

**Zeitschrift:** Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft  
**Herausgeber:** Schweizerische Astronomische Gesellschaft  
**Band:** 58 (2000)  
**Heft:** 300

**Artikel:** Zum Gedenken an den Geburtstag von Daniel Bernoulli vor 300 Jahren  
: Daniel Bernoullis Beiträge zur Astronomie  
**Autor:** Verdun, Andreas  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-898619>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zum Gedenken an den Geburtstag von DANIEL BERNOULLI vor 300 Jahren

# DANIEL BERNOULLIS Beiträge zur Astronomie

ANDREAS VERDUN

Im Mai dieses Jahres fanden in Basel die Feierlichkeiten anlässlich der 300sten Jährung des Geburtstages von DANIEL BERNOULLI (1700 – 1782) statt. In zahlreichen Vorträgen und einer Ausstellung wurden die Leistungen dieses berühmten Basler Gelehrten gewürdigt. Wir setzen diese Würdigung hier durch die Vorstellung seiner wichtigsten Beiträge zur Astronomie fort. Sie behandeln aktuelle Probleme seiner Zeit und geben Einblick in die astronomische Forschung der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts.

### Zusammenfassung

DANIEL BERNOULLI löste ein altes Problem aus der sphärischen Astronomie. Es handelt sich darum, wie aus drei aufeinanderfolgenden Beobachtungen eines Sterns, dessen Koordinaten unbekannt sind, die geographische Breite bestimmt werden kann. Er benutzte eine stereometrische Methode, mit der er das Problem auf die Ebene Trigonometrie zurückführen konnte. Ein weiterer Beitrag widmete er dem Problem der Bahnneigungen der Planeten und Kometen. Darin entwickelte BERNOULLI eine Theorie, mit der er erklären konnte, weshalb sich die Planetenbahnen etwa in derselben Ebene befinden, die Neigungen der Kometenbahnen dagegen fast beliebig sind. Er erkannte, dass nach seiner Theorie das Planetensystem himmelsmechanischen Entwicklungen unterworfen sein muss, die in sehr grossen Zeitskalen ablaufen. Damit begründete er als einer der ersten die Wissen-

### Leben und Werk: Eine kurze Übersicht

DANIEL BERNOULLI wurde am 8. Februar 1700 in Groningen (Holland) geboren. Sein Vater war der berühmte Mathematiker JOHANN BERNOULLI (Figur 1). Seine Mutter, DOROTHEA FALKNER, war die Tochter eines bekannten Basler Patriziers. Unter den Geschwistern von DANIEL sind der ältere und jüngere Bruder, NIKLAUS und JOHANN, zu erwähnen. Diese waren, wie DANIEL, wie ihr Vater JOHANN und ihr Onkel JAKOB, auf dem Gebiet der exakten Wissenschaften tätig, doch gelangten sie nie zu vergleichbar hohem Ansehen. Der Stammbaum der Mathematiker, Physiker und Astronomen BERNOULLI ist in Figur 2 dargestellt. Im Jahre 1705

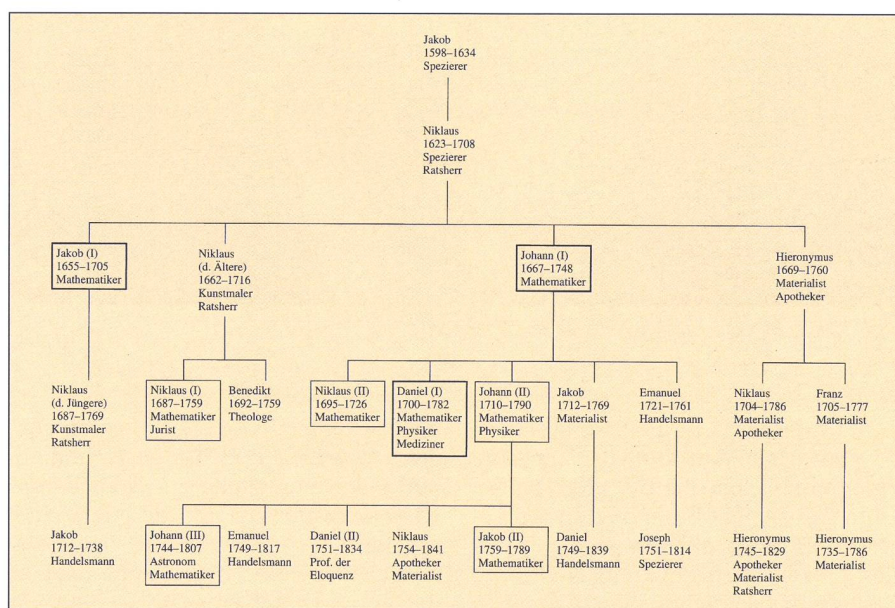


Fig. 2: Der Stammbaum der Mathematiker, Physiker und Astronomen BERNOULLI. Um die Gleichnamigen voneinander unterscheiden zu können, wurden deren Vornamen mit römischen Ziffern nummeriert.



schaft der Kosmogonie. Für diese Arbeit erhielt er den ersten Preis der Pariser Akademie. Schliesslich versuchte BERNOULLI, die «Grosse Ungleichung» zwischen Jupiter und Saturn durch numerische Integration zu erklären. Leider wählte er die Anfangs- und Randbedingungen unglücklich, so dass er zu keinem befriedigenden Resultat kam. Dennoch erhielt er für diese Arbeit die Anerkennung der Pariser Akademie. Insbesondere könnte sie CLAIRAUT dazu angeregt haben, die Periheldurchgangszeit des Halleyschen Kometen für das Jahr 1759 ebenfalls mit numerischer Integration zu berechnen.

Fig. 1: JOHANN I BERNOULLI (1667 – 1748), der Vater von DANIEL BERNOULLI.

kam JOHANN'S Familie nach Basel, wo DANIEL 1713 seine Studien in Philosophie und Logik begann, die er mit den üblichen akademischen Graden 1715 bzw. 1716 abschloss. Während dieser Zeit wurde er durch seinen Vater und seinen älteren Bruder in die Mathematik eingeführt. Zusätzlich studierte er Medizin, zuerst in Basel, dann in Heidelberg und später in Strassburg. 1720 kam er nach Basel zurück und doktorierte 1721 mit einer *Dissertatio Inauguralis Physico-Medica De respiratione*. Aus dieser Zeit stammt auch das in Figur 3 wiedergegebene Porträt. 1723 reiste er nach Venedig, wo er ein Jahr später seine *Exercitationes quaedam mathematicae* veröffentlichte. Aufgrund dieser Arbeit erhielt er eine Berufung an die neu gegründete Petersburger Akademie der Wissenschaften. 1725 trat er die Mathe-





Fig. 3: DANIEL BERNOULLI im Alter von etwa 20 Jahren.

matikprofessur in St. Petersburg an. In der russischen Metropole begann seine fruchtbarste Zeit, die bis 1733 dauern sollte. Mit seinem Freund LEONHARD EULER (1707 – 1783), mit dem er gemeinsam die Zeit zwischen 1727 und 1733 in St. Petersburg verbrachte, pflegte er einen für die Wissenschaft äusserst fruchtbaren Briefwechsel (Figur 4). Es war vor allem DANIEL BERNOULLI, der EULER immer wieder mit genialen Ideen «belieferte», die diesen zur Abfassung von bedeutenden Werken anregte. DANIEL BERNOULLI folgte 1733 einem Ruf an den Lehrstuhl für Anatomie und Botanik nach Basel. Er verliess seine Heimatstadt bis zu seinem Tode am 17. März 1782 nicht mehr. Figur 5 zeigt die Titelseite des Nekrologes, den CONDORCET 1782 verfasst und DANIELS Neffe DANIEL II BERNOULLI 1787 ins Deutsche übersetzt hat.

DANIEL BERNOULLI erlangte internationalen Ruhm auf den Gebieten der Mathematik und Physik und gewann bzw. teilte zehn Akademiepreise. Im erwähnten Nekrolog ist eine bezeichnende Anekdote überliefert. Als die beiden Brüder DANIEL und JOHANN BERNOULLI sich im Jahre 1733 auf der Rückreise von St. Pe-

tersburg über Paris nach Basel befanden, reiste zufällig ein Gelehrter und Adjunkt der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Paris mit. Als die Reisegefährten sich vorstellten, sagte DANIEL: «Ich heisse Bernoulli». Der Franzose, der anscheinend grossen Respekt vor diesem Namen hatte, wollte den vermeintlichen Scherz mit einem ähnlichen



Fig. 4: LEONHARD EULER (1707 – 1783), der Freund von DANIEL BERNOULLI.

bezahlen und erwiderte: «Und ich heisse Newton». BERNOULLI konnte ihn schliesslich überzeugen, dass er keineswegs scherzte. Diese Geschichte belegt die schon früh erfolgte Anerkennung der wissenschaftlichen Leistungen von DANIEL BERNOULLI. Sein berühmtestes Werk ist die *Hydrodynamica* (ein Begriff, den er geprägt hat), die 1738 in Strassburg erschien (Figur 6). Weniger bekannt dagegen sind seine astronomischen Werke, auf die wir jetzt näher eingehen wollen.

### Ein Problem aus der sphärischen Astronomie

Für Luft- und Seefahrt sind genaue Positionsbestimmungen von entscheidender Bedeutung. Im Gegensatz zur heutigen Navigation mit Satelliten beruhten im frühen 18. Jahrhundert die Methoden zur Orts- und Zeitbestimmung ausnahmslos auf astronomischen Beobachtungen. Die Messungen waren mit grossen Problemen behaftet, ihre Auswertung mit mühsamer Rechenarbeit verbunden. Besonders schwierig war die Bestimmung der geographischen Länge (Zeitbestimmung). Dieses Problem konnte erst mit der Entwicklung der Marine-Chronometer von JOHN HARRISON in den 1730er Jahren allmählich besser gelöst werden. Dennoch wurde noch lange Zeit die Länge auf hoher See mit Hilfe der Bewegung des Mondes bestimmt. Man mass die Positionen unseres Erdrabanten bezüglich jener Sterne, deren Koordinaten bekannt waren, und verglich die resultierenden Mondpositionen mit den vorausgerechneten Ephemeriden. Im Gegensatz zu den teuren, aber genauen Schiffschronometern von HARRISON war die Methode mit Hilfe des Mondes im Prinzip einfach und billig. Ihr Problem bestand (abgesehen vom Wetter und der Genauigkeit der Mondtafeln) allerdings darin, dass auf einem schwankenden Schiff angestellte Beobachtungen nicht sehr genau sein konnten. Dies galt für jede astronomische Beobachtung auf hoher See, insbesondere auch für die Messungen zur Ermittlung der geographischen Breite. Es galt deshalb, einfache und genaue Methoden zur astronomischen Ortsbestimmung zu Land und auf See zu entwickeln. Am 13. April 1727 publizierte die Académie des Sciences in Paris ihre jährliche Preisausschreibung für das Jahr 1729. Sie war dem Problem der Breitenbestimmung gewidmet und lautete: «Quelle est la meilleure Méthode d'observer les hauteurs (d.h. die Polhöhen) sur Mer, par le Soleil & par les Etoiles, soit par des instrumens déjà connus, soit par des instrumens de nouvelle Invention?». Es war eigent-



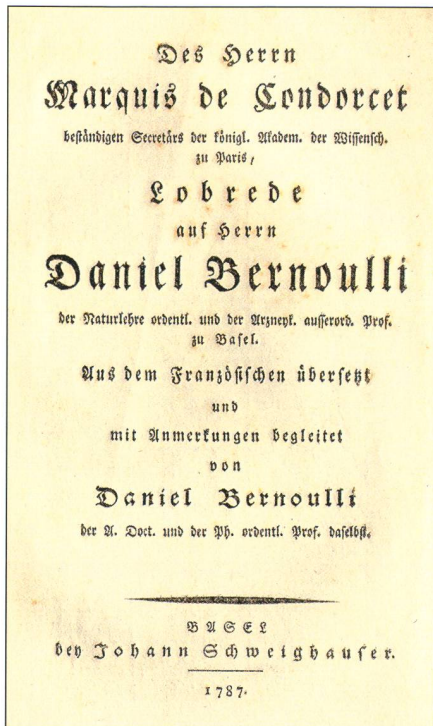


Fig. 5: Titelseite des Nekrologes auf DANIEL BERNOULLI, den CONDORCET 1782 verfasst und den DANIELS Neffe DANIEL II BERNOULLI 1787 ins Deutsche übersetzt hat.

