Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft

Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft

Band: 43 (1985)

Heft: 211

Artikel: Von einfachen und komplizierten Bewegungen [Schluss]

Autor: Kirchgraber, Urs

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-899219

Ein Leuchtstab über der Türe signalisiert bei Nacht die lichte Öffnung der Türe, ein nützliches Hilfsmittel beim Zurollen der Kabine. Durch zwei Riegel wird die Kabine mit den Schienen blockiert.

Ich finde es schade, diese Kabine irgendjemandem als Gewächshaus abgeben zu müssen und möchte lieber einem Astro-Amateur damit dienen, so dass sie wieder eine entsprechende Verwendung finden kann. Die Transportkosten gehen zu Lasten des Interessenten. Nur seriöse Bewerber melden sich bitte bei mir. Tel. abends 036/71 36 83.

Buchbesprechung

ERWIN HEISER: *Der gläserne Himmel. Eine phantastische Reise zu den Sternen durch computersimulierte zwei- und dreidimensionale Bilder.* Format 21 x 21 cm, broschiert, 96 Seiten, über 100 Abbildungen. Verlag Polaris Publications, Lengerich (Westf.), 1985. ISBN 3-923799-08-X. Preis DM 37.—. Mit aufklappbarem Stereoskop.

Sternbilder entstehen in der Regel durch Projektionen von sehr unterschiedlich entfernten Sternen auf die gedachte Himmelskugel. Im Buch wird auf eine faszinierende Art der Versuch unternommen, uns die wirkliche räumliche Verteilung der Sterne eines Sternbildes vor Augen zu führen. Dazu bedient man sich der Stereoskopie. Das beiliegende Karton-Stereoskop kann aufgeklappt und jeweils auf die Doppel-Figur gestellt werden. Man sieht dann die Sterne in einem «gläsernen Kasten» räumlich angeordnet. – Im einleitenden Kapitel steht dazu: «Mit Hilfe eines Computers wird versucht, das räumliche Hintereinander der Sterne zu simulieren. Durch Drehen, Kippen, Zoomen oder Einbetten des Sternes in einen umrissenen Raum lässt sich das Sternbild von allen Seiten und Entfernungen betrachten... Ein anderes Anliegen dieses Buches ist, die zeitliche Veränderung einiger Sternbilder und Sterngruppen sichtbar zu machen. Veränderungen, die sich in Jahrtausenden und Jahrmillionen abspielen.» Diese Veränderungen werden durch Bewegungspfeile dargestellt.

Von 25 Sternbildern findet man vorab ein Verzeichnis der Hauptsterne mit folgenden Angaben: Scheinbare und absolute Helligkeit, Leuchtkraft im Vergleich zur Sonne, Spektrum, Entfernung, Radialgeschwindigkeit, Raumgeschwindigkeit. Es folgt ein kurzer Text und ein normales Sternbildkärtchen, anschliessend der «gläserne Kasten», auf dessen Boden einige ungleich lange «Stecknadeln» senkrecht aufgestellt sind. Die Stecknadelköpfe symbolisieren die Hauptsterne des Sternbildes. Derselbe Raum wird oft noch in einer andern Ansicht und für fast alle Sternbilder schliesslich stereoskopisch dargestellt.

Ein instruktives und amüsantes Buch, das vor allem die Freunde der Stereoskopie ansprechen wird, das aber auch für Unterrichtszwecke gute Dienste leisten kann. E. Laager

Von einfachen und komplizierten Bewegungen

URS KIRCHGRABER

(Schluss)

Soweit, so gut! Wir haben auch beim näherungsweise kreisförmigen Billard periodische Bewegungen und kreisförmige invariante Kurven, nur – statt jeweils unendlich vieler periodischer Bewegungen sind es nunmehr endlich viele, und statt lauter invarianter Kurven sind es nur noch *viele* invariante Kurven! Es ist also noch Platz für neue Phänomene da! Tatsächlich hat schon Poincaré über diese Zonen nachgedacht und ist zu folgendem Ergebnis gelangt. In seinen berühmten «Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste» schreibt er: «Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces courbes... on sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication de tous les problèmes de dynamique.»

