

**Zeitschrift:** Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft  
**Herausgeber:** Schweizerische Astronomische Gesellschaft  
**Band:** 43 (1985)  
**Heft:** 210

**Artikel:** Von einfachen und komplizierten Bewegungen [Fortsetzung]  
**Autor:** Kirchgraber, Urs  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-899211>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

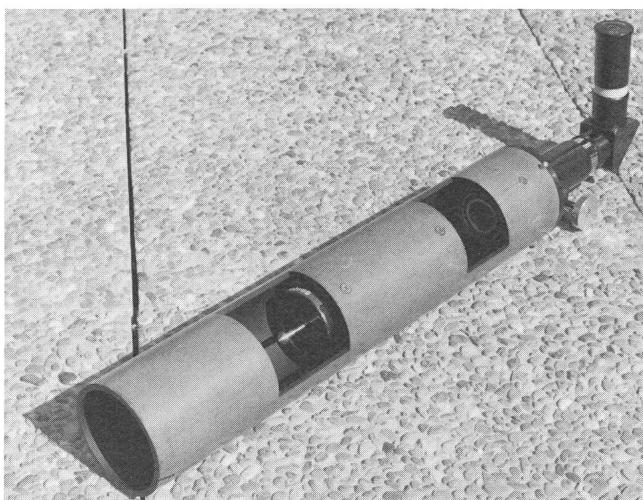
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



*Le système coronographique en entier. Une construction similaire est adaptable à l'arrière de n'importe quelle petite lunette astronomique.*

vation et compense le dégagement nécessaire pour l'utilisation de l'appareil de photo.

#### Photographie

L'un des seul film N-B sensible à la raie H $\alpha$  est le TP2415 Kodak. Pour une photo prise au foyer, le temps de pose est de 1/250 s. sur le 2415 développé 4 minutes dans du D19.

L'avantage de la photographie est de pouvoir augmenter le contraste, ainsi, le fond du ciel apparaît foncé sur les clichés. Pour toutes les observations, une mouture équatoriale est indispensable, le moindre décalage se remarque immédiatement.

#### Adresse de l'auteur:

Armin Behrend, Observatoire de Miam-Globis, Fiaz 45, CH-2304 La Chaux-de-Fonds.

## Von einfachen und komplizierten Bewegungen

URS KIRCHGRABER

(Fortsetzung aus ORION 209)

Die nächste Frage, die sich aufdrängt, ist offenbar die folgende. Wie ist die Geometrie der Bewegungen eines Billards, wenn die Banne nicht einfache Kreisgestalt hat?

Um die Antwort auf diese Frage ein wenig auseinandersetzen zu können, ist es zweckmäßig, die Bewegungen beim Billard in leicht varierter Form zu beschreiben. Geometrisch betrachtet besteht das Billard offenbar darin, dass jeder Sehne  $s$  durch Reflexion eine Nachfolge sehne  $s'$  zugeordnet wird, cf. Abb. 8; indem man zu jeder Nachfolge sehne wieder deren Nachfolge sehne bestimmt, erhält man, ausgehend von einer

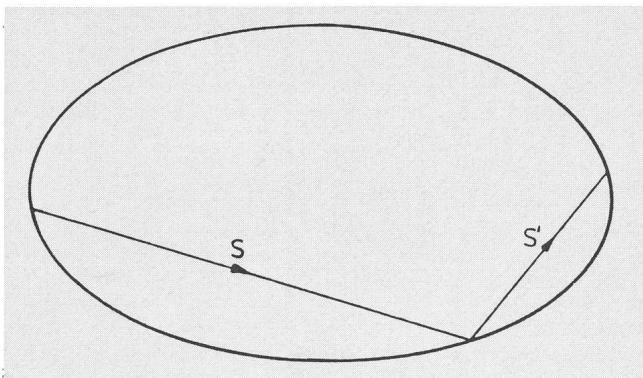


Fig. 8

Anfangs sehne  $s_0$  eine Folge von Sehnen  $s_0, s_1, s_2, \dots$ , die eine Bewegung beschreiben.

Im Spezialfall einer kreisförmigen Banne erhält man zu einer Sehne  $s$  ihre Nachfolge sehne  $s'$  einfach durch Drehung von  $s$  um den Mittelpunkt des Bandenkreises um den Zentriwinkel  $\psi$  von  $s$ .