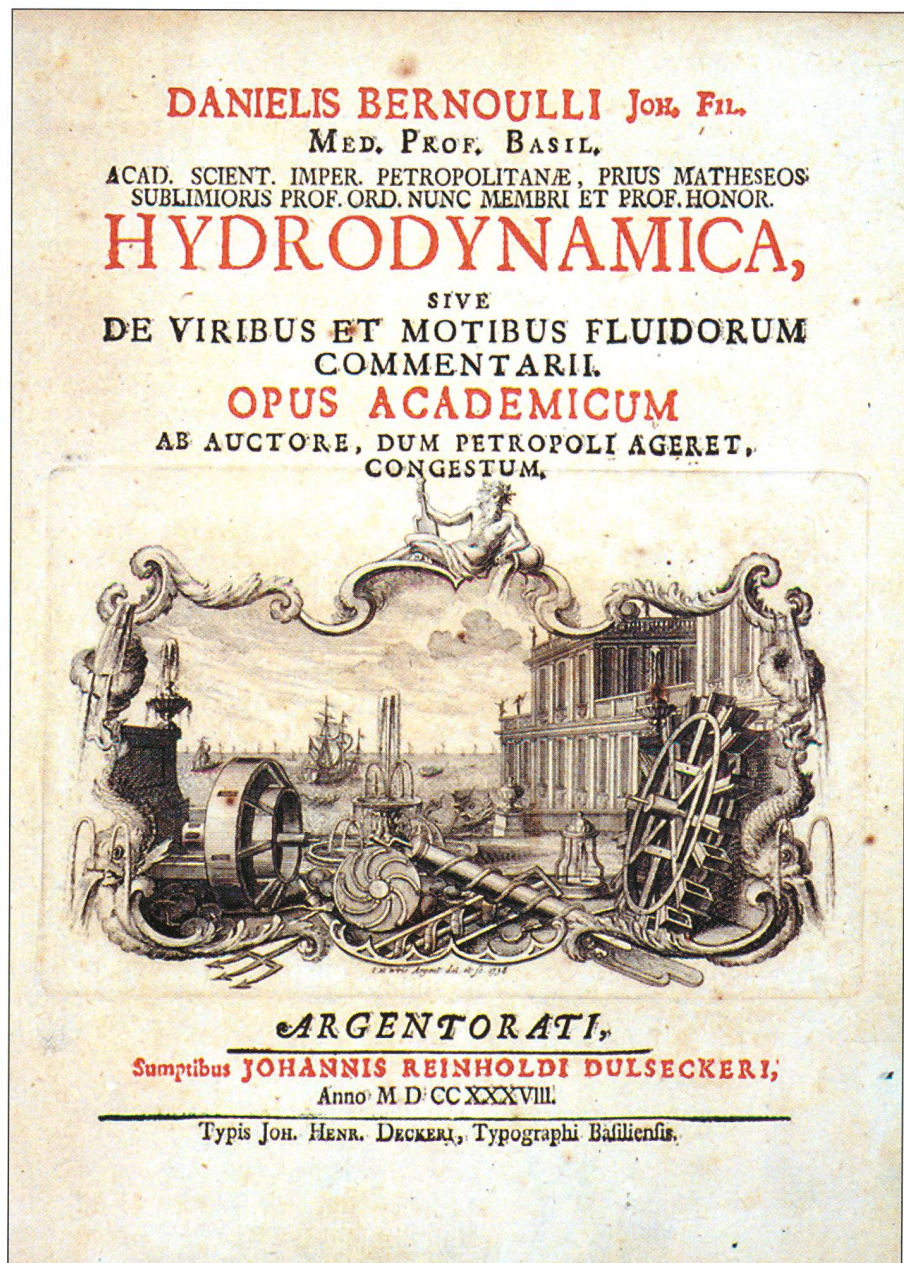
lich nur eine Teilaufgabe der bereits im Jahre 1720 zum ersten Mal gestellten Preisfrage. Sie geht auf ein Legat von J.-B. ROUILLE DE MESLAY zurück, der in seinem Testament verfügte: «Item, je donne et lègue à l'Académie des sciences de Paris la rente de mille livres, ... à condition que Messieurs de l'Académie proposeront tous les ans un prix de la moitié de ladite rente, pour être par eux donné tous les ans à celui qui aura le mieux réussi en une méthode courte et facile pour prendre plus exactement les hauteurs et degrés de longitude en mer et en les découvertes utiles à la navigation et grands voyages». Das Problem der Längenbestimmung auf See wurde noch in verschiedenen weiteren Preisaufgaben bis 1793 gestellt. Da die Preisaufgaben jeweils gut dotiert waren, reichten stets zahlreiche Bewerber ihre Lösungen ein. So auch für den Preis von 1729. Unter ihnen befanden sich DANIEL BERNOULLI und PIERRE BOUGUER, der schliesslich den Preis für seine Arbeit *De la Méthode d'observer exactement sur Mer la hauteur des astres* (gedruckt 1752 in Paris) erhielt.

Die Lösung von DANIEL BERNOULLI wurde im Band IV (für das Jahr 1729) der *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* (Figur 7) im Jahre 1735 unter dem Titel *Problema astronomicum inveniendi altitudinem Poli una cum declinatione*

*Stellae ejusdemque culminatione ex tribus altitudinibus Stellae et duobus temporum intervallis brevi calculo solutum* veröffentlicht (Figur 8). Anschliessend an diese Abhandlung folgen vier weitere Arbeiten von JACOB HERMANN, LEONHARD EULER, FRIEDRICH CHRISTOPH MAYER und GEORG WOLFGANG KRAFFT zum selben Thema, wie das Inhaltsverzeichnis des vierten Bandes der Petersburger Kommentare in Figur 9 zeigt. Damit hat es eine ganz besondere Bewandnis, die auch mit den «Zänkereyen» um die Priorität von DANIEL BERNOULLIS vorgeschlagener Methode zu tun hat und auf die wir hier nicht eingehen wollen. Seine Methode besteht darin, die Polhöhe aus drei aufeinanderfolgenden Höhenmessungen (bzw. Zenitdi-

stanzen) ein und desselben Sternes, dessen Koordinaten nicht bekannt sein müssen, sowie aus den korrespondierenden Zeitintervallen zu bestimmen. In seinem ersten Entwurf *Discours sur la question des hauteurs* von 1728 nannte er dieses Problem «*Problema astronomicum trium altitudinum*». Es ist eigentlich eine Modifikation des schon im 15. Jahrhundert aufgetauchten Problems, aus *zwei Höhen und ihrer Zwischenzeit* die Polhöhe zu bestimmen. Dieses Problem aus der sphärischen Astronomie wurde immer wieder variiert und verschiedene (exakte und genäherete) Lösungen entwickelt, u.a. von REGIOMONTAN (1472), WILHELM IV. Landgraf von Hessen (1566) und TYCHO DE BRAHE (1573), später dann von DOUWES (1754)

Fig. 6: Titelseite der «Hydrodynamica», des Meisterwerkes von DANIEL BERNOULLI.





oder GAUSS (1808). Aber auch DANIELS Onkel JAKOB BERNOULLI erwähnte in seiner Dissertation von 1687 einen Spezialfall dieses Problems. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass DANIEL BERNOULLI Methode schon früher formuliert, deren Lösung jedoch noch nicht erbracht wurde. Seine Neuerung bestünde folglich in der mathematischen Lösung sowie dem Vorteil, dass mit drei Höhenmessungen mögliche Unbestimmtheiten in der Lösung verhindert werden können, obwohl mit drei Höhen und zwei Zeitintervallen das Problem eigentlich überbestimmt ist. Zur Lösung des Problems drängten sich damals drei Methoden auf:

1. Lösung mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie (intrinsische Methode)
2. Lösung mit Hilfe geometrischer Streckenverhältnisse in einer Halbebene der Sphäre, z.B. der Meridianebene (stereometrische Methode)
3. Lösung mit Hilfe der in eine Ebene, z. B. die Äquatorebene, stereographisch projizierten sphärischen Dreiecke, die dann als ebene Dreiecke behandelt werden können (stereographische Methode).

Während EULER, MAYER und KRAFFT das Problem nach der intrinsischen Methode angingen, wählten DANIEL BERNOULLI und HERMANN den stereometrischen Zugang. Die mathematischen Ausführungen innerhalb einer eingeschlagenen Methode weichen jedoch

deutlich voneinander ab. EULER veröffentlichte 1777 noch eine sehr elegante und allgemein gültige Lösung, in der er wenige Gleichungen aus der sphärischen Trigonometrie verwendete. Der Vorteil seiner Lösung besteht darin, dass die Beobachtungen auf dem Deklinationskreis fast beliebig verteilt sein und permutiert werden können. DANIEL BERNOULLI projiziert die drei gemessenen Sternhöhen  $p, q, r$  in die Meridianebene  $aioc$  (Figur 10) sowie in die Ebene des Deklinationskreises  $ipqro$  und bestimmt die entstehenden Sehnen und Strecken in diesen Flächen mittels ebener Trigonometrie. Figur 11 zeigt die Ebene des Deklinationskreises  $ORI$ , auf dem sich die beobachteten Sternhöhen  $P, Q, R$  befinden.  $IVO$  ist die Meridianebene,  $V$  das Zentrum des Deklinationskreises. Die Trigonometrie dieser Figur liefert die Formeln zur Berechnung der Stundenwinkel. Insbesondere sind die Stundenwinkel  $ZVI$ ,  $QVP$  und  $RVP$  aus den gegebenen Streckenverhältnissen von Figur 11 zu bestimmen. Mit Hilfe dieser Winkel lässt sich die Aufgabe in der Meridianebene leicht lösen. Aus den Stundenwinkeln und den in der Meridianebene gebildeten Dreiecks- und Streckenverhältnissen können die Zenitdistanzen der oberen und unteren Kulmination bestimmt und daraus die Polhöhe ermittelt werden.

DANIEL BERNOULLI beschreibt in einem Kapitel *De tubis communicantibus* seines *Discours* von 1728 ebenfalls ein Instrument, mit dessen Hilfe man auf einem schwankenden Schiff Höhenmessungen durchführen kann. Es besteht im wesentlichen aus kommunizierenden Röhren, auf denen Teilungen angebracht sind, sowie einer mit Quecksilber gefüllten Wanne, die als künstlicher Horizont dienen soll. Offenbar hatte er damit auch Versuchsmessungen auf See durchgeführt, denn er schreibt: «*Pour moi j'ai fait des experiences avec de simples tuyaux que je maniois à la main et allant à Voile j'ai pris des hauteurs jusqu'à dix degrez et sans prendre toutes les precautions je pouvois m'assurer d'une justesse à vingt au trente minutes près; mais je crois qu'en prenant toutes les mesures possibles, un homme bien exercé à faire ces experiences pourra répondre de 3 à 4 minutes dans ses observations, laquelle exactitude est plus que suffisante sur mer*». Diese Experimente schien er fortgesetzt zu haben, berichtete er doch am 22. September 1733 in einem Brief an EULER, dass er zur See einige hübsche Beobachtungen angestellt und dabei bemerkt habe, dass seine angegebene Maschine zur Beobachtung der Sternhöhen sich als recht effizient erwiesen habe.

Fig. 7: Titelseite des vierten Bandes der Petersburger Kommentare für das Jahr 1729, gedruckt 1735.

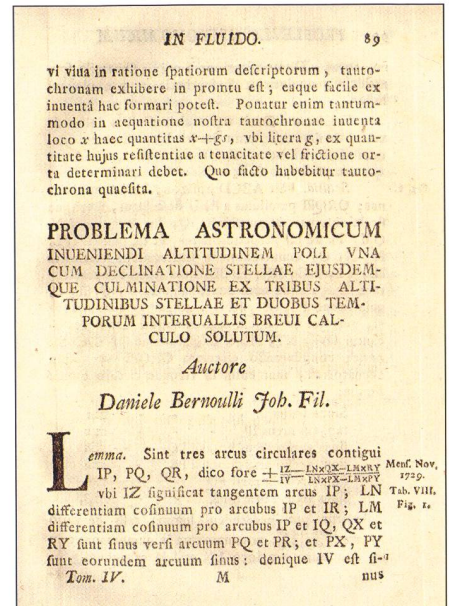
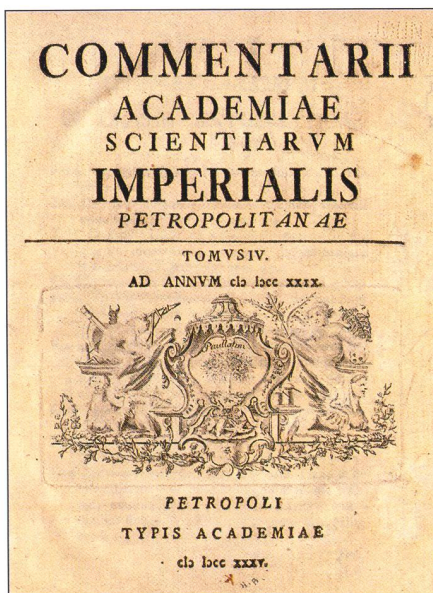


Fig. 8: Titelseite der Abhandlung von DANIEL BERNOULLI zur Bestimmung der Polhöhe, aus dem vierten Band der Petersburger Kommentare.

