf der Kugel kann die Lage eines Punktes durch seine Winkelkoordinaten  $\theta$  angegeben werden. Abgesehen von der Ausweitung des Kugelradius  $R(t)$  nehmen wir an, ein Gegenstand sei stationär, wenn seine Winkelkoordinaten sich nicht ändern. Diese Stationarität kann aber nur gegenüber so etwas wie einer *Mikrowellenhintergrundstrahlung* definiert werden. Die allgemeine Expansion verformt begrenzte Objekte jedoch nicht, und dies bis zur Grösse von Galaxien. Im Bereich solcher begrenzter Objekte wird es i.a. von Vorteil sein, mit lokalen Euklidischen Koordinaten zu arbeiten. Gegenüber solchen Koordinaten kann ein ausgewählter Punkt ruhend oder in Bewegung sein. Diese Stationarität oder Bewegung sind jedoch in keiner Weise absolut. In solchen lokalen Koordinaten gelten die üblichen Gesetze der Physik.
- 2) Die Expansion des Weltallradius  $R(t)$  hat zur Folge, dass sich zwei Galaxien mit festen Winkelkoordinaten mit Geschwindigkeiten voneinander weg bewegen, die proportional zu ihrem Abstand sind. Dies kann mittels Messungen ihrer gegenseitigen Rotverschiebung bestätigt werden und entspricht dem *Hubble-Gesetz*.
- 3) In unserem Gedankenexperiment wird angenommen, dass Lichtstrahlen, die parallel zur Kugeloberfläche ausgestrahlt werden, sich nur auf dieser Oberfläche ausbreiten. Das bedeutet, dass Materie überall mit perfekter Kugelsymmetrie verteilt ist. Innerhalb der Kugel könnte das z.B. auch eine hauchdünne Schicht unter der Oberfläche sein. Die mittlere Dichte innerhalb der Kugel muss aber einen wohlbestimmten Wert besitzen, das Äquivalent einer *kritischen Dichte*.
- 4) Die allgemeine Expansion der Kugel, beschrieben durch die Funktion  $R(t)$  der Fig. 1, kann aber auch als *Änderung der Krümmung* des Universums betrachtet werden. In genau dieser Hinsicht ist die Änderung von  $R(t)$  verschieden von einer *Relativbewegung* zweier Objekte auf der Kugel, und dies ist auch der Grund, wieso diese Raumausweitung der Begrenzung mit der Lichtgeschwindigkeit nicht unterstellt ist. Das Beispiel der Dreiecke erlaubt es, die Expansion des Raumes von der Relativbewegung zweier Objekte auf der Kugel klar zu unterscheiden: Die Expansion der Kugel vergrössert alle Dreiecke mit festen Winkelkoordinaten, verändert jedoch ihre Winkelsummen  $\Sigma$  nicht; bei einem Dreieck jedoch, dessen Differenz der Winkelkoordinaten seiner Scheitelpunkte ansteigt, wächst auch die Summe  $\Sigma$ . Wird jedoch  $R(t)$  immer grösser, so wird es auch immer schwieriger, die

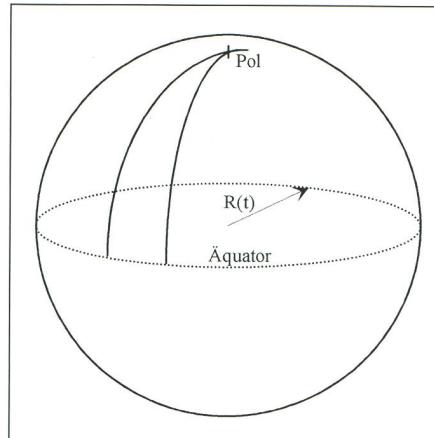


Fig. 1. Zweidimensionales Universum an der Oberfläche einer Kugel. Für sehr kleine dünne Bewohner scheint dieses Universum flach zu sein. Obwohl es keine festen Grenzen aufweist, hat es nur eine begrenzte Ausdehnung. Die Raumexpansion entspricht einer Vergrösserung des Krümmungsradius  $R(t)$ . Die Geschwindigkeit, mit der  $R(t)$  wachsen kann, wird nicht von der Lichtgeschwindigkeit begrenzt, denn es ist eine Expansion des Raumes selbst. Als Hauptkonsequenz ergibt sich eine generelle Flucht aller auf der Kugel sich befindenden Galaxien, mit einer Geschwindigkeit, die proportional zu deren jeweiligen Abstand ist, was dem bekannten Hubble-Gesetz gleichkommt. Diese Expansion verformt aber Objekte begrenzter Dimensionen nicht, und dies bis zu den Abmessungen der grössten Galaxien! Man überzeugt sich auch leicht, dass die Summe  $\Sigma$  der inneren Winkel des von den Meridianen und dem Äquator begrenzten Dreiecks gleich  $\pi + A / [R(t)]^2$  ist.

Krümmung des Weltalls nachzuweisen. Heute sind wir in unserem reellen Universum genau in dieser Situation.