Seit Arnold den Griffel gespitzt und es trotz aller Ehrfurcht vor der scheuen Zurückhaltung des alten Meisters gewagt hat, eine Figur zu machen, projiziert schon jeder sein Bild bei jeder festlichen Gelegenheit, und so darf auch ich Ihnen ein solches Bild zeigen!

Sie sehen dreierlei Dinge:

1. Einzelne Punkte: sie beschreiben periodische Bewegungen.
2. Geschlossene kreisförmige Kurven: sie sind invariant und tragen quasiperiodische Bewegungen.
3. Der Rest: hier sehen Sie ein wildes Gewimmel von Kurven – das sind diejenigen, von denen Poincaré spricht! Diesen Rest nennt man das *chaotische* oder *stochastische Regi-*

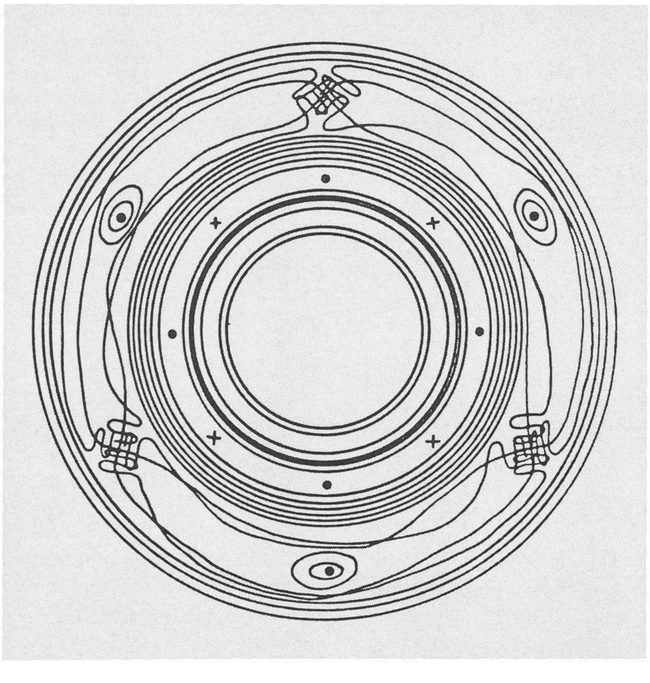

Fig. 15

me. Wenn man in diesem Gebiet einen Punkt P_0 wählt und allen seinen Nachfolgern P_1, P_2,... folgt, durchwandert man, so zeigen Computerexperimente, in einem irren Spaziergang das chaotische Regime - und wenn man hernach noch einmal beginnt und den Ausgangspunkt P_0 des Spaziergangs nur ein ganz klein bisschen verlegt, macht man einen genau so irren, aber völlig andern Spaziergang! Die Fig. 16 zeigen eine Reihe von Computerexperimenten. Der Grund für die Unterschiede zwischen den Figuren liegt darin, dass der Grad der Abweichung der betrachteten Abbildung von der ursprünglichen Twist-Abbildung von Figur zu Figur vergrössert wird. Man sieht, dass die Menge der invarianten Kurven kleiner, das chaotische Regime dabei vergrössert wird.