Abgesehen von den Beobachtungsfehlern bleibt ein Problem unberücksichtigt. Damit die Polhöhe mit dieser Methode gut bestimmt werden kann, sollten die Höhenmessungen zeitlich möglichst weit auseinander liegen. Während des Zeitintervalles der Messungen kann ein Schiff den Standort jedoch erheblich ändern. Ob DANIEL BERNOULLI diesen Aspekt ebenfalls in Erwägung zog, ist uns nicht bekannt. Als Ergänzung sei noch erwähnt, dass DANIEL BERNOULLI zwei weitere Arbeiten zum Thema Orts- und Zeitbestimmung auf See als Preisschriften für die Jahre 1745-47 einreichte, die 1750 publiziert wurden. Es sind dies die unter dem Titel *Recherches Mécaniques et Astronomiques* zusammengefassten Abhandlungen *La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par observations, soit dans la jour, soit dans les crépuscules, & sur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horison* sowie ...*Qui tend principalement à fournir aux Navigateurs les moyens Mécaniques les plus sûres pour faire en Mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations dont on peut conclure l'heure*. Unveröffentlicht blieben die Werke *Discours sur la cause et la nature de la pesanteur* sowie der bereits erwähnte Entwurf *Discours sur la question de 1729, quelle est la meilleure methode d'observer les hauteurs sur mer par le soleil et par les etoiles soit par des instrumens déjà connus soit par des instrumens de nouvelle invention?*



**INDEX  
COMMENTARIORVM  
IN CLASSE MATHEMATICA.**

**Frid. Cristoph. Maier** de Orbita solis definienda pag. 3.

**Iac. Hermann** de Locis solidis ad mentem Cartesii concinne construendis. pag. 15.

**Frid. Cristoph. Maier** de Aequinoctiorum et Solstitiorum momentis, nec non de Obliquitate Eclipticae observandis. pag. 25.

**Ejusdem** Problema Trigonometrico-sphaericum. p. 31.

**Iac. Hermann** Consideratio Curvarum in punctum positione datum projectarum, et de affectionibus earum inde pendens. pag. 37.

**Ejusdem** de Elliptici Conica, cuius axis alteruter datus est, angulo positione et magnitudine dato ita inscribenda, ut centrum eius intra datum angulum sit etiam positione datum. pag. 46.

**Leonb. Euler** de innumerabilibus Curvis tautochronis in vacuo. pag. 49.

**Ejusdem** Curva tautochrone in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum. p. 67.

**Dan. Bernoulli** Problema astronomicum inveniendi altitudinem poli, vna cum declinatione stellae, eiusdemque culminatione ex tribus altitudinibus stellae et duobus temporum intervallis breui calculo solum. pag. 89.

*Jac.*

**Iac. Hermann** Problema ex observatis tribus altitudinibus alicuius stellae immutabilem habentis declinationem, et intervallis temporis inter primam et secundam observationem, et inter secundam et tertiam, invenire altitudinem poli et declinationem stellae. pag. 94.

**Leonb. Euler** Solutio problematis astronomici ex datis tribus stellae fixae altitudinibus, et temporum differentiis invenire elevationem poli, et declinationem stellae. pag. 98.

**Frid. Cristoph. Maier** Problema Sphaerico-astronomicum. pag. 102.

**Georg. Wolffg. Krafft** Solutiones quorundam problematum astronomicorum. p. 110.

**IN CLASSE PHYSICA.**

**Frid. Cristoph. Maier** de Luce boreali. pag. 121.

**Iob. Georg. Duvernoi** de Sinibus cerebri. pag. 130.

**Dan. Bernoulli** Theorema de motu curvilineo corporum, quae resistentiam patiuntur velocitatis suae quadrato proportionalem, vna cum solutione problematis in Act. Lips. M. Nou. 1728. propositi. pag. 136.

**Georg. Bernb. Bullfinger** Solutio Problematis de vi centrifuga corporis sphaerici in vortice sphaerico gyrantis. pag. 144.

**Iob. Georg. Duvernoi** de Liene. pag. 156.

**Georg. Bernb. Bullfinger** de Solidorum resistentia Specimen. pag. 164.

**Ejusdem** de Tracheis plantarum ex Melone observatio. pag. 182.

**Ejusdem** de Ventriculo et intestinis. pag. 187.

*Dan.*

Fig. 9: Inhaltsverzeichnis des vierten Bandes der Petersburger Kommentare mit den Titeln der fünf Abhandlungen von BERNOULLI, HERMANN, EULER, MAYER und KRAFFT.

## Das Problem der Bahnneigungen der Planeten

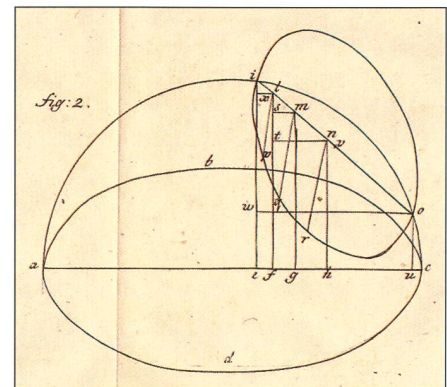
APIAN stellte in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts die merkwürdige Eigenschaft fest, dass Kometenschweife stets von der Sonne wegweisen und somit irgend ein Zusammenhang zwischen ihrer Bahn und der Sonne bestehen muss. In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts erkannte man die wahre Natur der Kometenbahnen. Es war lange nicht klar, ob ein Komet vor und nach dem Periheldurchgang überhaupt ein und dasselbe Objekt ist und was bei einem «Periheldurchgang» eigentlich geschieht. Wenn es sich jeweils um die Bahn ein und desselben Objektes handelt, musste gezeigt werden, ob sich das Perihel seiner Bahn «hinter» der Sonne oder zwischen Sonne und Erde befindet. Aufgrund zahlreicher Beobachtungen vermutete DÖRFTEL bereits in den frühen 1670er Jahren, dass sich Kometen tatsächlich um die Sonne bewegen. NEWTON und anderen gelang es, die Bahnformen der Planeten und Kometen aus dem Gravitationsgesetz abzuleiten. Dies eröffnete HALLEY die Möglichkeit, Bahnelemente von Kometenbahnen aus alten Beobachtungen zu bestimmen. In seiner *Astronomiae cometicae synopsis* von 1705 veröffentlichte er Bahnelemente von 24 Kometen, die zwischen 1337 und 1698 beobachtet wurden (Figur 12). Obwohl HALLEY für seine Berechnungen stets von parabolischen Bahnen ausging, erkannte er später, dass sich gewisse Bahnelemente von scheinbar un-

terschiedlichen Kometenerscheinungen gleichen. Dies führte ihn zur Vermutung, dass auch unter den Kometen elliptische Bahnen und somit periodische Erscheinungen möglich sind. Nicht nur HALLEY war mittlerweile aufgefallen, dass die Kometenbahnen offenbar beliebige Bahnneigungen haben können. Diese Erkenntnis kontrastierte mit der Tatsache, dass sich die Bahnneigungen der Planeten nicht stark unterscheiden und dass sich alle Planeten etwa in der Ekliptikebene bewegen. Erklärungen für diese beiden Phänomene wurden gesucht. Bereits zum zweiten Mal stellte die Académie Royale des Science von Paris für das Jahr 1734 die Preisaufgabe: «*Quelles est la cause physique de l'inclinaison des Plans des Orbites des Planetes par rapport au plan de l'Équateur de la revolution du Soleil autour de son axe; Et d'où vient que les inclinaisons de ces Orbites sont différentes entre elles*».

Dass man in dieser Frage die Bahnebenen der Planeten auf die Äquatorebene der Sonne bezog, hatte einen sehr gewichtigen Grund, der mit den damaligen beiden Theorien zur Erklärung der Planetenbewegungen zusammenhängt. Seit der Entdeckung der Sonnenflecken wusste man, dass sich die Sonne um ihre eigene Achse dreht und dass diese nicht senkrecht auf der Ekliptik steht. Unabhängig davon entwickelte DESCARTES in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts eine Theorie, welche die Ursache der Planetenbewegung erklären sollte.

Seine «Wirbeltheorie» bestand darin, dass die Planeten von einem das ganze Weltall füllenden Medium in einer Wirbelbewegung um die Sonne getrieben werden. Diese Theorie stand anfangs in krassem Gegensatz zur «Gravitationstheorie», die eine Wechselwirkung der Himmelskörper im leeren Raum postulierte. Die Ansicht, dass Himmelskörper über eine Entfernung aufeinander wirken können, ohne die Wirkung über ein dazwischenliegendes Medium zu übertragen, war für das damalige mechanistisch geprägte «cartesische Weltbild» vieler Kontinentaleuropäer absurd. Die Auseinandersetzungen zwischen «Newtonianern» und «Cartesianern» um die Ursache der Gravitation dauerten bis in die Mitte des 18. Jahrhunderts, obwohl es Bestrebungen gab, beide Theorien zu vereinen. Angeheizt wurde die Diskussion durch Probleme, die auch mit der Gravitationstheorie scheinbar nicht befriedigend gelöst bzw. erklärt werden konnten. Sie betrafen vor allem die Figur der Erde, die Grosse Ungleichung von Jupiter und Saturn, die scheinbare säkulare Beschleunigung des Mondes sowie, als «pièce de résistance», die Apisidendrehung des Mondes. Diese Phänomene bildeten Prüfsteine für und wider eine Theorie der Fern- oder Nahwirkung. In diesem Kontext ist die Preisfrage zu verstehen. Es war naheliegend, die beiden Aspekte «Rotation der Sonne» und «Bahnneigung der Planeten» bereits in der Preisfrage mit der Wirbeltheorie in einen Zusammenhang zu bringen. Die Pariser Akademie stand in den 1730er Jahren deutlich auf der Seite der Cartesianer und erhoffte sich mit der Lösung klare Argumente für die Wirbeltheorie. Insbesondere schien eine Lösung im «Cartesischen System»

Fig. 10: Zweite Figur zu DANIEL BERNOULLI'S Abhandlung über die Polhöhenbestimmung. Die Kreise abcd und ipqro stellen den Horizont sowie einen Deklinationskreis dar, der Halbkreis aioc ist der Ortsmeridian. p, q und r sind die gemessenen Sternhöhen.

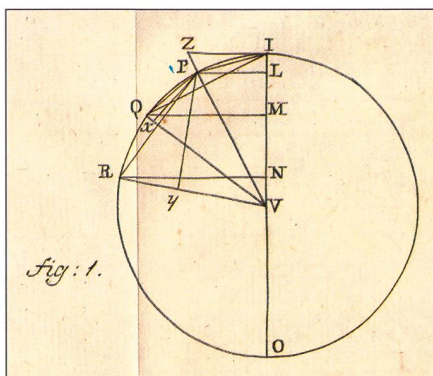




weniger problematisch zu sein als im «Newtonschen System», wonach die fernwirkende Gravitation keine Bahnebene bevorzugt und daher alle möglichen Bahnneigungen zulässt.

Der Preis wurde geteilt und ging an DANIEL BERNOULLI und seinen Vater JOHANN. Ihre Abhandlungen wurden 1735 publiziert (Figur 13). Die Arbeiten von DUCLOS und BOUGUER erhielten Anerkennung. Figur 14 zeigt die Titelseite der von JOHANN BERNOULLI eingereichten Abhandlung, Figur 15 jene der ursprünglich in lateinischer Sprache verfassten Abhandlung von DANIEL BERNOULLI. Der Titel der französischen Übersetzung der Preisschrift von DANIEL BERNOULLI lautet: *Recherches physiques et astronomiques sur le probleme proposé pour la seconde fois par l'Académie Royale des Sciences de Paris. Quelle est la cause physique de l'inclinaison des Plans des Orbites des Planetes par rapport au plan de l'Équateur de la revolution du Soleil autour de son axe; Et d'où vient que les inclinaisons de ces Orbites sont différentes entre elles* (Figur 16). DANIEL BERNOULLI bemerkt gleich zu Beginn, dass die beiden Fragen nicht unabhängig voneinander beantwortet werden können, und unterstreicht ihre Berechtigung angesichts der verschwindend kleinen Wahrscheinlichkeit, dass eine vergleichbare Situation überhaupt eintreten könne. Dafür müsse es eine physikalische Ursache geben. Er berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 5 Bahnneigungen innerhalb jener des Merkur von  $6^{\circ}54'$  liegen, als 1 zu  $17^5 - 1$  bzw. 1 zu  $1'419'856$ , da die von der Merkurbahn an der Himmelskugel beanspruchte Zone 1/17 der gesamten Fläche der Sphäre ausmache. Bezüglich des Sonnenäquators, der nach CASSINI im Jahre 1701 eine Neigung von  $7^{\circ}30'$  gegenüber der Ekliptik aufwies, betrage

Fig. 11: Erste Figur zu DANIEL BERNOULLIS Abhandlung über die Polhöhenbestimmung. Sie zeigt den Deklinationskreis IRO sowie die gemessenen Sternpositionen P, Q und R.