- 5) Für die Kugelbewohner gibt es ein *Sichthorizont*. Nimmt der Radius ihres kugelförmigen Universums schneller zu als die Lichtgeschwindigkeit, muss die Zahl der optisch erreichbaren Galaxien abnehmen. Auf dem Sichthorizont werden also nach und nach Galaxien verschwinden. Das gleiche passiert jetzt auch in unserem eigenen Universum.
  - 6) Die Kugelbewohner haben also erkannt, dass ihre zweidimensionale Wahrnehmung des Raumes, die zuerst euklidisch (d.h. absolut flach) erschien, eine Folge ihrer eigenen kleinen Abmessungen ist. Sie wissen nun, dass der Raum in der Tat dreidimensional ist und dass seine Krümmung, zumindest im Prinzip, aus den Eigenschaften grosser Dreiecke abgeleitet werden kann. Da solche Dreiecke Gl. (1) erfüllen, konnten sie ableiten, dass der Raum tatsächlich kugelförmig ist. Sie hätten aber auch ein etwas komplizierteres Gesetz finden können, wie zum Beispiel:
- $$\Sigma = \pi + \alpha_e(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \cdot A, \quad (2)$$
- oder
- $$\Sigma = \pi - \alpha_h(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \cdot A. \quad (3)$$
- Wir nehmen hier an, die Funktionen  $\alpha_e(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$  und  $\alpha_h(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$  der Winkelkoordinaten  $\Theta_i$  der Dreieckscheitel seien immer  $> 0$ . Während (1) den Eigenschaften eines idealen *kugelförmigen* Raumes entspricht, besagt Gl. (2) nur, dass der Raum *geschlossen* oder *elliptisch* ist (an jedem Punkt kann er mit einem Ellipsoid angeglichen werden, aber für jeden neuen Punkt braucht es i.a. ein anderes Ellipsoid). Gl. (3) dagegen gilt für *offene* oder *hyperbolische* Räume (auch hier wird zur Angleichung des Raumes für jeden Punkt i.a. ein anderes Hyperboloid benötigt). Ein Raum, der überall eine elliptische Struktur besitzt, hat notwendigerweise endliche Abmessungen; ist er überall hyperbolisch, so erstreckt er sich zwangsläufig ins Unendliche. Letzteres gilt auch für Räume, die allseits flach sind.
- 7) Weitet sich ein Raum aus, so nimmt sein Krümmungsradius  $R(t)$  i.a. zu. Bei gekrümmten Räumen ist dies leicht einzusehen. In einem flachen Raum ist jedoch  $R(t)$  unendlich gross. Um die Expansion zu verfol-

gen, wird hier der Krümmungsradius durch eine sehr grosse Distanz ersetzt, wie der Abstand von zwei sehr entfernten Galaxien. Damit befreit man sich von Bewegungen, die von lokalen gravitativen Wechselwirkungen hervorgerufen wären. An jedem Raumpunkt in unserem Gedankenexperiment hängt die Funktion  $R(t)$  nur von der Zeit  $t$  ab, somit ist  $R(t)$  selbst eine Art Zeitkoordinate. Für die Bewohner dieses künstlichen Weltalls liegt es dann nahe, ihren Raum als dreidimensional anzusehen, mit zwei Raumkoordinaten und einer dritten, die einen eher zeitlichen Charakter aufweist. Diese Trennung ist aber keineswegs absolut, denn die allgemeine Flucht aller Galaxien von einander manifestiert sich doch als eine räumliche Bewegung. In der Tat widerspiegelt sie nur das stetige Anwachsen des räumlichen Krümmungsradius  $R(t)$ , der den Ablauf der Zeit darstellt.

- 8) Im Universum unseres Gedankenexperimentes kann man sich vorstellen, dass die Expansion in alle Ewigkeit fortschreitet. Die Expansion könnte sich aber auch verlangsamen, zu einem Stillstand kommen und sich dann in eine Kontraktion wandeln. Trifft dies zu, so kommt es schliesslich zu einem kolossalen Kollaps, einem «Big Crunch», dem Gegenteil vom sog. *Urnall*, den man heute meistens als «Big Bang» bezeichnet. Wird  $R(t)$  als eine Art Zeitkoordinate angesehen, so entspricht die Expansionsphase einem positiven und die Kontraktion einem negativem Zeitablauf.

Wir wenden uns nun unserem eignen reellen Universum zu mit der Frage, ob und wie die Eigenschaften unseres Gedankenexperimentes sich hier für uns offenbaren.

Die übliche Empfindung, die wir von unserer Umgebung haben, ist die eines dreidimensionalen flachen Euklidischen Raumes. Das Beispiel des Gedankenexperimentes legt aber nahe, dass die Realität ganz anders sein könnte. Es könnte in der Tat so sein, dass wir an eine dreidimensionale Sub-Struktur gebunden sind, einer Oberfläche in einem vierdimensionalen Raum. Diese «Fläche» kommt uns überall so vor, als hätte sie nur drei Dimensionen und wir haben das Gefühl, dessen Krümmungsradius  $R(t)$  wachse sehr schnell an. In der Tat ist es sogar so, das wir von Krümmungsradius gar nicht sprechen sollten, denn das Weltall kommt uns heute so vor, als wäre es vollkommen flach und  $R(t)$  ist somit nur eine typische sehr

grosse Strecke: die Krümmung des Universums ist also scheinbar null. Was die Expansion angeht, gibt es heute Anzeichen, dass diese in beschleunigter Weise fortschreitet. Wie kann das verstanden werden?