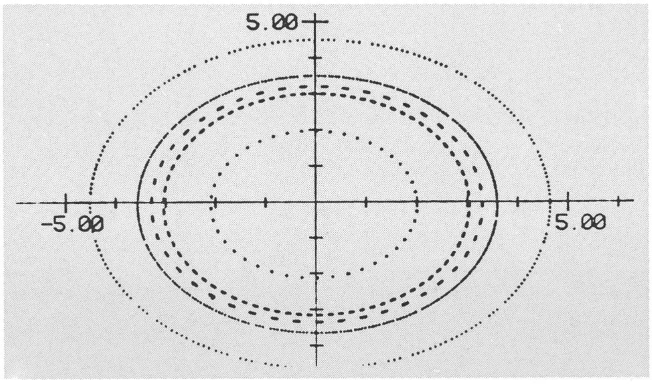

Fig. 16 a

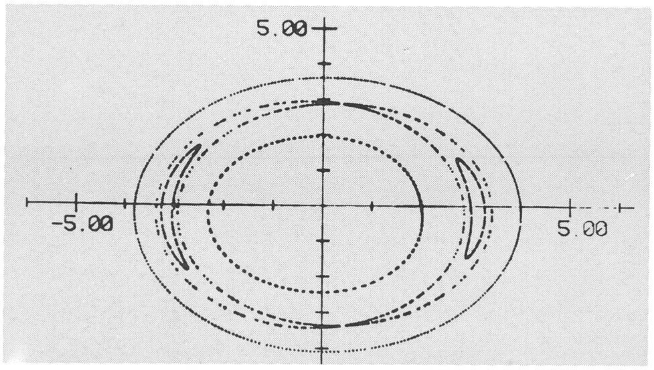

Fig. 16 b

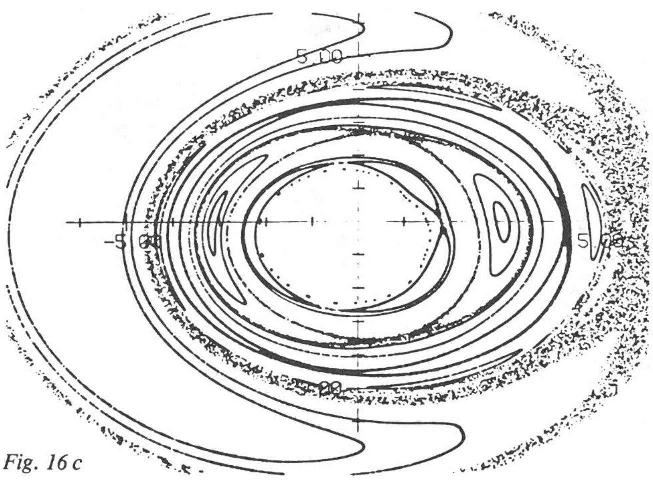
Fig. 16 c

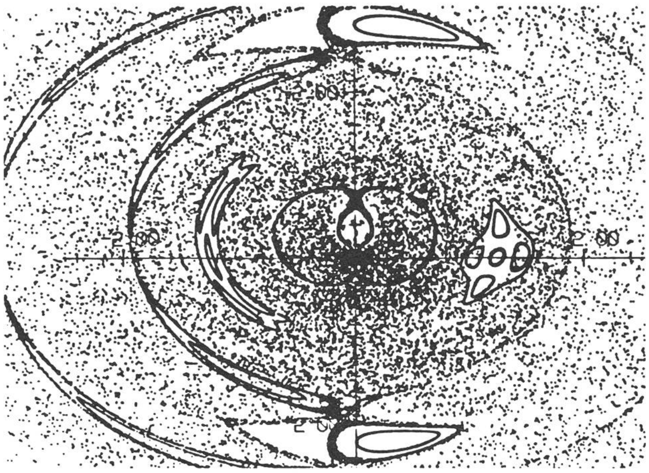
Fig. 16 d

Meine Damen und Herren, von einfachen und komplizierten Bewegungen sollte in diesem Vortrag die Rede sein. Beim näherungsweise kreisförmigen Billard haben wir einerseits periodische und, auf kreisförmigen invarianten Kurven, quasiperiodische Bewegungen, und andererseits stochastisches Verhalten, wilde Spaziergänge! Wenn die Abweichung von der Bande von der Kreisform sehr klein ist, ist die Ausdehnung des stochastischen Regimes gering. Betrachten wir aber stärkere Abweichungen, dann wächst die Grösse des chaotischen Regimes auf Kosten der invarianten Kurven, wie unsere Computerexperimente zeigen, bis diese ganz verschwinden und nur noch stochastische Bewegung vorhanden ist. Es ist deshalb heute eine aktuelle Frage auf dem Gebiet der dynamischen Systeme, Kriterien für die Nichtexistenz von invarianten Kurven zu finden, um zu entscheiden, wann die letzte invariante Kurve verschwindet, wann die Ordnung dem Chaos weicht - oder umgekehrt! In der Tat hat der amerikanische Mathematiker *John Mather* unlängst einen Satz bewiesen, der in diese Richtung zielt.

Wir haben ziemlich ausführlich über periodische und quasiperiodische Bewegungen gesprochen. Um die Beschreibung der Bewegungen im stochastischen Regime habe ich mich mit der Metapher vom irren Spaziergang mehr oder weniger suggestiv gedrückt. Der Grund liegt darin, dass die Bewegungen im