MOTUUM COMETARUM IN ORBE PARABOLICO ELEMENTA ASTRONOMICAE.													
Cometa Anni.	Nodus Ascend.			Inclin. Orbitae.			Perihelion.			Distantia Perihelia à Sole.			Temp. Equat. Perihel.
	°	'	''	°	'	''	°	'	''	°	'	''	
1337	II	24	21	0	32	11	0	7	59	0	40	666	9 609236
1472	III	11	46	20	5	20	0	15	33	30	54273	9 734584	0 546274
1531	III	19	25	0	17	56	0	1	39	0	56700	9 753583	0 329754
1532	II	20	27	0	32	36	0	21	7	0	50910	9 706803	0 399924
1556	III	25	42	0	32	6	30	8	50	0	46390	9 666424	0 460492
1577	III	25	52	0	74	32	45	9	22	0	18342	9 263447	0 064958
1580	III	18	57	20	64	40	0	19	5	50	59628	9 775450	0 296953
1585	III	7	42	30	6	4	0	8	51	0	109358	9 038850	9 901853
1590	III	15	30	40	29	40	40	6	54	30	57661	9 760882	0 318805
1596	III	12	12	30	55	12	0	18	16	0	51293	9 710058	0 395041
1607	III	20	21	0	17	2	0	2	16	0	58680	9 768490	0 307393
1618	II	16	1	0	37	34	0	2	14	0	37975	9 579498	0 590881
1652	II	28	10	0	79	28	0	28	18	40	84750	9 928140	0 067918
1661	II	22	30	30	32	35	50	25	58	40	44851	9 651772	0 482470
1664	II	21	14	0	21	18	30	10	41	25	102575	0 011044	9 943362
1665	II	18	1	0	76	5	0	11	54	30	10649	9 027309	1 419164
1672	III	27	30	30	83	22	10	16	59	30	69739	9 843476	0 194914
1677	III	26	49	10	79	3	15	17	37	5	28059	9 448072	0 788020
1680	III	2	2	0	60	56	0	22	39	30	00612	7 787106	3 279469
1682	III	21	16	30	17	56	0	2	52	45	58328	9 765877	0 311313
1683	III	23	23	0	83	11	0	25	29	30	56020	9 748343	0 337614
1684	III	28	15	0	65	48	0	18	52	0	96015	9 982339	9 986620
1686	III	20	34	40	31	21	40	17	0	30	32500	9 511883	0 692304
1698	III	27	44	15	11	46	0	0	51	15	69129	9 839660	0 200638
													0 546274
													0 358252
													0 329754
													0 399924
													0 460492
													0 064958
													0 296953
													9 901853
													0 318805
													0 395041
													0 307393
													0 590881
													0 067918
													0 482470
													9 943362
													1 419164
													0 194914
													0 788020
													3 279469
													0 311313
													0 337614
													9 986620
													0 692304
													0 200638
													0 546274
													0 358252
													0 329754
													0 399924
													0 460492
													0 064958
													0 296953
													9 901853
													0 318805
													0 395041
													0 307393
													0 590881
													0 067918
													0 482470
													9 943362
													1 419164
													0 194914
													0 788020
													3 279469
													0 311313
													0 337614
													9 986620
													0 692304
													0 200638

Fig. 12: HALLEYS Kometentafel aus seinem Werk «Astronomiae cometicae synopsis» von 1705.

die maximale Überdeckung 1/12 der Himmelskugel. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 6 Planetenbahnen innerhalb dieses Gürtels liegen, sei also 1 zu  $m^6 - 1$  bzw. 1 zu  $2'985'983$ , mit  $m = 12$ . Damit hat er vermeintlich gezeigt, dass die Bahnneigungen der Planeten nicht zufällig sind. Für die weiteren Überlegungen nimmt DANIEL BERNOULLI aufgrund der Beobachtungen an, dass die mittlere Bahnebene der Planeten mit der Ebene des Sonnenäquators zusammenfällt, was ihm aus physikalischen Gründen plausibel erscheint und wovon gemäss der Preisaufgabe auch ausgegangen werden soll. Es gehe nur darum zu zeigen, weshalb diese beiden Ebenen zusammenfallen und weshalb dennoch einige Planetenbahnen ein wenig davon abweichen würden.

DANIEL BERNOULLI sieht die Lösung dieser Probleme in der Existenz einer bis über die Saturnbahn reichenden, ausgedehnten Sonnenatmosphäre, deren Eigenschaften er aus den Charakteristiken der irdischen Atmosphäre ableitet, im wesentlichen aus der barometrischen Höhenformel. Dies glaubt er tun zu dürfen, weil alle Himmelskörper (so auch der Mond!) Atmosphären mit vergleichbaren Eigenschaften besäßen. Die Sonnenatmosphäre besteht nach seiner Vorstellung aus einem sehr subtilen, elastischen Fluidum (vergleichbar mit der irdischen Luft), das sich mit der Sonne einmal in  $25\frac{1}{2}$  Tagen um ihre Achse dreht. Die Rotationsgeschwindigkeit der Sonnenatmosphäre wachse im wesentlichen proportional mit der Di-

stanz von der Sonne, nehme aber durch den Reibungswiderstand an der Atmosphärenbegrenze mit der Entfernung von der Sonne leicht ab. Die Reibung werde durch eine an unsere Sonnenatmosphäre angrenzende, unbekannte Atmosphäre verursacht. Die resultierende «differentielle Rotation» der Sonnenatmosphäre entspreche aber nicht den Rotationen jener «Cartesischen» Wirbel, die nach dem dritten Keplerschen Gesetz die Planeten um die Sonne herum tragen, wie dies sein Vater in seiner Preisschrift von 1730 gezeigt habe (Figur 17). Im Gegenteil: die Rotationsgeschwindigkeit der angenommenen Sonnenatmosphäre übertreffe an den jeweiligen Bahnradien der Planeten jene der Wirbel: «Enfin, la remarque la plus essentielle pour notre dessein est, que ce fluide solaire doit necessairement faire ses révolutions autour de l'axe du Soleil, & même que toutes ses parties ne manqueraient pas de faire le tour ensemble avec le Soleil dans  $25\frac{1}{2}$  jours de temps, si le mouvement n'étoit pas empêché dans les limites de l'atmosphère; cet empêchement fera que les temps périodiques de la matiere croîtront vers les limites. Je présume pourtant que malgré cette diminution de mouvement, les vitesses (qui sans cela suivroient la proportion des distances de l'axe du Soleil) ne laissent pas d'être plus grandes, quand les distances dudit axe sont plus grandes». Damit versuchte DANIEL BERNOULLI zwei Effekte zu erklären. Einerseits bewirke die höhere Geschwindigkeit des Fluidums auf den sonnenab-



gewandten Seiten der Planeten, dass ihre Rotations- und Revolutionsbewegungen gleichsinnig erfolgen. Andererseits erzeuge der Geschwindigkeitsüberschuss des Fluidums gegenüber den Planetenbewegungen, dass deren Bahnneigungen langsam in die Ebene des Sonnenäquators gedrückt und ihre elliptischen Bahnen immer kreisförmiger würden. Betrachten wir diese Theorie etwas genauer.

Unter Annahme der Gültigkeit des Gravitationsgesetzes leitet BERNOULLI eine «barometrische Höhenformel» her, mit der er die Druckverteilung der Sonnenatmosphäre in Abhängigkeit von der Sonnenentfernung berechnen kann. Würden die Parameter so gesetzt, dass das Maximum der Druckverteilung sich im Abstand der Marsbahn befindet, erhalte er folgende Zahlenwerte: Druck an der Oberfläche der Sonne = 1, bei Merkur = 4170, Venus = 8910, Erde = 12300, Mars = 14400, Jupiter = 1310 und Saturn = 15. Diese Druckverteilung erachte er als plausibel. DANIEL BERNOULLI betont ausdrücklich, dass die rotierende Sonnenatmosphäre nicht mit den «Cartesischen Wirbeln» identifiziert werden dürfe, weil sie nicht die den Wirbeln zugeschriebenen Eigenschaften erfüllen könne, insbesondere nicht mit jener, welche die Planeten in ihren Bahnen halte. Als Gründe führt er u.a. das dritte Keplersche Gesetz an, wonach die Umlaufzeit eines (fiktiven) Planeten dicht an der Sonnenoberfläche nur 3 Stunden betragen würde, während die Atmosphäre, welche die Sonnenoberfläche berührt, für einen Umlauf  $25\frac{1}{2}$  Tage benötige. Er zweifelt, ob die Wirbel den Zentrifugalkräften entgegenwirken bzw. diesen die Waage halten können. Es müsse deshalb noch einen anderen Grund dafür geben, dass die Planeten auf ihren Bahnen gehalten werden, nämlich die Schwerkraft der Sonne. BERNOULLI nennt sie «*pesanteur solaire, qui contrebalance la force centrifuge, & qui pousse continuellement les Planetes & la Terre vers le centre du Soleil*». Wie diese Schwerkraft zustande kommt, lässt er offen, bekräftigt jedoch, «*que tous les Physiciens sont en ces temps-ci d'accord, que toutes les Planetes ont une pesanteur mutuelle qui pousse l'une vers l'autre*». Wir erkennen in seinen Aussagen erste Ansätze einer Abkehr von den nahwirkenden Wirbeln und eine Zuwendung zur fernwirkenden Gravitation. Mit dieser Ansicht schien er damals, nach seiner eigenen Meinung, nicht der einzige gewesen zu sein. Dennoch ist er vorsichtig und zeigt sich vorerst davon überzeugt, dass in irgend einem subtilen Medium bzw. «*un grand nombre de Tourbillons d'une matiere*

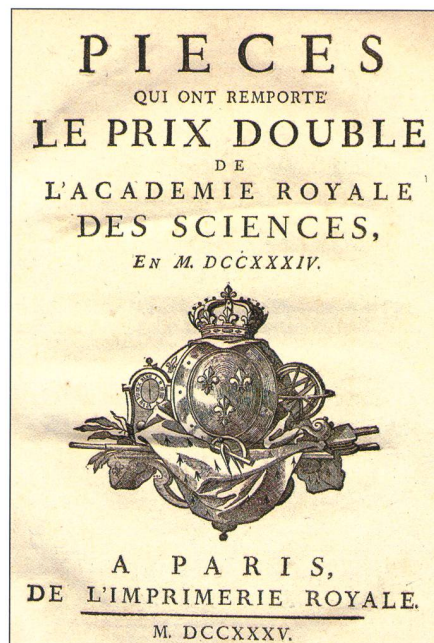


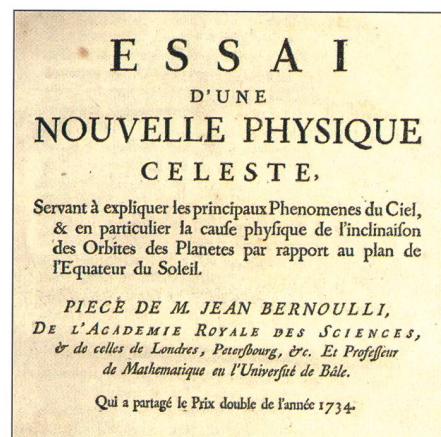
Fig. 13: Titelseite der Preisschriften der Pariser Akademie für 1734, gedruckt 1735.

*subtile gravifique, se traversant librement & sur differens axes, qui passent tous par le centre du Soleil*» die Ursache für die Schwere zu suchen sei. Als Argument nennt er die Theorie des Lichtes, welche die Existenz eines subtilen Mediums erfordere. Somit seien zwei Effekte zur Erklärung der Planetenbewegungen zu berücksichtigen: 1) die rotierende Sonnenatmosphäre, die bewirke, dass die Bahnneigungen langsam aber stetig abnehmen und sich der Äquatorebene der Sonne (oder einer Ebene parallel dazu) nähern, und 2) die Schwerkraft der Sonne, die den Zentrifugalkräften entgegenwirke, sie ausgleiche und damit bewirke, dass sich die Planeten stets in Ebenen bewegen würden, die durch das Zentrum der Sonne gehen.