## 2. Die kosmologische Konstante

Nachdem er die Gesetze der Mechanik und der allgemeinen Gravitation formuliert hatte, sah Newton sofort ein, dass nach diesen Gesetzen das Universum zwangsläufig einstürzen musste. Um einem solchen Einsturz zuvor zu kommen, bedurfte es einer abstoßenden Kraft, die im Weltall überall zu spüren wäre. Die gesuchte Stabilität lässt sich in der Tat auf einfache Weise mit einer Kraft erzielen, die der mittleren Massendichte des Universums proportional ist. Auf der Erdoberfläche, z.B., würde dann eine Testmasse  $m$  nicht nur die bekannte Schwerkraft  $F = m \cdot g$  empfinden, also

$$F = G \cdot \frac{mM}{r^2} = \frac{4\pi m G r}{3} \rho_T = m \cdot g, \quad (4)$$

wo  $G$  die Gravitationskonstante ( $6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ),  $M$  die Masse der Erde,  $r$  deren mittleren Radius (6371 km), und  $\rho_T$  deren mittlere Dichte ( $5,520 \text{ kg/m}^3$ ) ist, sondern auch eine abstoßende Kraft, proportional zur mittleren Weltalldichte  $\rho_U$ , etwa  $10^{-26} \text{ kg/m}^3$ :

$$F = \frac{4\pi m G r}{3} (\rho_T - \rho_U). \quad (5)$$

An der Erdoberfläche ist aber  $\rho_U$  gegenüber  $\rho_T$  völlig vernachlässigbar. Gl. (4) ist somit eine hinreichende Beschreibung der Kraft, die auf einen Gegenstand an der Erdoberfläche wirkt. Gl. (5) bringt dazu nur eine kosmetische Verbesserung.

Diese Feststellung gilt auch für die Oberfläche von Sternen und sogar von Galaxien. Der einzige Effekt dieser zusätzlichen Kraft besteht tatsächlich darin, die Stabilität der grossräumigen Struktur des Universums zu garantieren. Das hat eben Newton gesucht, denn er war überzeugt, diese Struktur müsse ewig stabil sein, oder zumindest statio-när.

Beschränkt man sich auf Koordinatensysteme, die an eine Galaxie gebunden sind und auf Geschwindigkeiten, die klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, so behalten die klassischen Gesetze der Physik ihre Gültigkeit. Diese Gesetze sind auch in Systemen gültig, die gegenüber dem galaxiegebundenen gleichmässig bewegt sind. All diese Systeme bilden die Ge-

samtheit der «Inertialsysteme». Da sie vom klassischen Standpunkt äquivalent sind, hat man lange angenommen, dass keines davon ausgezeichnet sei. Nachdem die kosmische Grundstrahlung bei 2,735°K entdeckt wurde, hat man diese Aussage revidieren müssen. Das System, in welchem diese Grundstrahlung die grösste Isotropie aufweist, ist bestimmt fundamentaler als die anderen. In diesem System erscheint die Strahlung, die aus allen Himmelsrichtungen kommt, am gleichmässigsten verteilt. Bewegt man sich mit gleichmässiger Geschwindigkeit in diesem Grundsysten, so erscheint die Strahlung zu kürzeren oder längeren Wellenlängen verschoben und somit die empfundene Temperatur als höher oder tiefer, je nachdem, ob die Bewegung entgegen oder mit der Strahlung verläuft.

Vergleicht man Gl. (4) und (5), so kann die zweite wie folgt umgeschrieben werden:

$$F = m \left[ \frac{GM}{r^2} - \frac{\lambda r}{3} \right], \quad (6)$$

wo:

$$\lambda = 4\pi G \rho_U. \quad (7)$$

$\lambda$  ist als *kosmologische Konstante von Newton* bekannt. Fällt diese Konstante unter den Wert von Gl. (7), so führt Gl. (6) mit den Gesetzen der Mechanik zwangsläufig zu einem einfallenden Universum. Ist sie grösser, so wird die Expansion nicht nur in alle Ewigkeit fortschreiten, sie wird dies sogar in *beschleunigter Weise* tun. Fällt das Weltall in sich zusammen, dann kommen vorher unsichtbare Galaxien sukzessive in unser Sichtfeld. Weitet es sich beschleunigt aus, dann verschwinden Galaxien nach und nach über unseren Sichthorizont.

Als Einstein aus seiner Theorie der allgemeinen Relativität die Grundgleichungen der Kosmologie abgeleitet hatte, befand er sich vor dem gleichen Dilemma wie Newton. Seine Gleichungen führten zu einem allgemeinen Einsturz des Weltalls. Wie Newton war Einstein überzeugt, dass das Universum auf grosser Skala stabil sein müsse. Glücklicherweise war es in seinen Gleichungen erlaubt, eine Konstante einzuführen, mit welcher diese Stabilität erwirkt werden konnte. Es stellte sich heraus, dass diese *kosmologische Konstante Einsteins* genau die gleiche ist wie diejenige, die schon Newton vorgeschlagen hatte, nur dass in seinen Einheiten die Konstante mit  $c^2$  zu dividieren ist und als  $\Lambda = \lambda / c^2$  geschrieben wird.

Als die Beobachtungen von Hubble zu dem Schluss führten, dass das Universum im «Big Bang» seine Geburt

fand, bei welchem alle Teile wie in einer Explosion auseinander fliegen, bereute Einstein auf bittere Weise die Einführung dieser Konstante. Einstein folgend wurde dann in der Kosmologie diese Konstante regelrecht verworfen. Wir werden aber gleich sehen, dass die *kosmologische Konstante* heute wieder eine wichtige Rolle einnimmt.

### 3. Die mittlere Materiedichte im Universum

Im 1. Abschnitt wurde angenommen, dass ein Lichtstrahl, der parallel zur Oberfläche der Kugel des Gedankenexperimentes ausgestrahlt wird, sich nur auf der Kugel ausbreiten würde. Wie dort gesagt, ist das nur möglich, wenn die Materie mit strikter Kugelsymmetrie verteilt ist und wenn die mittlere Dichte innerhalb der Kugel einen wohlbestimmten Wert einnimmt. Ausserhalb der Kugel muss nur die Kugelsymmetrie eingehalten werden.