stochastischen Regime so kompliziert sind, dass sie zwar einem Beobachter als regellos, zufällig erscheinen, dass es aber gar nicht einfach ist, derartigen Beobachtungen eine präzise mathematische Formulierung zu geben. Es ist naheliegend, dass man versuchen wird, Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik, aus der Stochastik, wie man heute sagt, zu benützen. Als Inbegriff des Zufälligen betrachtet man die aufeinanderfolgenden Ausfälle bei wiederholter Anwendung eines Zufallsexperiments, zum Beispiel beim Würfeln.

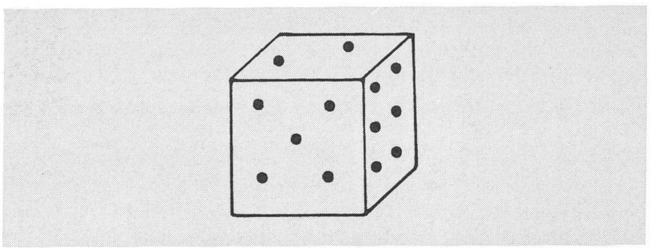
Fig. 17

Wenn Sie würfeln, wird eine völlig zufällige Folge von Zahlen zwischen 1 und 6, eine sog. *Zufallsfolge,* entstehen

$$1, 2, 4, 5, 5, 6, 2, 3, 4, \ldots..$$

Wir würden eine Bewegung zufällig, chaotisch oder stochastisch nennen, wenn sie in irgendeinem Sinn einer solchen Zufallsfolge folgen würde. Tatsächlich gelingt es manchmal, ungefähr in der folgenden Art und Weise einen Zusammenhang zwischen Bewegungen und Zufallsfolgen herzustellen.

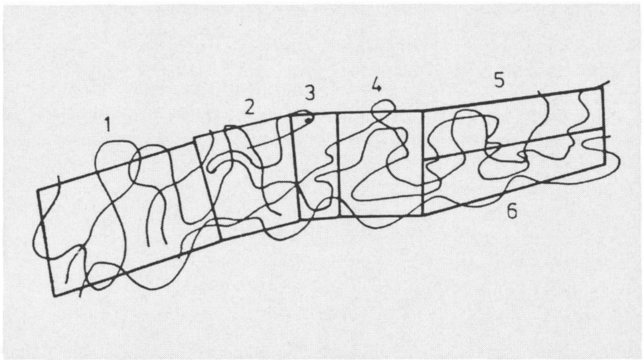

Fig. 18

Man unterteilt das stochastische Regime in mehrere, zum Beispiel 6 Teile (damit wir weiter mit dem Würfel auskommen). Sei P_0 ein Punkt im stochastischen Regime und P_1, P_2, ... die Nachfolger von P_0. Dieser Bewegung ordnen wir eine Zahlenfolge mit Zahlen zwischen 1 und 6 zu, einfach indem wir angeben, in welchem Teil P_0, P_1, P_2, ... sich befinden; gilt zum Beispiel: P_0 ist in Teil 3, P_1 in Teil 5, P_2 in Teil 2, P_3 in Teil 4, ... dann lautet die *zugeordnete Zahlenfolge*