BERNOULLI beschreibt nun seine Grundidee, wie der aus dem Zusammenspiel dieser beiden Effekte entstehende Mechanismus eine Verringerung der Bahnneigungen hervorrufen kann. Dazu führt er die *noeuds solaires* als Knotenpunkte zwischen den Planetenbahnebenen und der Äquatorebene der Sonne ein und betrachtet einen Planeten in einem dieser Knoten. Das Fluidum der schneller rotierenden Sonnenatmosphäre erteile ihm eine kleine Bewegung parallel zur Äquatorebene der Sonne, was ein stetes Vorwärtsdrehen der Knoten- und Apsidenlinien zur Folge habe. Da die Planetenbahn an dieser Stelle gegenüber dem Sonnenäquator am stärksten geneigt sei, resultiere eine Bewegung in Richtung der Äquatorebene der Sonne.

Dasselbe geschehe im anderen Knoten. Dagegen erfolge in den Punkten  $90^\circ$  zu den Knoten keine Wirkung, weil dort die Planetenbewegung parallel zur Rotationsbewegung der Sonnenatmosphäre verlief. BERNOULLI bemerkt, dass derselbe Mechanismus auch dann noch wirksam bleibe, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Sonnenatmosphäre kleiner ist als die Bahngeschwindigkeit des betrachteten Planeten. BERNOULLI scheint mit seiner Theorie nicht nur zeigen zu können, dass die Exzentrizitäten der Planetenbahnen langsam abnehmen müssen, sondern auch, weshalb Kometenbahnen sehr grosse Exzentrizitäten erreichen können. Er schliesst aus seinen Überlegungen, dass die Bahnneigungen der Planeten vor sehr langer Zeit wesentlich grösser gewesen sein müssen und sich sukzessive auf den beobachteten Wert verkleinert hätten. Je nach Dichte der Sonnenatmosphäre und Bewegungszustand der Planeten verlaufe dieser Prozess unterschiedlich schnell. Nach langer Zeit würden jedoch alle Bahnebenen mit der Ebene des Sonnenäquators zusammenfallen. Aus der Tatsache, dass man seit der Antike keine messbare Änderung festgestellt habe, schliesst er, dass die Sonnenatmosphäre aus einem äusserst subtilen Medium bestehen müsse und dass somit die Abnahme der Bahnneigungen nur sehr langsam fortschreiten könne. Angesichts der kleinen Bahnneigungen der Planeten folge, dass die Welt vor sehr langer Zeit entstanden sein müsse und daher einem Entwicklungsprozess unterworfen sei: «*...je ne crois pas qu'il y ait personne, qui soutienne encore les corps célestes n'être sujets à aucuns changements; car le monde n'est pas depuis l'éternité, ni ne durera éternellement, ni ne demeurera enfin toujours dans le même état, tant qu'il dure*».

Fig. 14: Titelseite der Preisschrift von JOHANN I. BERNOULLI.





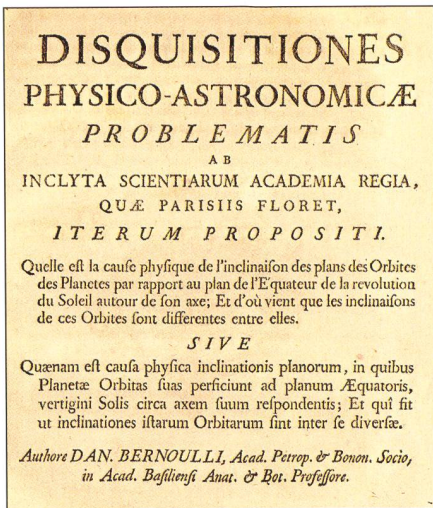


Fig. 15: Titelseite der lateinischen Version der Preisschrift von DANIEL BERNOULLI.

Im folgenden versucht BERNOULLI, seine Theorie anhand der beobachteten Bahnneigungen der Planeten, Satelliten und Kometen, teils mit physikalischen (nach seiner Theorie), teils mit statistischen Überlegungen, noch einmal zu bekräftigen. Er bemerkt zwar, dass nach seiner Theorie die Knoten- und Apsidenlinien bezüglich der Ebene des Sonnenäquators vorwärts (!) schreiten sollten, genau diesen Sachverhalt verifiziert er aber nicht anhand der Beobachtungen. Er hätte sonst feststellen können, dass die Bahnknoten der Planeten (ausser für Jupiter) eine *retrograde* Bewegung von etwa  $5'' - 20''$  / Jahr aufweisen: ein Resultat, das EULER 15 Jahre später aus theoretischen Überlegungen herleiten konnte. DANIEL BERNOULLI bestimmt eine mittlere Bahnneigung der Planeten bezüglich der Ebene des Sonnenäquators zu  $5^\circ 11'$ . Da er diesen Wert als unsicher erachtet, berechnet er die Neigung des Sonnenäquators bezüglich der Ekliptik derart, dass die Abweichungen der Bahnneigungen aller anderen Planeten von dieser Ebene minimal wird und erhält dafür einen Wert von  $3^\circ 22'$ . Unter der Annahme, dass der Sonnenäquator mit der Ekliptik diesen Winkel von  $3^\circ 22'$  bildet (übrigens ein Wert, der nach BERNOULLIS verwendeten Keplerschen Tafeln zufälligerweise (?) mit der Bahnneigung der Venus gegenüber der Ekliptik übereinstimmt), berechnet er die Bahnneigungen der Planeten bezüglich dieser Äquatorebene der Sonne und findet für Saturn  $1^\circ 51'$ , für Jupiter  $2^\circ 7'$ , für Mars  $2^\circ 4'$ , für die Erde  $3^\circ 22'$ , für Venus  $0^\circ 20'$  und für Merkur  $4^\circ 34'$ . Er findet eine Bestätigung seiner Theorie in der Tatsache, dass die mittlere Bahnneigung der Planeten bezüglich dieser Äquatorebene der Sonne nur  $2^\circ 23'$  be-

trage, während sich die mittlere Bahnneigung der Kometen gemäss HALLEYS Angaben (siehe Figur 12) zu  $43^\circ 39'$  ergibt. Er interpretiert diese Resultate dahin, dass die Neigungen der elliptischen Planetenbahnen periodisch über sehr lange Zeit ein wenig verkleinert wurden. Den Grund für die irreguläre Verteilung der als parabolisch oder hyperbolisch angenommenen Kometenbahnen sieht er in der kleinen Dichte der Sonnenatmosphäre, in der sich die Kometen vorwiegend aufhalten. Daher ergebe sich ein Mittelwert nahe dem «Erwartungswert einer isotropen Verteilung» von  $45^\circ$  (de facto beträgt dieser  $57^\circ 18'$ ), wie wir heute sagen würden. Eine weitere Bestätigung findet er in der Tatsache, dass die Bahnneigungen und Exzentrizitäten der Planetenbahnen entsprechend seiner Theorie korreliert zu sein scheinen. Bahnneigung und Exzentrizität seien bei der Venus sehr klein, während sie bei Merkur grosse Werte hätten. Dies ist übrigens eine Feststellung, die EULER offenbar mit dem (berechtigten) Hinweis kritisierte, dass diese scheinbare Korrelation stark von der Wahl der mittleren Bahnebene abhängt (siehe die Klammer-Bemerkung zur Bahnneigung von Venus), wie aus der Reaktion BERNOULLIS in einem späteren Brief vom 25. Januar 1737 an EULER hervorgeht. Darin wirft er EULER vor, dass er sein *Mémoire* offenbar nur oberflächlich und in höchster Eile gelesen haben könne. Es sei ihm niemals in den Sinn gekommen, die Ebene des Sonnenäquators so abzuändern, dass die Inklinationen in der Ordnung der Exzentrizitäten fortschreiten. Er habe nur angemerkt, dass – weil diese Äquatorebene noch nicht feststehe – man durchaus untersuchen könne, wie diese zu platzieren sei, damit das arithmetische Mittel aller Inklinationen minimal sei. Dies habe er getan, ohne es zu bereuen. Im folgenden Brief vom 16. März 1737 gibt BERNOULLI noch einmal sein Unverständnis gegenüber dem Vorwurf EULERS zum Ausdruck, er hätte die Äquatorebene der Sonne derart verändert, um den Exzentrizitäten Genüge zu tun. Seine Theorie trage doch in sich, dass keinerlei Beziehung zwischen den Exzentrizitäten und den Inklinationen vermutet werden könne und müsse. Seine Bemerkungen bestünden nur darin, dass, wenn man die Äquatorebene auf die von ihm angegebene Art ändern würde, die Summe der Inklinationen minimal würde.

Offenbar war sich DANIEL BERNOULLI bewusst, dass seine Hypothese mit den Beobachtungen nur schwer zu untermauern ist. Einige Jahre später, in einem Brief vom 4. September 1743, schrieb er an EULER, er habe im 7. Band der (Peters-

burger) Kommentare verschiedene Abhandlungen von EULER über die Planetenbahnen gesehen. Darin habe EULER viele alte astronomische Beobachtungen durchgerechnet und diese mit dem heutigen Stand der Bahnen verglichen. Er möchte nun von EULER wissen, ob dieser nicht gefunden habe, dass die Exzentrizitäten wie auch die Schiefe der Bahnen bezüglich einer gewissen mittleren Ebene nach und nach ein wenig abnehmen. Seine Vermutung darüber, warum die Planeten nahezu in Kreisbahnen und die Kometen etwa in parabolischen Bahnen laufen und die ersteren ungefähr in derselben Ebene, die letzteren jedoch in allen möglichen Bahnneigungen vorkommen, dünke ihn noch immer bei weitem die wahrscheinlichste unter allen Hypothesen zu sein. Es scheint, als habe BERNOULLI seinerseits EULERS Abhandlungen nur flüchtig gelesen. In *De motu planetarum et orbitarum determinatione* entwickelte EULER ein Näherungsverfahren zur analytischen Lösung der Keplergleichung und bestimmte die wahren Anomalien des Mars. Weiter leitete er Gleichungen her zur Bestimmung der Form und Lage der Bahnellipse eines Planeten bei gegebener Umlaufzeit und drei beobachteten heliozentrischen Örtern und berechnete die Apsidenlinie und Exzentrizität der Erdbahn aus Beobachtungen von 1716. In der Abhandlung *Orbitae solaris determinatio*, die sich inhaltlich an die vorige anschliesst, bestimmte EULER die Erdbahn aus drei beobachteten Sonnenörtern nebst den Zwischenzeiten nach der in der vorigen Abhandlung gegebenen Methode. Er verwendete dazu Beobachtungen von FLAMSTEED aus dem Jahre 1690 und bestimmte damit die mittleren Sonnenörter, die «grösste Gleichung» sowie die mittlere und wahre Anomalie der Erdbahn. In der dritten Abhandlung *Solutio problematum quorundam astronomicorum* des angesprochenen Bandes handelt es sich um praktische Regeln zur vereinfachten Berechnung der Exzentrizität sowie der mittleren Anomalie. Diese Arbeiten EULERS bezeugen zwar seine meisterhafte Beherrschung des Zweikörper-Problems, sie enthalten jedoch nicht die von DANIEL BERNOULLI erhofften Resultate. Im Zusammenhang mit dem Problem des Prinzips der kleinsten Wirkung und dem Grund für die Kegelschnitte als Bahnformen weist DANIEL BERNOULLI in einem Brief an EULER vom 25. Dezember 1743 noch einmal auf ein mögliches Missverständnis seiner Theorie hin. Dass die Umlaufbahnen der Planeten mehr und mehr kreisförmig würden, die Kometenbahnen nahezu parabolisch, habe er nicht aus den widerstehenden Mitteln (dem Fluidum der



# RECHERCHES PHYSIQUES ET ASTRONOMIQUES

SUR LE PROBLEME PROPOSE  
POUR LA SECONDE FOIS

Par l'Académie Royale des Sciences de Paris.

*Quelle est la cause physique de l'inclinaison des Plans des Orbites  
des Planetes par rapport au plan de l'Equateur de la revo-  
lution du Soleil autour de son axe; Et d'où vient que les  
inclinaisons de ces Orbites sont différentes entre elles.*

PIECE DE M. DANIEL BERNOULLI,  
DES ACADEMIES DE PETERSBOURG, DE BOLOGNE, &c.  
& Professeur d'ANATOMIE & de BOTANIQUE  
en l'Université de Bâle.

Qui a partagé le Prix double de l'année 1734.

Traduite en François par son Auteur.

Fig. 16: Titelseite der korrigierten  
französischen Version der Preisschrift von  
DANIEL BERNOULLI.