Ist unser Universum eine Sub-Struktur eines vierdimensionalen Raumes, dann könnte man fragen, ob es auch hier eine wohldefinierte kritische Materiedichte gibt? Man hat tatsächlich lange geglaubt, dass dies der Fall ist. Diese kritische Dichte garantierte eine stetig andauernde Expansion, wobei aber die Expansionsrate nach unendlicher Zeit auf null konvergiert. Doch die sorgfältigsten Aufnahmen aller wahrnehmbarer Materie kamen nie über etwa ein Drittel dieser kritischen Dichte heraus. Dazu kommt die Überraschung, dass neue Beobachtungen eine Beschleunigung der Expansion aufzeigen. Nach der klassischen Physik würde man doch annehmen, die Gravitation könnte nur eine Verlangsamung der Expansion verursachen. Wie sollen diese zwei Befunde gedeutet werden?

Die Antwort auf diese zwei Fragen liefert die kosmologische Konstante. Diese Konstante und die Materiedichte sind so kombiniert, dass wir in erster Näherung ein flaches Universum vorfinden. Die Massendichte erreicht zwar nur etwa ein Viertel oder ein Drittel des kritischen Wertes, dagegen übertrifft die kosmologische Konstante die Grösse, die für ein statisches Weltall notwendig wäre. Die Expansion ist deshalb beschleunigt! Wie aus Gl. (5) ersichtlich, hat das aber keinen Einfluss auf beschränkte Objekte, auch wenn diese die Abmessungen der grössten Galaxien haben.

### 4. Das Hubble-Gesetz als Folge der Raumexpansion

Wie beim anfänglichen Gedankenexperiment ist das *Hubble-Gesetz* eine Folge des stetig wachsenden Krümmungs-

radius  $R(t)$ . Die gegenseitigen Fluchtgeschwindigkeiten  $v$  von entfernten Galaxien sind dann proportional zu deren Abstand  $d$ :

$$v = H \cdot d. \quad (8)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $H$  ist die «*Hubble-Konstante*» und dessen Dimension das Inverse einer Zeit. Wird  $v$  in m/s und  $d$  in m ausgedrückt, dann wird die Zeit  $t_{car} = 1/H$ , in Sekunden ausgedrückt, als gute Abschätzung vom Alter des Universums angesehen. Üblicherweise gibt man  $H$  in km/sMpc an, wo Mpc für Megaparsec steht. Ein Mpc entspricht 3,261 Millionen Lichtjahren. Nach einer langen und bitteren Kontroverse hat man sich heute auf einen Wert von  $H = 75 \pm 7$  km/sMpc einigen können, was ein Alter  $t_{car}$  von ungefähr 13 Milliarden Jahren ergibt<sup>1)</sup>.

Wie schon mehrmals gesagt, untersteht die Raumexpansion und die gegenseitige Flucht aller Galaxien nicht der Begrenzung durch die Lichtgeschwindigkeit. Anders ist es für gegenseitige Bewegungen benachbarter Galaxien unter dem Einfluss ihrer gravitativen Wechselwirkungen. Diese Wechselwirkungen unterstehen den Gesetzen der Schwere und der Mechanik und somit auch den Einschränkungen der Relativitätstheorie. Sie können niemals zu gegenseitigen Geschwindigkeiten führen, welche die des Lichtes übertreffen. Als Beispiel kann man die gegenseitigen Bewegungen unserer Milchstrasse und ihrer grossen und nahen Nachbarin, der Andromeda Galaxie (M31), anführen. Diese zwei Galaxien fliegen mit der sehr grossen Geschwindigkeit von 300 km/s aufeinander zu.

### 5. Das Universum in beschleunigter Expansion

Zur grossen Überraschung fast aller Kosmologen konnten kürzlich zwei internationale Forschergruppen bestätigen, dass die mittlere Materiedichte  $\rho_U$  des Weltalls tatsächlich um einen Faktor von 3 bis 4 kleiner ist als die kritische Dichte  $\rho_C$ , mit der klaren Folge, dass sich das Universum für alle Ewigkeit ausdehnen wird. Sie haben aber auch mit grosser Sicherheit Zeugnis erbracht, dass das Universum scheinbar in beschleunigter Expansion steht! Im Rahmen der kosmologischen Grundgleichungen kann das nur mit einer positiven kosmologischen Konstanten

<sup>1)</sup> Die Beziehung zwischen  $H$  in km/sMpc und  $t_{car}$  in Millionen Lichtjahre ist  $t_{car} = 978/H$ .

verstanden werden, die noch grösser sein muss, als Newton und Einstein vorgeschlagen hatten, um dem Zusammenbruch des Weltalls zuvorzukommen. Je nach Vorzeichen dieser Konstante ersieht man nämlich aus Gl. (6), dass sie die Rolle einer anziehenden oder abstossenden Kraft spielen kann. Wie soll aber die beobachtete abstossende Kraft erklärt werden, woher kommt sie? Alles deutet darauf hin, dass deren Ursache gleicher Natur ist wie diejenige, die den «Big Bang» selbst verursacht hat. Der «Big Bang» setzte Energie/Materie in einer Einzelexplosion frei (wir verweisen auf die bekannte Gleichung  $E = mc^2!$ ), und eine beschleunigte Expansion erfordert ebenfalls eine stetige Schöpfung von Materie im ganzen kosmischen Raum.