$$3, 5, 2, 4, \ldots$$

Gelingt es nun zu zeigen, dass es zu jeder beliebig vorgegebenen Zahlenfolge eine Bewegung gibt, deren zugeordnete Zahlenfolge gerade mit der gegebenen übereinstimmt, dann ist offenbar das Bewegungsverhalten genau so zufällig wie das Würfeln!

Mit der Stochastizität der Bewegungen im chaotischen Regime einher geht ein Phänomen, das man *Sensitivität bezüglich Änderungen des Anfangszustandes* nennt. Ist nämlich der Punkt P_0 im chaotischen Regime und P_0, P_1, P_2, ... die Folge seiner Nachfolger, und $\overline{P}_0$ ein Punkt in der Nähe von P_0 und $\overline{P}_0$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... die Folge der Nachfolger von $\overline{P}_0$, dann wird i.a. der Abstand zwischen $\overline{P}_i$ und P_i für wachsendes i *rasch* gross. Dieser Tatbestand ist von beträchtlicher Bedeutung. Das *Prinzip von Ursache und Wirkung* besagt bekanntlich, dass jede Ursache eine wohlbestimmte Wirkung hat. Dieses Prinzip gilt bei Bewegungsproblemen. Für unser Beispiel hat nämlich jeder Punkt P_0 eine eindeutig bestimmte Folge von Nachfolgern P_1, P_2, ... Gemeinhin nimmt man an, dass auch noch das folgende stärkere Prinzip gilt: Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen. Dieses Prinzip ist aber offenbar bei Bewegungsproblemen im chaotischen Regime praktisch verletzt. Dass es sich bei diesen Betrachtungen nicht nur um akademische Spielereien handelt, zeigt die Tatsache, dass die Frage der Prognostizierbarkeit des Wetters mit der Sensitivität von dynamischen Systemen zusammenhängt!

Die Lust am Billardspiel ist Ihnen inzwischen sicherlich abhanden gekommen, und es wird Ihnen recht sein, wenn ich dieses strapazierte Modellproblem verlasse! Ich möchte im folgenden noch an zwei etwas realitätsnäheren Beispielen den Zusammenhang zwischen Bewegungen und Zufallsfolgen aufzeigen.

Betrachten Sie ein Pendel, cf. Fig. 19, d.h. ein um einen Aufhängepunkt A drehbaren Stab, an dessen freiem Ende ein Gewicht angebracht ist. Ein solches Pendel hat im wesentlichen fünf verschiedene Bewegungsformen. 1) *Die untere Gleichgewichtslage:* Das Pendel hängt bewegungslos nach unten. 2) *Schwingungen:* Das Pendel schwingt um die untere Gleichgewichtslage. 3) *Rotationslösungen:* Das Pendel rotiert um den Aufhängepunkt und zwar entweder immer im Uhrzeigersinn oder immer im Gegenuhrzeigersinn. 4) *Die obere Gleichgewichtslage:* Das Pendel ist in Ruhe und zwar so, dass das Gewicht genau über dem Aufhängepunkt ist. Diese Gleichgewichtslage ist instabil; bei der geringsten Störung entfernt sich das Pendel aus dieser Lage. 5) *Kriechlösungen:* Wenn man das Pendel zum Beispiel aus der unteren Gleichgewichtslage mit der genau richtigen Geschwindigkeit anstösst, kriecht es, je nachdem, im oder gegen den Uhrzeigersinn, gerade in die obere Gleichgewichtslage; natürlich sind auch die Kriechlösungen instabil: Wird das Pendel etwas zu stark angestossen, beginnt es zu rotieren, bei zu geringer Anstossgeschwindigkeit erreicht es die obere Gleichgewichtslage nicht und schwingt.