Sonnenatmosphäre) deduziert, sondern aus quasi hinführenden, indem er diese Mittel nicht im Ruhezustand, sondern als sehr schnell um die Sonne bewegt betrachtete. Seine Erklärungen würden ihm noch immer sehr gut gefallen, ohne glauben zu müssen, dies sei durch Eigenliebe beeinflusst.

Zusammenfassend erwähnen wir drei wichtige Aspekte dieser Abhandlung: 1) DANIEL BERNOULLI verwendete statistische Argumente, was eigentlich nicht verwundert, war doch sein Onkel JAKOB mit der 1713 publizierten *Ars conjectandi* ein Mitbegründer der Statistik. 2) Als eine Folgerung aus seiner Theorie vermutete DANIEL BERNOULLI, dass unser Sonnensystem einerseits himmelsmechanischen Entwicklungsprozessen unterworfen sein muss, und andererseits, dass diese in Zeitskalen ablaufen müssen, die wesentlich grösser sind als das damals immer noch akzeptierte biblische Weltalter von etwa 5000 Jahren. Damit begründete er die Wissenschaft der Kosmogonie, die im Laufe des 18. Jahrhunderts von LAMBERT, KANT und LAPLACE weiterentwickelt wurde. 3) Aus DANIEL BERNOULLIS Theorie folgt, dass die Bahnelemente der Planeten über grosse Zeitskalen säkularen Änderungen unterworfen sein müssen. Damit nahm er eine Erkenntnis vorweg, die erst 15 Jahre später, zumindest was langperiodische Änderungen anbelangt, ihre himmelsmechanische Rechtfertigung durch die grundlegenden Arbeiten EULERS finden sollte. Nach dem Urteil seiner Korrespondenten wird die Abhandlung von DANIEL BERNOULLI als einer seiner besten Beiträge zur Astronomie bezeichnet. Offensichtlich war er ebenfalls stolz auf seine Arbeit.

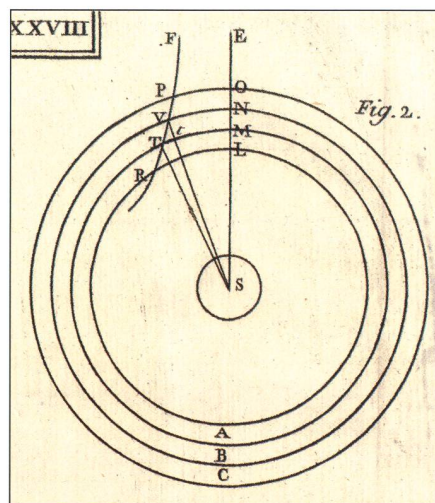
## Die Grosse Ungleichung von Jupiter und Saturn

Schon KEPLER bemerkte 1625 eine scheinbare Anomalie in den mittleren Bewegungen von Jupiter und Saturn. Der Grund dieser Anomalie liegt in den gegenseitigen Störungen dieser Planeten, die jeweils zur Zeit ihrer Konjunktionen besonders ausgeprägt sind. Diese Annäherungen führen zu kurz- und langperiodischen Störungen in den mittleren Bewegungen. Die Konjunktionen zwischen Jupiter und Saturn treten alle 19.86 Jahre auf. Die mittlere Bewegung des Jupiter beträgt 30.35° pro Jahr, jene des Saturn 12.22° pro Jahr. In der Zeit zwischen zwei Konjunktionen bewegt sich Saturn daher um 242.70°. Wäre dieser Wert exakt 240°, dann würden sich alle Konjunktionen stets an drei gleichen Stellen im Zodiak ereignen, jeweils um 120° voneinander getrennt. Die Konjunktionsstellen würden somit ein gleichseitiges Dreieck bilden. Der «Überschuss» von 2.70° bewirkt, dass die Konjunktionen nach jeweils 3.19.86 = 59.58 Jahren um 3.2.70° = 8.1° weiter östlich im Tierkreis stattfinden. Das Dreieck dreht somit in 120° · 59.58 / 8.1° = 882.7 Jahren um 120°. Diese Periode

nennt man die *Grosse Ungleichung*. Das Problem bestand nun darin, die Grosse Ungleichung aus den gegenseitigen Störungen in den Bewegungen von Jupiter und Saturn aufgrund des Gravitationsgesetzes herzuleiten. Es beschäftigte die besten Mathematiker des 18. Jahrhunderts, unter ihnen D'ALEMBERT, CLAIRAUT, EULER, LAGRANGE und LAPLACE. Die Académie Royale des Sciences de Paris stellte dieses Problem als Preisaufgabe für die Jahre 1748, 1750 und 1752. Für 1750 wurde kein Preis zugesprochen. Die anderen beiden Preise gingen an EULER, wobei zu bemerken ist, dass er mit seinen Arbeiten zu diesem Thema die planetare Störungstheorie begründete. Das Problem blieb jedoch lange ungelöst. Erst im Jahre 1785 konnte LAPLACE die Lösung bekanntgeben.

Auch DANIEL BERNOULLI beteiligte sich an den Preisausschreiben für 1748 und 1752 und erhielt für ersteres das Prädikat *proxime accessit*, was dem zweiten Preis entspricht. Leider wurde seine Arbeit nie publiziert. Man weiss aber, dass seine Abhandlung CLAIRAUT, der in der Preiskommission vertreten war, sehr beeinflusst hat. Wie aus der von EULER eingereichten Preisschrift hervorgeht, ging es bei der Preisaufgabe um «*Une Théorie de Saturne et de Jupiter, par laquelle on puisse expliquer les inégalités que ces deux Planetes paroissent se causer mutuellement, principalement vers le tems de leur conjunction*». Es war aus verschiedenen Gründen eine äusserst anspruchsvolle Aufgabe. Gegenüber der Mondtheorie, an der ebenfalls seit Mitte der 1740er Jahre insbesondere von CLAIRAUT gearbeitet wurde, handelt es sich hier um eine himmelsmechanisch völlig neue Situation. Während beim Dreikörper-Problem Erde – Mond – Sonne die Störkräfte der Sonne auf den Mond wegen seiner Entfernung zur Sonne immer etwa gleich gross bleiben, können sich die Abstände zwischen Jupiter und Saturn im Laufe ihrer Bewegung um die Sonne (von Opposition zu Konjunktion) um einen Faktor 3 und die Störkräfte von Jupiter auf Saturn bei Konjunktion (aufgrund der unterschiedlichen Exzentrizitäten) um einen Faktor 1.6 ändern. Was die Sache nicht einfacher machte, war der Umstand, dass zu dieser Zeit an der exakten Gültigkeit des Gravitationsgesetzes gezweifelt wurde. Neben der scheinbaren säkularen Beschleunigung des Mondes konnte vor allem seine Apsidendrehung vorerst nicht aus dem  $1/r^2$  – Gesetz hergeleitet werden. Es wurden daher gleichzeitig alternative Kraftgesetze diskutiert. Letztlich ging es der Akademie darum, mit ihrer Preisaufgabe auch hinsichtlich dieses Problems Klarheit zu

Fig. 17: Die «Cartesische» Wirbeltheorie nach JOHANN I BERNOULLI. S stellt die Sonne dar. Die um S konzentrischen Kreise L, M, N, O stellen Grenzlinien der Wirbel A, B, C dar. Der Abstand der Grenzlinien voneinander wird als differentiell klein (Strecke t) betrachtet. Diese Wirbel bewegen sich nicht mit derselben Winkelgeschwindigkeit um S, sondern vollführen eine differentielle Rotation. Die Kurve RTVPF ist der geometrische Ort aller Wirbelpartikel, die sich vor einer bestimmten Zeit auf der Linie ES befunden haben. Die differentielle Rotation erfolgt nach dem dritten Keplerschen Gesetz.





schaffen, wie sich aus den Arbeiten EULERS folgern lässt. Insbesondere hoffte man, dass mit den Lösungen vielleicht etwas Licht in die Streitfrage um die Ursache der Gravitation als Nah- oder Fernwirkungsprinzip gebracht werden könnte.

Die Schwierigkeiten des Problems kommen in der von DANIEL BERNOULLI am 6. Juli 1747 eingereichten Arbeit sowie in den Briefen an EULER deutlich zum Ausdruck. Aus einem Brief vom 21. Januar 1747 an EULER wird ersichtlich, dass sich BERNOULLI bereits zu Beginn dieses Jahres mit dem Problem beschäftigt haben muss. Die Idee zu dessen Lösung kam ihm vermutlich im Zusammenhang mit der Absicht, die Bewegung des Mondapogäums zu bestimmen, um damit verbesserte Mondtafeln herstellen zu können. Wie er EULER mitteilte, bestehe sein Lösungsansatz darin, dass man die Ungleichheiten in der Bewegung des Saturn auf eine und dieselbe natürliche, nicht gestörte Umlaufbahn beziehen solle. Er nannte sie in der Folge die *natürliche Bahn* und meinte damit jene Ellipse, die entstehen würde, wenn sämtliche Störkräfte verschwinden würden. Dafür hat sich später der Begriff der «oskulierenden Bahn» etabliert. Leider ging er in seinem Mémoire von zwei falschen Annahmen aus, die sich als verhängnisvoll erweisen sollten und deren Folgen im Briefwechsel mit EULER in tragischer Weise sichtbar werden. Einerseits setzte er voraus, dass die Sonne unbeweglich sei, andererseits betrachtete er die ungestörten Bahnen von Jupiter und Saturn als kreisförmig und konzentrisch zur Sonne. Die Sonne als stillstehend zu betrachten, rechtfertigte er im erwähnten Brief damit, dass dies die Störungen des Saturn seiner Definition gemäss nicht ändern könne, wenn gleich auch die Sonne eine kleine Bahn um den gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben würde. Letzteres brachte ihn zur Ansicht, dass die natürliche Umlaufbahn des Saturn (von jeder Wirkung Jupiters auf den Saturn abgesehen) keine Ellipse mehr wäre, wie sie von den Astronomen definiert werde, weder bezüglich des Sonnenzentrums noch des gemeinsamen Schwerpunktes. Saturns und Jupiters natürliche Bahnen als Kreisbahnen anzunehmen, bedeutete aber eine schwerwiegende Einschränkung, die letztlich nur mit der mathematischen Vereinfachung des Problems begründet werden kann. Dazu veranlasst wurde BERNOULLI möglicherweise durch das Verfahren, mit dem er das Problem zu bewältigen erhoffte. Es gleicht einer numerischen Integration, bei der gewisse Randbedingungen erfüllt sein müssen, die BERNOULLI zur Vereinfachung des

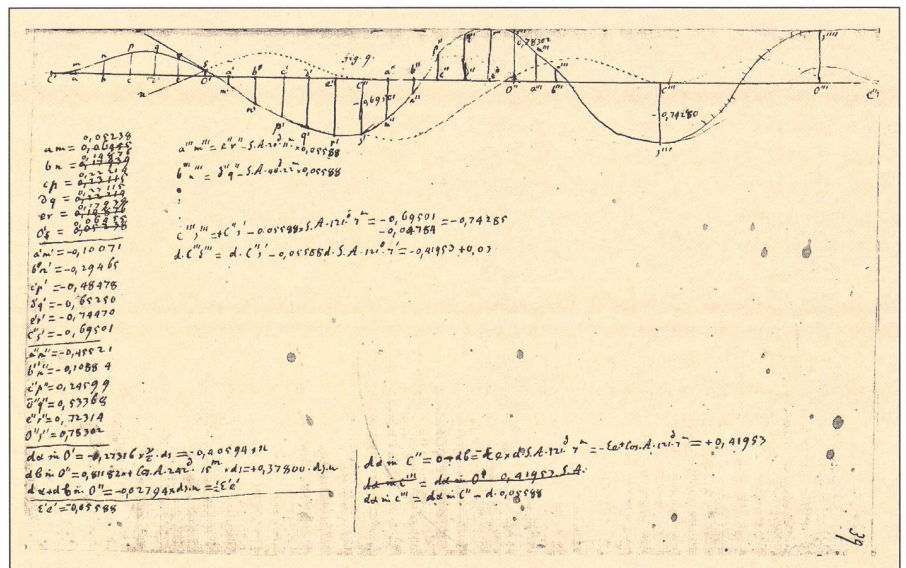
Problems setzte. Wie aus dem Brief hervorgeht, schien er erste Ergebnisse mit jenen EULERS verglichen und erhebliche Abweichungen festgestellt zu haben. Das ist nicht weiter erstaunlich, wählte EULER doch einen grundlegend anderen und wesentlich allgemeineren Zugang.