Es lohnt sich vielleicht zu betonen, dass die beschleunigte Expansion in keiner Weise eine Konsequenz spezieller Anfangsbedingungen beim «Big Bang» sein könnte, wie z.B. eine sehr grosse kinetische Energie. Eine solche Energie könnte niemals den gravitativen Bremseffekt verhindern und auch keine Beschleunigung verursachen. In Tat und Wahrheit gibt es keine klassische Erklärung für diese Beschleunigung. Was es dazu braucht, ist eine stetige «Erzeugung» von neuer Energie im ganzen kosmischen Raum, Energie die sich später in Materie wandelt. Wie für den «Big Bang» selbst sind zu solchen Erzeugungsprozessen «Vakuumschwankungen» notwendig, und man ist deshalb dazu verleitet, sie als ein *Nachglühen des anfänglichen «Big Bangs»* anzusehen.

Man könnte nun zu dem Schluss kommen, die beschleunigte Expansion auf diese Art zu erklären, könnte die Idee stationärer Weltalle, wie sie 1948 von Bondi und Gold und von Hoyle vorgeschlagen wurden, wieder ins Leben rufen. Solche Weltalle brauchen nämlich eine kontinuierliche Schöpfung von Energie im ganzen Kosmos, um die gegenseitige Flucht aller Galaxien zu erklären. Es besteht jedoch kein Zweifel, dass stationäre Weltalle, auch wenn sie im Rahmen einer strikten Relativität aufgebaut werden, nicht möglich sind. Unser Universum hat bestimmt mit einem singulären «Big Bang» begonnen, sein Ende wird jedoch nicht abrupt sein. Im Gegenteil, Materie wird zusehends dünner verteilt sein, die mittlere Temperatur wird weiter fallen und die Bedingungen, die zur Entwicklung von Leben notwendig sind, werden immer prekärer werden.

Wir verlassen dieses Thema und wenden uns zu den kürzlich gemachten Beobachtungen, die auf eine beschleunigte Expansion weisen. Eine detaillierte Diskussion darüber erschien kürzlich aus der Feder von BERNHARD PARODI in ORION (Nr. 298, S. 4-10). Die zwei neuen Studien beziehen sich auf die genaue Untersuchung des zeitlichen Ablaufs

der Lichtkurven von Supernovae des Ia-Typs in weit entfernten Galaxien, d. h. Galaxien mit einer sehr grossen Rotverschiebung. Ia-Supernovae sind Ereignisse, die in Zwillingssternen auftreten, wo ein weisser Zwerg (ein sehr alter Stern, etwa von der Grösse der Erde, aber mit der Masse der Sonne, also mit einer Dichte von etwa einer Tonne pro  $\text{cm}^3!$ ) von seinem viel jüngeren, gasförmigen Begleitstern dauernd Materie gravitativ einsaugt. Dabei hüllt er sich in eine immer dichter und heißer werdende Atmosphäre. Wenn dieser Gasmantel gewisse Dichten und Temperaturen erreicht, passiert ein Ia-Supernova – Ereignis: eine riesige thermonukleare Explosion. Alle Supernovae dieses Typs verlaufen sehr ähnlich: ihre Lichtkurven steigen sehr schnell an und werden dann viel langsamer abgebaut. Man versteht heute diese Explosionsen so gut, dass sie zu eigentlichen Standardlichtquellen (oder Standardkerzen) geworden sind. Vom zeitlichen Verlauf ihrer Lichtkurven können ihre Entfernung sehr genau abgeschätzt werden, und aus der Rotverschiebung der beherbergenden Galaxien erhält man ihre Entfernung. Da nur Sterne einer sehr engen Klasse dies tun können, ist diese Explosionsphase bei allen Ia-Supernovae sehr ähnlich. Die kleinen Unterschiede sind