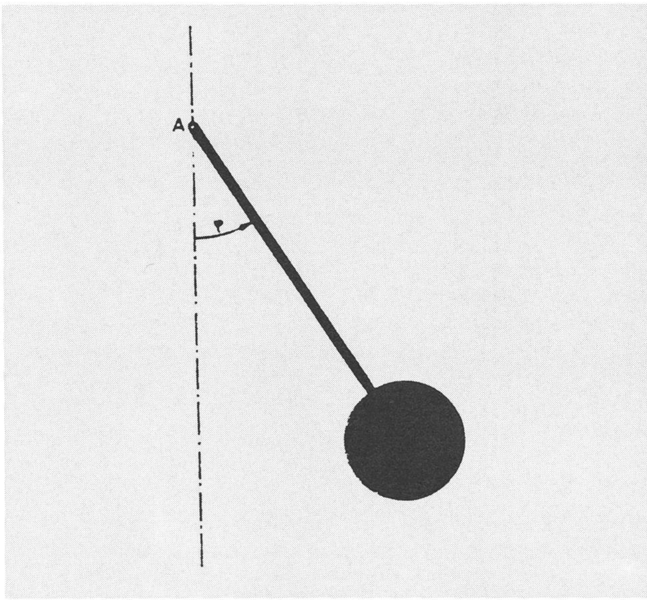

Fig. 19

Nehmen wir nun an, dass fortan der Aufhängepunkt A des Pendels kleine periodische Schwingungen in vertikaler Richtung ausführe. Man erwartet, dass dies vor allem einen Effekt auf die instabilen Kriechlösungen haben wird. Tatsächlich entsteht in der Nähe der Kriechlösungen ein chaotisches Regime, denn man kann beweisen, dass folgender Satz gilt: Geben wir eine beliebige Zahlenfolge von abwechslungsweise positiven und negativen Zahlen vor, z.B.

$$3, -5, 7, -2, 8, -4, 11, -7, \ldots$$

dann existiert dazu eine Bewegung, die ihr im folgenden Sinne folgt: Das Pendel rotiert zuerst 3mal im Uhrzeigersinn, dann 5mal im Gegenuhrzeigersinn, dann wieder 7mal im Uhrzeigersinn usw., usf.!

Bsp. 3 Offenbar ist es nun allerhöchste Zeit, sich zu erinnern, dass wir hier in einer Sitzung der Astronomischen Gesellschaft sind, und mit einem Beispiel aus der Himmelsmechanik abzuschliessen! Wir diskutieren einen Spezialfall des berühmten Dreikörperproblems. Zunächst betrachten wir die leicht elliptische Bewegung zweier identischer Massen $M_1 = M_2 = M$ in einer Ebene α um ihren Mittelpunkt 0.