BERNOULLI scheint das knifflige Problem in seiner ganzen Tragweite (vielleicht inspiriert durch EULER) erkannt zu haben. Etwas resigniert schrieb er am 29. April 1747 an EULER, dass ihm die Theorie des Saturn sehr verleidet sei, weil sie so penibel (empfindlich) und letzten Endes noch immer vielen Zweifeln unterworfen sei. Wenn das Zentrum der Sonne nicht als fest betrachtet werden könne, dann genüge es nicht, die Wirkung des Jupiter auf die Sonne von derjenigen auf den Saturn abzuziehen oder sie zu addieren (wie EULER dies in seiner Theorie tut), sondern man müsse – um eine wahre Theorie des Saturn aufstellen zu können – die wahre und vollständige Theorie der Sonnenbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt kennen. Wollte man die Exzentrizitäten der Bahnen des Saturn und des Jupiter gemäss genuinen Gesetzen betrachten, so erfordere diese Untersuchung wieder unüberwindliche Mühe. Die damit verbundenen Approximationsrechnungen seien sehr heikel. Zudem könne man – weil die Örter der Aphelien bezüglich der Konjunktionsörter veränderlich seien – keine fortlaufenden Tafeln anfertigen. BERNOULLI nahm an, dass auch andere sich in dieser scheinbar ausweglosen Situation befanden und war deshalb gespannt zu wissen, wie EULER wohl das Problem angepackt hatte. Aus dem nur

lückenhaft überlieferten Briefwechsel der beiden Freunde (viele Briefe von EULER an BERNOULLI gingen verloren) wird nicht klar, wie ausführlich EULER seine Theorie darlegte, oder ob er lediglich Ergebnisse bekannt gab. BERNOULLI erwähnte in seinem Antwortbrief vom 16. August 1747 nur, dass sein eigenes Mémoire lange nicht so ausgearbeitet sei wie es EULER von dem seinigen melde. Er war aber in der Lage, seine Resultate mit den Werten von EULER zu vergleichen.

Tatsächlich war EULERS Theorie wesentlich allgemeiner und stellte sich wegen der eingeführten neuen Methoden für die weitere Entwicklung der Störungstheorie als überaus fruchtbar heraus. Ausgehend von den in drei Dimensionen formulierten Bewegungsgleichungen leitete EULER in einer vorgängigen Arbeit Störungsgleichungen für den Radiusvektor, die wahre Anomalie, die Knotenlänge sowie die Bahnneigung des Saturn her, die er dann in seinem Mémoire integrierte, indem er vereinfachende Einschränkungen bzgl. Bahnformen und Neigungen der beiden Planeten schrittweise lockerte. Es ist anzunehmen, dass BERNOULLI die EULERSche Theorie in groben Zügen kannte, denn er schrieb im erwähnten Brief, dass sich in allen seinen (eigenen) Berechnungen gewisse Verschlingungen und Wahrheitsmerkmale zeigten, die ihn auf einen guten Fortschritt hoffen liessen, wenn er nicht wüsste, dass EULER die Sache ganz anders befunden habe. Nicht nur, weil BERNOULLI bis dato noch keine Empfangsbestätigung für sein eigenes Mémoire erhielt, sondern vor allem auch

Fig. 18: Originalseite aus dem Manuskript über die «Grosse Ungleichung», das DANIEL BERNOULLI als Preisschrift für das Jahr 1749 der Académie Royale des Sciences de Paris einreichte und wofür er den zweiten Preis erhielt.





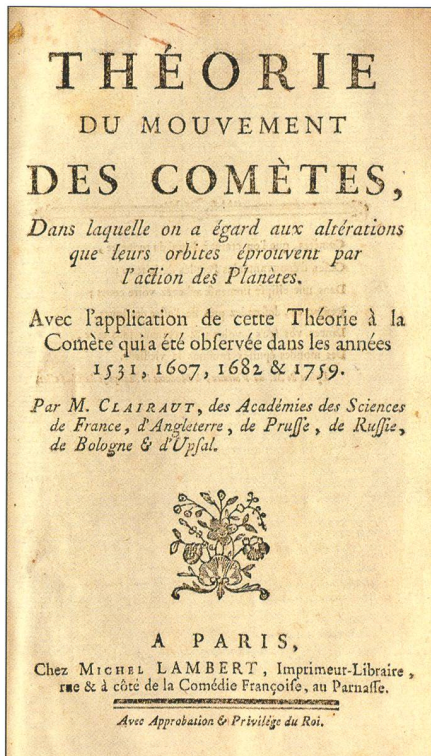


Fig. 19: Titelseite von CLAIRAUTS Arbeit zur numerischen Berechnung der Periheldurchgangszeit des Kometen Halley.

deshalb, weil er von EULERS glänzender Theorie beeindruckt gewesen sein musste, schrieb er im selbigen Brief etwas vergrämt, dass ihn der mutmassliche Verlust seines Mémoires nicht besonders gereue. EULER könne also diesmal doppelt sicher sein, den Preis nicht mit ihm teilen zu müssen. Es sollte sich erweisen, dass dies nicht der Grund war, weshalb EULER den Preis erhielt. BERNOULLIS Mémoire traf vor jenem EULERS in Paris ein und wurde unter der Nummer 1 kotiert. Nachdem BERNOULLI seine Abhandlung abgeschickt hatte, schilderte er EULER in den folgenden Briefen ausführlich seine Theorie und seine Resultate. Wir fassen seine Abhandlung sowie die relevanten Textstellen aus seinen Briefen an EULER zusammen.

Überzeugt davon, dass sein Mémoire verschiedene gute Teilstücke enthalte, legte DANIEL BERNOULLI im Brief an EULER vom 16. August noch einmal seine Ausgangslage dar. Nach reiflicher Erwägung aller Umstände halte er sich an die Hypothese, dass die Sonne in einem Punkt fixiert sei, gleich wie wenn ihre Masse eine unendliche Trägheit hätte. Danach betrachte er eine gewisse Konjunktion zwischen Sonne, Jupiter und Saturn, die er *erste Konjunktion* nenne. Für diese Konjunktion betrachte er die Geschwindigkeit des Saturn, dessen Ab-

stand von der Sonne und den Winkel zwischen der Tangente und dem Radiusvektor (das sind die sog. Anfangsbedingungen). Dann nenne er *natürliche Bahn* diejenige Bahn, welche Saturn gemäss der Keplerschen Hypothese ohne eine Einwirkung des Jupiters beschreiben würde. Auf diese natürliche Bahn beziehe er alle Störungen. (Man beachte, dass dies nicht mit der Voraussetzung in seinem Mémoire übereinstimmt, wo er die natürliche Bahn als kreisförmig und konzentrisch zur Sonne annahm.) Wären die Umlaufzeiten von Saturn und Jupiter genau im Verhältnis 5:2, so zeige er, dass nach drei aufeinanderfolgenden Konjunktionen die früheren Störungen wieder beginnen würden, und deshalb habe er seine Tafeln von der ersten bis zur vierten Konjunktion ausgedehnt. Nach dieser Periode würden sich die Exzentrizität, das Aphel und alles Übrige wieder herstellen. BERNOULLI leitet in seinem Mémoire zuerst eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die radiale Abweichung  $\alpha$  Saturns von seiner Kreisbahn her. Er nennt sie im Brief *numerische Fundamentalgleichung*. Diese Gleichung ist unter den getroffenen Annahmen nur näherungsweise gültig. Als unabhängige Variable führt er den heliozentrischen Winkel  $\sigma$  zwischen den beiden Planeten ein. Die Gleichung enthält aber auch die lineare Distanz  $z$  zwischen Jupiter und Saturn in der Form  $1/z$  und  $1/z^3$ . Nun beginnen die mathematischen bzw. numerischen Schwierigkeiten. Um diese Faktoren in Funktion von  $\sigma$  ausdrücken zu können, berechnet er zuerst die numerischen Werte von  $1/z$  und  $1/z^3$  in Intervallen zu  $10^\circ$ , ausgehend von der Konjunktion bis zur Opposition. Dann leitet er Interpolationsformeln her zur Bestimmung der dazwischenliegenden Werte in Potenzen von  $\sigma$  für die sechs  $30^\circ$ -Intervalle zwischen Konjunktion und Opposition. Dies führt ihn auf sechs Differentialgleichungen für  $\alpha$ , die er mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten löst. Als Resultat erhält er Polynomausdrücke in  $\alpha$  als Funktion von Potenzen in  $\sigma$  und multipliziert mit numerischen Koeffizienten für jedes der sechs Intervalle. Jeder Fehler wirkt sich kumulativ aus, weil die Genauigkeit eines Ausdruckes für ein  $30^\circ$ -Intervall vom vorhergehenden abhängt. BERNOULLI bemerkt in seinem Brief an EULER, dass er gesehen habe, wie gefährlich es wäre, die Integration von Grad zu Grad auszuführen, da sich die Fehler masslos aufsummieren würden. Dies zeigt sich bereits bei der Elongation von  $180^\circ$ . An dieser Stelle bewegt sich Saturn (gemäss Rechnung) noch von der Sonne weg und die erste Ableitung  $d\alpha$  von  $\alpha$  ist

nicht Null. Trotzdem müssen die umfangreichen Rechnungen fortgesetzt werden, da noch kein Anzeichen irgend einer Periodizität erkennbar ist. Obwohl DANIEL BERNOULLI diese mühsame Arbeit am liebsten aufgegeben hätte, führt er sie dennoch zu Ende. Glücklicherweise fällt ihm ein Trick ein, mit dem er den Rechenaufwand verringern kann. Er wählt die Steigung  $d\alpha/d\sigma$  nach der  $180^\circ$ -Elongation derart, dass die radialen Abweichungen  $\alpha$  symmetrisch zu den vorhergehenden zu liegen kommen (das sind die sog. Randbedingungen). In seinem Brief schrieb BERNOULLI jedoch, er habe seine Fundamentalgleichung von  $30$  zu  $30$  Grad durch Approximation integriert und es so eingerichtet, dass die  $d\alpha/d\sigma$  vom Ende der vorangehenden Integration bis zum Anfang der nachfolgenden unter sich gleich seien. Tatsächlich bedeutet diese Massnahme nichts anderes, als dass Saturns Bahnkreis in eine exzentrische Lage bezüglich der Sonne verschoben wird. Dies hat jedoch zur Folge, dass er die dadurch entstandenen Änderungen im Bahnradius wieder berücksichtigen muss. Damit kann er aber die Werte von  $\alpha$  für die folgenden Intervalle einfacher berechnen. Figur 18 zeigt den Graphen von  $\alpha$  von der ersten Konjunktion ( $C'$ ) bis zur vierten ( $C''''$ ). Zur Interpretation der in die Figur eingetragenen numerischen Werte von  $\alpha$  ist anzumerken, dass BERNOULLI den Wert von  $1$  zu  $211$  für das Verhältnis der Kraft von Jupiter auf Saturn bezüglich jener der Sonne auf Saturn aus der zweiten Ausgabe von NEWTONS *Principia* entnahm. Die angegebenen Werte von  $\alpha$  sind, wenn durch  $211$  dividiert, in Bruchteilen des ursprünglich für Saturn angenommenen Kreisradius zu verstehen. Die gestrichelte Linie repräsentiert die als Folge der geforderten Randbedingungen stetige Fortsetzung der Abweichungen. In der vierten Konjunktion, etwa  $59$  bis  $60$  Jahre nach der ersten, sind sowohl  $\alpha$  als auch  $d\alpha$  fast Null. BERNOULLI glaubt daher, eine fundamentale Periode gefunden zu haben. Mit bekanntem  $\alpha$  kann er nun Saturns Bahngeschwindigkeit und somit die Positionen bezüglich des Jupiter berechnen.