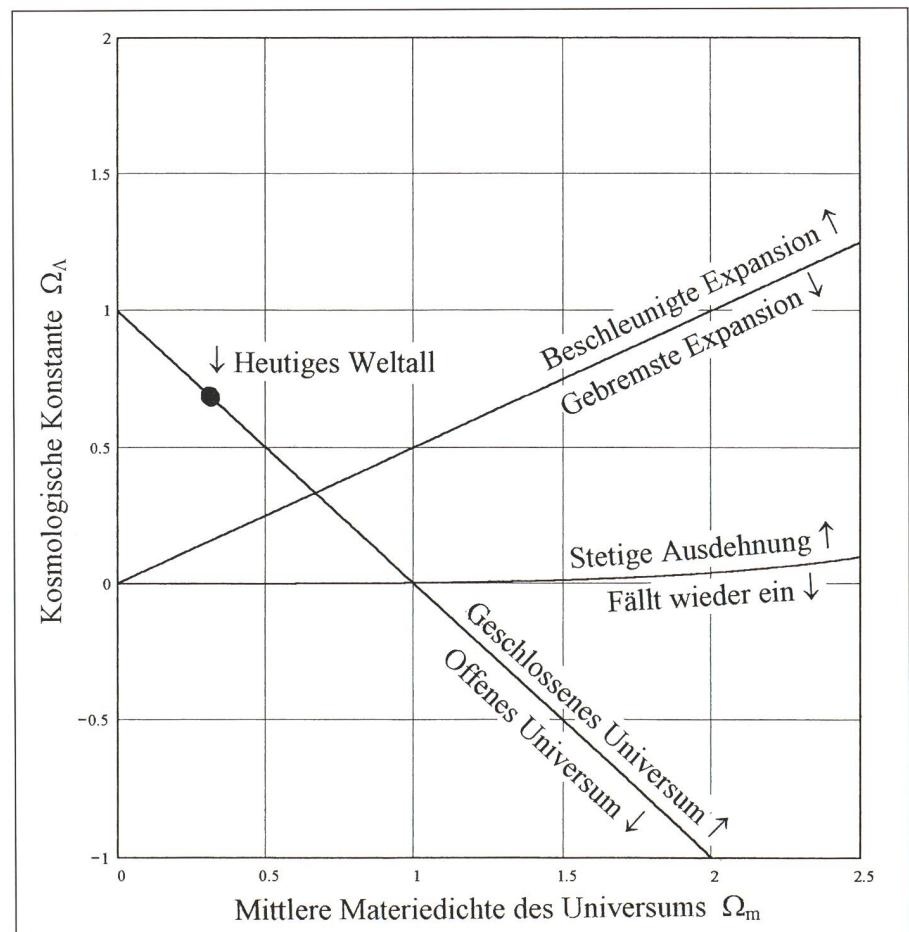


Fig. 2. Ebene der möglichen Lösungen der relativistischen Gleichungen der Kosmologie. Abszisse und Ordinate der Graphik entsprechen der kosmischen Massendichte  $\Omega_m$  respektive der kosmologischen Konstanten  $\Omega_\Lambda$ , beide normiert, wie im Text beschrieben. In dieser Ebene erkennt man die Gerade der flachen Weltalle als Grenze zwischen den offenen und geschlossenen, die Grenzlinie zwischen Universen, die in ewiger Expansion sind und solchen, die wieder zusammenfallen werden, sowie die Trennung zwischen beschleunigten und gebremsten Expansionsraten. Aus den besten heute bekannten Beobachtungen schliesst man auf ein flaches Universum, eine kleine Massendichte  $\Omega_m$  und überraschenderweise auf eine unerwartet grosse positive kosmologische Konstante  $\Omega_\Lambda$ .

vom Studium solcher Ereignisse in benachbarten Galaxien wohlbekannt: der Vorgang läuft z. B. schneller ab, wenn die maximale Lichtstärke der Explosion ursprünglich kleiner war. Die neuen Beobachtungen deuten darauf hin, dass entfernte Galaxien 10 bis 15% entfernter sind als bisher aus der Rotverschiebung angenommen wurde. Fig. 2 erlaubt es, diese revolutionären Resultate in den Rahmen der von der Relativität erlaubten Lösungen zu setzen. Ganz ohne Zweifel deuten sie auf ein beschleunigtes Universum hin.

Fig. 2 ist eine Ebene, auf der jeder Punkt einer möglichen Lösung der relativistischen kosmologischen Gleichungen entspricht. Abszisse beziehungswise Ordinate der Graphik sind der Massendichte des Universums und der kosmologischen Konstante zuzuordnen. Beide Parameter sind normiert:  $\Omega_m$  ist die mittlere Massendichte dividiert durch die kritische Dichte  $\rho_c$ , während  $\Omega_\Lambda$  die kosmologische Konstante Einsteins darstellt, multipliziert mit  $(c \cdot t_{car})^2 / 3$ , wobei  $t_{car}$  aus der Hubble-Konstante nach Gl. (8) abgeleitet ist. Die Struktur der kosmologischen Gleichungen führt fast zwangsläufig auf diese Normierungen. Die Graphik zeigt den Übergang von den offenen zu den geschlossenen Universen (die Grenzgerade gehört zu den flachen Universen), die Grenze zwischen Weltall, die in stetiger Expansion stehen und solchen, die schliesslich im «Big Crunch» wieder zusammenfallen (hier gehört der Übergang den Universen, wo in der Ewigkeit die Geschwindigkeit der Expansion zum Stillstand kommt) und zum Schluss die Grenzlinie zwischen den abgebremsten und beschleunigten Universen (die Linie zeigt, wo sich statische

Weltall befinden würden). Die neuen Befunde deuten auf ein flaches Universum mit einer mittleren Dichte, die 3 bis 4 mal kleiner ist als die kritische, bei dem die kosmologische Konstante  $\Omega_\Lambda$  zwischen etwa 0,7 und 0,75 liegt, und darauf, dass die Expansion unseres Universums tatsächlich beschleunigt forschreitet. Hier soll noch gesagt werden, dass die beobachtete Flachheit sicher nicht absolut ist. Der «Big Bang» hat bestimmt ein geschlossenes Weltall geboren. Mit der folgenden riesigen Expansion ist die anfängliche elliptische Geometrie immer parabolischer oder flacher geworden, sodass es heute nicht mehr möglich ist, die verbliebene Krümmung der geschlossenen Struktur nachzuweisen.

Fig. 2 bedarf noch einiger Bemerkungen. Wir weisen zuerst darauf hin, dass Massendichte und kosmologische Konstante unabhängige Parameter sind; ihre respektiven Dimensionen sind  $\text{kg}/\text{m}^3$  und  $\text{m}^{-2}$ , und die normierten Parameter  $\Omega_m$  und  $\Omega_\Lambda$  sind also dimensionslos. Es mag den Leser überraschen, wenn er sieht, dass die kosmologische Konstante  $\Lambda$  mit einem zeitabhängigen Faktor normiert wird. In einem sich wandelnden Universum, wie das unsrige, ist aber  $\Lambda$  wohl nicht zeitunabhängig. Bestimmt wird  $\Omega_\Lambda$  mit der Zeit noch anwachsen, wird jedoch niemals  $> 1$  werden.  $\Omega_m = \rho_u / \rho_c$  wird sich dagegen in Zukunft noch verkleinern. Den Punkt, den wir «heutiges Weltall» genannt haben, beschreibt das Universum, wie wir es mit unseren derzeitigen Beobachtungen erfassen. Mit fortlaufender Zeit bewegt sich dieser Punkt auf der Geraden  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$  der flachen Universen langsam der Ordinate zu. Dabei wird es aber

immer schwieriger werden, irgendwelche Anzeichen einer Krümmung des Raumes zu gewinnen.