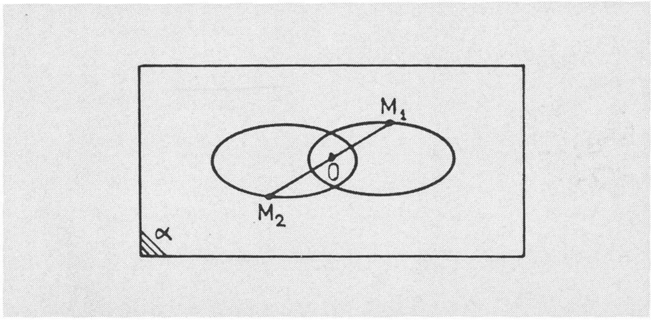

Fig. 20

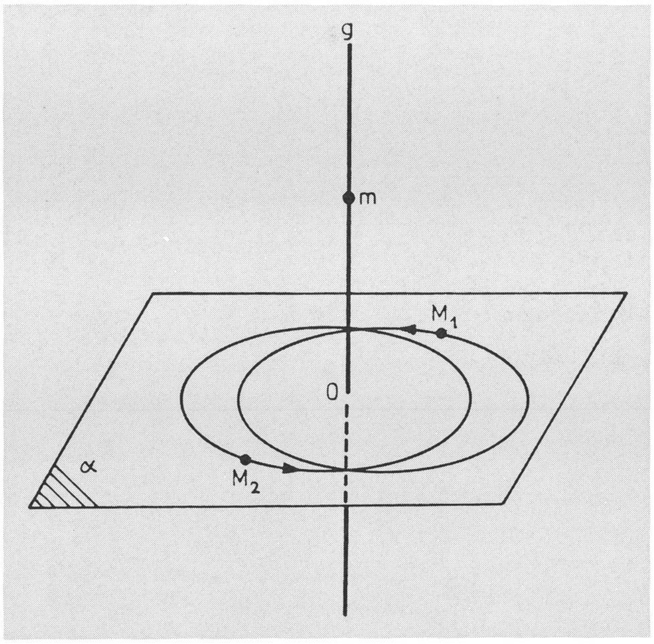

Fig. 21

Sodann führen wir eine dritte, im Vergleich zu M ganz kleine Masse m ein. Weil die dritte Masse ganz klein ist, beeinflusst sie die Bewegung der beiden anderen Massen M_1, M_2 nicht und diese führen weiter ihre elliptischen Bewegungen um ihren Mittelpunkt 0 aus. Betrachten wir nun die Gerade g, die senkrecht zur Bahnebene α von M_1 und M_2 ist und durch den Mittelpunkt 0 von M_1 und M_2 geht. Wenn wir die kleine Masse m irgendwann irgendwo auf g setzen und ihr in Richtung von g irgendeine Geschwindigkeit erteilen, dann wird sie sich aus Symmetriegründen immer auf g bewegen.

Überraschenderweise gibt es unter den Bewegungen von m auf g stochastisches Verhalten. Zu einer beliebigen Bewegung von m auf g betrachten wir die aufeinanderfolgenden Zeitpunkte

$$\ldots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \ldots$$

zu denen m durch den Punkt 0 geht. Nun haben Alekseev und der schon zitierte Moser den Satz bewiesen, dass man diese Zeitpunkte t_i fast beliebig wählen kann! Tatsächlich gilt: Sei s_k die grösste ganze Zahl, welche kleiner oder gleich

$$\frac{t_{k+1} - t_k}{T}$$

ist, wobei T die Periode für die Umlaufzeit von M_1 und M_2 ist. Sei nun

$$\ldots, s^*_{-2}, s^*_{-1}, s^*_0, s^*_1, s^*_2, \ldots$$

eine beliebige Folge von natürlichen Zahlen, wobei keine kleiner als eine gewisse Zahl N ist, dann gilt: Es gibt eine Bewegung von m, so dass gerade

$$\ldots, s_{-2} = s^*_{-2}, s_{-1} = s^*_{-1}, s_0 = s^*_0, s_1 = s^*_1, \ldots$$

gilt.

Wieder haben wir einen Zusammenhang zwischen Bewegungen und beliebigen Zahlenfolgen, also Zufallsfolgen!

Meine Damen und Herren, von einem Schriftsteller, dessen Name ich leider nicht kenne, stammt der Satz (und diesmal handelt es sich nicht um ein mathematisches Theorem): Wenn die Ordnung die Lust der Vernunft sei, dann sei die Unordnung die Wonne der Fantasie.

Ich denke, dieser Satz rundet diesen Vortrag aufs passendste ab!

Adresse des Autors:
Urs Kirchgraber, Seminar für Angewandte Mathematik,
ETH-Zentrum, 8092 Zürich.