DANIEL BERNOULLI war sich sehr wohl bewusst, dass die Annahme von Kreisbahnen in seinem Mémoire falsch war, glaubte jedoch, dass der Dissens zwischen seinen und EULERS Werten von den verschiedenen Methoden komme, den Übergang von einer Integration zur nächsten in Teilschritten zu vollziehen. Er erkannte nicht, dass unter der Voraussetzung von exzentrischen Kreisbahnen seine vermeintlich gefundene Periode verschwindet, obwohl ihn EULER vermutlich darauf aufmerksam gemacht



haben musste. Im nächsten Brief vom 22. September 1747 an EULER rechtfertigte sich BERNOULLI damit, dass er die Periode der Ungleichheiten nach drei aufeinanderfolgenden Konjunktionen, die EULER angreife, erst kürzlich in der Neuausgabe der *Institutions astronomiques* von LE MONNIER gelesen habe als etwas, das man aus Beobachtungen abgeleitet habe. In diesem Brief schien sich BERNOULLI der Unzulänglichkeiten seines Mémoires bewusst zu werden, insbesondere von der Annahme der Kreisbahnen. Dennoch: er fange an, von seiner Methode eine gute Meinung zu bekommen. Hätte er sich dazu entschliessen können, die Exzentrizitäten zu betrachten und die Approximationen näher auszugestalten, sei er sicher, dass er eine exakte Theorie gefunden haben würde. BERNOULLI glaubte, EULERS Einwand entkräften zu können, indem er ihn noch einmal darauf aufmerksam machte, dass sich die Störungen des Saturn (und daher BERNOULLIS vermeintlich gefundene Periode) nach seiner Theorie von einer Konjunktion zur nächsten auf die jeweilige natürliche Bahn bezögen. Bei seiner Theorie sei somit zu beachten, dass seine Gleichungen nicht so zu verstehen seien, als müssten oder könnten sie auf die bis heute herausgegebenen astronomischen Tafeln angewandt werden, da deren Grundannahmen nicht mit der Bewegung, die er die natürliche nenne, übereinstimmen würden. Denn zuerst müsse man die natürliche Bewegung berechnen, was man – wie er zeige – tun könne mittels mehrerer Beobachtungen, deren Zeiten man zuerst korrigieren müsse. Nachher müsse man Tafeln dieser natürlichen Bewegung konstruieren und dazu seine Gleichungen verwenden. Ob BERNOULLI nach diesem umständlichen Vorgehen seine Periode in LEMONNIERS *Institutions* auch wirklich bestätigt fand, bleibt dahingestellt. In einem Punkte hatte BERNOULLI allerdings völlig recht. Während er das Dreikörper-Problem rein numerisch zu lösen versuchte, strebte EULER, soweit es ging, stets eine analytische Lösung an. Diesen Zugang hielt BERNOULLI für problematisch, denn wollte man die Sonne als beweglich betrachten, so halte er die gewöhnliche (analytische) Methode für etwas schlüpfrig und er glaube fast, dass die ganze Mathematik in der Welt nicht ausreiche, um alle Ungleichheiten genau zu berechnen, weil es nicht erlaubt sei, die Theorien der Himmelskörper von einander zu trennen und es gleichsam unmöglich sei, die Ungleichheiten im ganzen gleichzeitig betrachteten System zu bestimmen. Was BERNOULLI hier vermutete, ist jedoch nicht die Tatsache, dass das Dreikörper-Problem



Fig. 20: DANIEL BERNOULLI zur Zeit des Erscheinens des Kometen Halley.

analytisch überhaupt nicht exakt lösbar ist, sondern er brachte damit zum Ausdruck, dass das Problem seine Fähigkeiten überstieg. Ein «Unmöglichkeitsbeweis» wurde erst viel später erbracht. BERNOULLI musste die Mängel in seinem Mémoire erkannt haben, denn im folgenden Brief vom 9. März 1748 an EULER gestand er, dass ihm die Theorie des Saturn noch viel zu schaffen mache. Er könne nicht begreifen, wie EULER mit der Annahme einer festen Sonne eine Gleichung von nur 9' finden könne, wo er auf etwas mehr als 30' komme. Wäre ihm EULERS Tiefgang nicht so gut bekannt, so würde er meinen, EULER hätte seine Integrationsmethode nicht den Umständen angepasst. Er sei neugierig darauf, wo er einen Fehler gemacht habe, und er wünsche, dass sein Mémoire anonym gedruckt würde, damit ihn EULER korrigieren könne. Noch einmal versuchte BERNOULLI in einem Brief vom Juli 1748 EULER von den Vorteilen

seiner Theorie zu überzeugen. Mit der Hypothese, dass die Sonne vollkommen still steht und also eine gleichsam unendliche Trägheit hat, berechnete er eine Tafel, die Korrekturterme in Abhängigkeit von den Elongationen zwischen Jupiter und Saturn enthält. Die aufgeführten zeitlichen Terme entsprechen Korrekturen in der mittleren Bewegung des Saturn, die bezüglich einer beliebig wählbaren ersten Konjunktion angebracht werden müssen. BERNOULLI beklagte sich in diesem Brief, dass er seine Theorie mangels Beobachtungen nicht mit der tatsächlichen Bewegung des Saturn vergleichen konnte. Wie er im nächsten Brief an EULER vom 3. September 1748 berichtete, habe man ihn sehr ermutigt, zu seinem Mémoire über den Saturn noch einen Kommentar zu verfassen, doch könne er sich nicht dazu entschliessen. Um eine sichere Theorie bilden zu können, sollte man viele Irregularitäten aus Beobachtungen



bestimmt haben, um sehen zu können, ob die Theorie damit übereinstimmen würde, da doch die Astronomen von diesen Ungleichheiten nur vage reden würden. Käme es nur auf die rein mathematischen Berechnungen an, würde er sich schon zutrauen, nach verschiedenen Hypothesen alles auszurechnen und zu ermitteln, welche Hypothese mit der Natur übereinstimme.

Vielleicht beabsichtigte er sogar, diese Arbeit unter realistischeren Annahmen zu wiederholen. In einem im Jahre 1749 verfassten Brief an EULER schrieb er jedoch entmutigt, dass er viel weniger Hoffnung habe denn je, die Irregularitäten des Saturn mittels mechanischer Prinzipien eruieren zu können. Er könne aber EULER versichern, dass er genügend Einsicht in diese Materie habe, um die Hoffnung zu hegen, mit gleicher Mühe ebensoviel wie Andere herausbringen zu können. Eine exakte Lösung sei unmöglich, und alle Approximationen seien so gefährlich, dass es unüberwindliche Anstrengungen erforderte, die Irregularitäten mit hinreichender Genauigkeit und Gewissheit bestimmen zu können. Er wundere sich sogar (zu Recht!) über EULER, dessen Autorität er sonst sehr respektiere, dass EULER mit so grossem Vertrauen beanspruche, dieses Problem mit äusserster Präzision gelöst zu haben. Im Brief vom 26. Januar 1750 kritisierte BERNOULLI EULERS Preisschrift und liess gleichzeitig die Enttäuschung über sein eigenes Scheitern deutlich erkennen. Der Brief gibt Zeugnis eines sehr unzufriedenen DANIEL BERNOULLI, der sich als Rechtfertigung seines Scheiterns dazu verleiten liess, EULERS Arbeit – nicht immer zu Recht – zu disqualifizieren. Er habe EULERS Mémoire über den Saturn gesehen und es flüchtig gelesen. Dieser Gegenstand würde ihm schier zum Hals heraushängen, sonst hätte er es mit aller Aufmerksamkeit gelesen. Er hätte darin viel vortreffliche Kunstfertigkeit bemerkt, doch im Wesentlichen glaube er, dass notwendigerweise Fehlschlüsse darin versteckt sein müssten. Unter der Hypothese der Nichtexzentrizität halte er es für gewiss, dass die Ungleichheiten nicht von der einfachen Elongation abhängen noch nach den einzelnen Konjunktionen wiederkehren würden. Wäre dies der Fall, so wäre seine Arbeit zu 90% leichter geworden. Doch es sei gewiss nicht so, sondern die Periode der Ungleichheiten betrage drei Konjunktionen, und auch dann nur in Näherung. Auch seien die Ungleichheiten unter dieser Hypothese sicher viel grösser als EULER meinte. Ferner sei es unbegreiflich, dass die Exzentrizität eine so grosse Wirkung zeitigen könne – die blossе Vorstellung sei

schockierend. In Paris gestehe man nun ein, dass sich seine Theorie besser halten liesse als jene von EULER, und seine Freunde hätten alles versucht, damit er wieder konkurreiere, doch die mühseligen Arbeiten seien nichts für ihn. Er glaube nun einmal, dass es nicht möglich sei, dem Problem anders als schrittweise (d.h. durch numerische Integration) gerecht zu werden, weil die Ungleichheiten von den von beiden Planeten beschriebenen Bogen und allen Bahnelementen dieser zwei durchlaufenden Bogen abhängen würden. Wollte man eine allgemeine Reihe bilden (wie EULER dies zu bevorzugen pflegte), so müsste diese durch alle Dimensionen von beiden Bogen und nicht eines einzigen allein laufen. Er glaube noch immer, dass etwas in EULERS Approximationen stecke, das nicht richtig sei. EULER solle alles nochmals mit grösster Aufmerksamkeit und Skepsis untersuchen, denn niemand in der Welt könne dies tun ausser EULER selbst. Für seine eigene Arbeit könne BERNOULLI nicht garantieren, da er eine Methode verwendet habe, wo ein einziger numerischer Fehler alles zunichte machen würde, aber diese seine Methode halte er für unfehlbar. Er hätte auch die Rückwirkung auf die Sonne nicht vernachlässigen dürfen, wie er es getan habe, bloss um seine bereits ausgeführten Rechnungen nicht wiederholen zu müssen. Schliesslich solle EULER ihm nicht übel nehmen, dass er so frei rede und sich diesmal so viel herausnehme. Das geschehe gewiss, ohne die Verehrung zu verletzen, die er für EULERS Verdienste – besonders in der reinen Mathematik – habe.

Beide Abhandlungen, jene von DANIEL BERNOULLI wie auch jene von LEONHARD EULER, haben ihre Mängel, enthalten aber auch fruchtbare Ideen. Beide mussten mit Näherungen und Vereinfachungen arbeiten, um das Problem meistern zu können. Während die Approximationen bei EULER in seinen Reihenentwicklungen zu suchen sind, liegen sie bei BERNOULLI in seinen unglücklich gewählten Anfangs- sowie in den Tücken und Folgen seiner Randbedingungen. Während EULER in seiner Arbeit geniale mathematische Methoden entwickelte, erkannte BERNOULLI die Bedeutung der numerischen Integration. Beides sollte sich für die künftige Himmelsmechanik in der allgemeinen und speziellen Störungsrechnung als äusserst fruchtbar erweisen. Wie bereits erwähnt, war CLAIRAUT nicht umsonst beeindruckt von BERNOULLIS Preisschrift. Vermutlich nahm CLAIRAUT aufgrund dieser Arbeit die Idee auf, mit Hilfe der numerischen Integration die im März 1759 erwartete Periheldurchgangszeit des Halleyschen

Kometen zu berechnen. Er führte zusammen mit LALANDE und Madame LEPAUTE die erste umfangreiche numerische Integration durch und konnte die Periheldurchgangszeit auf einen Monat genau bestimmen. Dass zu jenen Zeiten eine numerische Integration (trotz bescheidener Genauigkeit) mit immenser Rechenarbeit verbunden war, belegt nicht nur DANIEL BERNOULLIS Versuch, sondern auch die Tatsache, dass CLAIRAUT seine Resultate erst nach mehrjähriger Rechenzeit im Jahre 1761 publizieren konnte, zwei Jahre nach Erscheinen des Kometen (Figur 19). Der von DANIEL BERNOULLI (Figur 20) gewählte Zugang sollte sich jedoch im Kindergarten des Sonnensystems erst mit der Erfindung der Rechenmaschinen für die Himmelsmechanik als äusserst nützlich und effizient erweisen.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch jene Arbeiten von DANIEL BERNOULLI, die ebenfalls dem Gebiet der Himmelsmechanik zugeordnet werden können. Es sind dies die in Paris im Jahre 1741 gedruckte Preisschrift *Traité sur le Flux et Reflux de la Mer* für das Jahr 1740 sowie die für den Preis des Jahres 1728 eingereichte, aber unveröffentlichte Abhandlung *Discours sur la cause et la nature de la pesanteur*.

### Verdankung

Der Verfasser dankt den Herren Prof. Dr. PAUL WILD und Prof. Dr. GERHARD BEUTLER vom Astronomischen Institut der Universität Bern sowie Dr. EMIL A. FELLMANN vom Euler-Archiv in Basel für die Durchsicht des Manuskriptes und speziell dem Letztgenannten für die Erlaubnis, dass Inhalte und paraphrastische Übersetzungen aus dem Briefwechsel zwischen LEONHARD EULER und DANIEL BERNOULLI verwendet werden durften. Dieser Briefwechsel wird zur Zeit von E. A. FELLMANN und G. K. MIKHAILOV bearbeitet und in den sämtlichen Werken EULERS (*Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Vol. IV A 3) herausgegeben.

DR. ANDREAS VERDUN

Astronomisches Institut, Universität Bern  
Sidlerstrasse 5, CH-3012 Bern

### Bibliographie

- STRAUB, H.: *Bernoulli, Daniel*. In: Gillispie, C. C. (ed.): *Dictionary of Scientific Biography*. New York, Scribner's Sons 1970, Vol. 2, p. 36–46.  
SPEISER, D. et al.: *Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli*. Die Werke von Daniel Bernoulli. Band 1. Basel / Boston / Berlin, Birkhäuser Verlag 1996.  
WILSON, C.: *The problem of perturbation analytically treated: EULER, CLAIRAUT, D'ALEMBERT*. In: TATON, R. / WILSON, C.: *The General History of Astronomy*. Cambridge, Cambridge University Press 1995, Vol. 2B, S. 89 – 107.