Wie schon gesagt, erstrecken sich offene oder ideal flache Räume ( $k = -1$  oder 0) in allen Richtungen ins Unendliche. Um ein solches Weltall zu gestalten, müsste im «Big Bang» eine unendliche Energiemenge hervorgebracht werden sein, was unrealistisch ist. Auch wäre es schwierig, sich vorzustellen, wie ein Universum, das sich ins Unendliche erstreckt, zusammenfallen könnte. Das sind die zwei wichtigsten Gründe, weshalb man in der Kosmologie heute annimmt, unser Universum sei in der Tat geschlossen ( $k = +1$ ), obschon es scheinbar unmöglich ist, irgendwelche Anzeichen einer restlichen Krümmung zu erbringen.

Für offene Universen ist demnach nur eine ewig fortlaufende Expansion denkbar. Bei geschlossenen Universen haben wir gesehen, dass ein Wiedereinbruch möglich wird, sobald  $\Omega_m \geq 1$ . Wir wissen aber auch, dass eine positive kosmologische Konstante  $\Omega_\Lambda$  einer abstoßenden Kraft gleichkommt, die der Schwere entgegengesetzt ist. Wenn  $\Omega_\Lambda > 0$ , braucht es zu einem Wiedereinbruch eine Materiedichte, die grösser ist als die kritische, also  $\Omega_m \geq 1$ . Wächst  $\Omega_\Lambda$  weiter an, muss auch  $\Omega_m$  grösser werden. Das erklärt in Fig. 2 den Übergang zwischen den Universen, die für alle Ewigkeit in Expansion sein werden, und solchen, die sich später wieder zusammenziehen.

(Anhang Siehe nächste Seite)

GASTON FISCHER

Rue de Rugin 1A, CH-2034 Peseux, Schweiz

## Jahresdiagramm 2001

### für Sonne, Mond und Planeten

Das Jahresdiagramm, das die Auf- und Untergänge, die Kulminationszeiten von Sonne, Mond und Planeten in einem Zweifarbenindruck während des gesamten Jahres in übersichtlicher Form zeigt, ist für 2001 ab Ende Oktober wieder erhältlich.

Das Diagramm ist plano oder auf A4 gefalzt für zwei geographische Lagen erhältlich:

Schweiz: 47° Nord – Deutschland: 50° Nord.

Dazu wird eine ausführliche Beschreibung mitgeliefert.

Der Preis beträgt **Fr. 14.– / DM 16.–** plus Porto und Versand.  
Für Ihre Bestellung danke ich Ihnen bestens!

HANS BODMER,  
Schlottenbühlstrasse 9b,  
CH-8625 Gossau/ZH

Telephonische Bestellungen: 01/936 18 30 (abends)

## Biagramme annuel 2001

### Soleil, Lune et planètes

Le diagramme annuel qui indique les lever, coucher et temps de culmination du Soleil, de la Lune et des planètes, en impression deux couleurs, pendant toute l'année 2001 sous forme de tableau synoptique est à nouveau en vente dès fin octobre.

Le diagramme est plié à plat, en A4 et disponible pour deux latitudes géographiques:  
Suisse: 47° nord – Allemagne: 50° nord.

Il est livré avec une description détaillée.

Prix: **Fr. 14.– / DM 16.–** plus port et emballage.  
Je vous remercie d'avance de votre commande!

HANS BODMER,  
Schlottenbühlstrasse 9b,  
CH-8625 Gossau/ZH

Commandes téléphoniques: 01/936 18 30 (soir)

## Mathematischer Anhang

Die kosmologischen Grundgleichungen von Einstein lauten:

$$\frac{8\pi G}{c^4} p_r = -\frac{k}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{2\ddot{R}}{c^2 R} + \Lambda , \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{8\pi G}{3c^4} \rho_U c^2 = \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{\Lambda}{3} , \quad (\text{A.2})$$

wo  $p_r$  den Strahlungsdruck darstellt.  $k$  spielt die Rolle eines Vorzeichens, mit den Werten  $+1$ ,  $0$ , oder  $-1$ , je nachdem das Universum *elliptisch*, *parabolisch*, oder *hyperbolisch* ist (mit anderen Worten: *geschlossen*, *flach* oder *offen* ist). Die anderen Parameter wurden alle im vorangehenden Text definiert.  $\dot{R}(t) = dR(t)/dt$ , und  $\ddot{R}(t)$  ist die zweite Ableitung von  $R(t)$  nach der Zeit. Zum jetzigen Zeitpunkt des Weltalls ist der Strahlungsdruck vernachlässigbar klein, und wir setzen deshalb  $p_r$  gleich null.

Die totale Energie einer Galaxie (kinetische plus potentielle), die mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung steht, hängt ab von der mittleren kosmischen Massendichte. Wenn diese Energie so bemessen ist, dass die Galaxie es gerade noch schafft, mit einer verschwindenden Geschwindigkeit ins Unendliche zu gelangen, dann wird die erforderliche Massendichte als *kritische Dichte*  $\rho_c$  definiert. Für diese erhält man:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} . \quad (\text{A.3})$$

Berechnet man auf klassische Weise, wie die Expansion durch die Schwere gebremst wird, kommt man auf ein Gesetz von der Form

$$R(t) = A \cdot t^n , \quad (\text{A.4})$$

wo der Exponent den wohldefinierten Wert  $n = 2/3$  annimmt. Erwartungsgemäß beschreibt (A.4) eine gebremste Expansion. Heute beobachtet man jedoch eine beschleunigte Expansion, sodass bestimmt andere Kräfte ins Spiel kommen. Traditionsgemäß wird die positive oder negative Beschleunigung (also ein Bremsen) der Weltallexpansion mit einem sog. *Beschleunigungsparameter*  $q$  beschrieben, den man wie folgt aus dem Hubble-Gesetz  $\dot{R} = HR$  ableitet:

$$\ddot{R} = H\dot{R} + R\dot{H} = \ddot{R}_H + \ddot{R}_R . \quad (\text{A.5})$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (A.5) beschreibt den Geschwindigkeitszuwachs, wenn bei konstantem  $H$  die Distanz  $R$  zunimmt. Wäre  $H$  tatsächlich zeitunabhängig, dann würden Beschleunigung und Geschwindigkeit exponentiell anwachsen. Der zweite Term beschreibt Änderungen, die der Zeitabhängigkeit von  $H$  zuzuschreiben sind. Da  $H = 1/t_{\text{carr}}$  tatsächlich zeitabhängig ist, wird (A.5) umgeschrieben:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{R}R - \dot{R}^2}{R^2} = -\frac{\dot{R}^2}{R^2} \cdot \left[ 1 - \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right] = -\frac{\dot{R}^2}{R^2} \cdot (1 + q) , \quad (\text{A.6})$$

$$\text{wo } q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \text{ d.h. } \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = -q \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -qH^2 . \quad (\text{A.7})$$

Traditionsgemäß wird  $q$  *Beschleunigungsparameter* genannt. Ist  $q > 0$  dann ist  $\dot{R} < 0$  und die Expansion wird zeitlich gebremst; ist jedoch  $q < 0$  dann wird sie beschleunigt.

Wie wir gesehen haben, führen rein klassische Gesetze zu einer Expansion, wobei der Exponent in Gl. (A.4) den Wert  $n = 2/3$  erhält. Damit findet man für  $q$ :

$$q = 0.5 > 0 . \quad (\text{A.8})$$

Dieser positive Wert beschreibt korrekterweise eine negative Beschleunigung (ein Bremsen). Ist in (A.4) der Exponent  $n$  frei wählbar, dann besteht zwischen  $n$  und  $q$  eine allgemeine Beziehung:

$$n = 1/(1 + q) \text{ oder } q = \frac{1 - n}{n} , \quad (\text{A.9})$$

Einer gebremsten Expansion entsprechen demnach  $n < 1$  und  $q > 0$  und einer beschleunigten  $q < 0$  und  $n > 1$ . Für eine konstante Expansionsgeschwindigkeit gelten  $n = 1$  und  $q = 0$ .

Werden (A.1) und (A.2) addiert (mit  $p_r = 0$ ), dann erhält man für die Beschleunigung:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3} \rho_U . \quad (\text{A.10})$$

Wenn diese positiv sein soll, muss gelten

$$\Lambda - \frac{4\pi G}{c^2} \rho_U > 0 \quad (\text{A.11})$$

In (A.10) dividieren wir nun alle Terme durch  $H^2 = \dot{R}^2/R^2$  und erhalten dann:

$$-q = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} - \frac{4\pi G}{3H^2} \rho_U . \quad (\text{A.12})$$

Mit (A.3) und der normierten kosmologischen Konstanten  $\Omega_\Lambda$  [d.h.  $\Lambda$  multipliziert mit  $(c \cdot t_{\text{carr}})^2/3 = (c/H)^2/3$ ] wird der Beschleunigungsparameter dann zu:

$$q = -(\Omega_\Lambda - \frac{\Omega_m}{2}) . \quad (\text{A.13})$$

Es lohnt sich hier zu betonen, dass diese Beziehung von der Raumkrümmung nicht abhängig ist. Da  $q = 0$  sich auf statische Weltalle bezieht, ist die Gerade

$$\Omega_\Lambda = \Omega_m/2 . \quad (\text{A.14})$$

in Fig. 2 die Grenzlinie zwischen beschleunigten (oben) und gebremsten (unten) Universen.

Aus (A.2) folgt auch:

$$\frac{8\pi G}{3H^2} \cdot \rho_U = \frac{kc^2}{R^2 H^2} + I - \frac{\Lambda c^2}{3H^2} . \quad (\text{A.15})$$

Mit den gleichen Substitutionen wie für (A.13), diesmal jedoch mit  $k = 0$ , erhält man die Linie der flachen Universen, und das ist auch die Grenzlinie zwischen den offenen ( $k = -1$ ) und geschlossenen ( $k = +1$ ) Weltallen:

$$\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1 . \quad (\text{A.16})$$

Diese Gerade ist in Fig. 2 auch eingetragen.

Nimmt man die Werte, die in Fig. 2 für unser jetziges Universum vorgeschlagen sind, d.h.  $\Omega_m \approx 0,3$  und  $\Omega_\Lambda \approx 0,7$  so erhält man:

$$q \approx -0,55 \text{ und mit (A.9) } n \approx 2,22 . \quad (\text{A.17})$$

Das Vorzeichen von  $q$  und der Exponent  $n > 1$  stimmen mit den Beobachtungen einer beschleunigten Expansion überein, aber der grosse Wert von  $n$  ist bestimmt eine Überraschung. Es wäre deshalb nicht besonders erstaunlich, wenn die Parameter  $\Omega_m$  und  $\Omega_\Lambda$ , die hier betrachtet wurden, eine baldige Revision erfahren würden.

GASTON FISCHER  
Rue de Rugin 1A  
CH-2034 Peseux