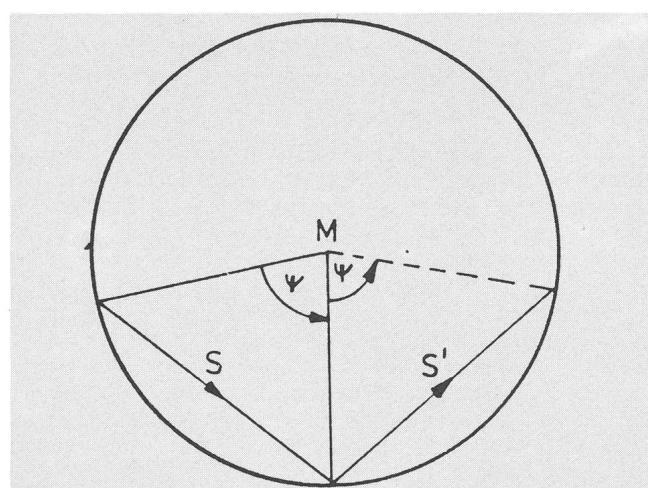


Fig. 9

Wir erhalten nun eine Variante zur bisherigen Beschreibung des Billardproblems, wenn wir Sehnen durch Punkte charakterisieren.

Wir wählen ein für allemal einen Referenzpunkt 0. Ist dann s irgend eine Sehne, so können wir ihr den Fußpunkt P des Lotes von 0 auf s zuordnen. Umgekehrt gehört zu einem Punkt P eine Sehne s, so dass P Lotfußpunkt des Lotes von 0 auf s ist, cf. Fig. 10. Wir ersetzen deshalb fortan die Sehnen durch ihre Lotfusspunkte.

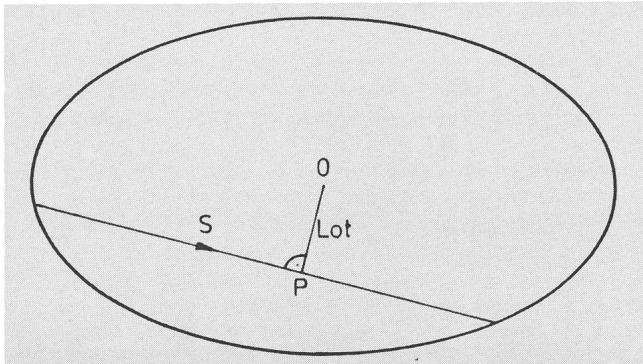


Fig. 10

Statt einer Sehne s ihre Nachfolgesehne s' zuzuordnen, werden wir jedem Punkt P einen Nachfolgepunkt P' zuordnen. Ist nämlich P Lotfußpunkt von 0 auf einer Sehne s, dann sei P' einfach der Lotfußpunkt von 0 auf s', der Nachfolgesehne von s.

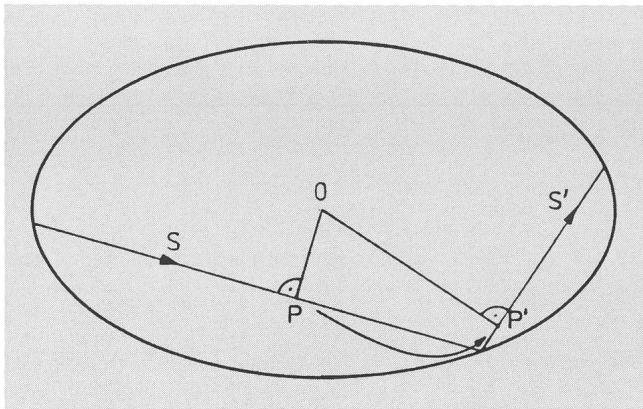


Fig. 11

In dieser Weise erhalten wir also eine *Punktabbildung*, jedem Punkt P ist ein Nachfolger P' zugeordnet. Indem man zu jedem Nachfolgepunkt wieder den Nachfolgepunkt bestimmt, erhält man, ausgehend von einem Anfangspunkt  $P_0$ , eine Folge von Punkten  $P_0, P_1, \dots$ , die eine geeignete Darstellung einer Bewegung des Billards abgeben.

Betrachten wir noch einmal die Verhältnisse beim kreisrunden Billard, cf. Fig. 12.

Natürlich wählen wir  $0 = M$ . Dann erhält man den Nachfolger  $P'$  eines Punktes  $P$  einfach, indem man  $P$  um den Winkel  $\psi$  dreht. Bezeichnet  $r$  den Abstand von  $P$  zu  $M$  und  $R$  den Radius des Bandenkreises, dann gilt offenbar

$$\cos \frac{\psi}{2} = \frac{r}{R} \quad \text{oder} \quad \psi = 2 \arccos \left( \frac{r}{R} \right)$$

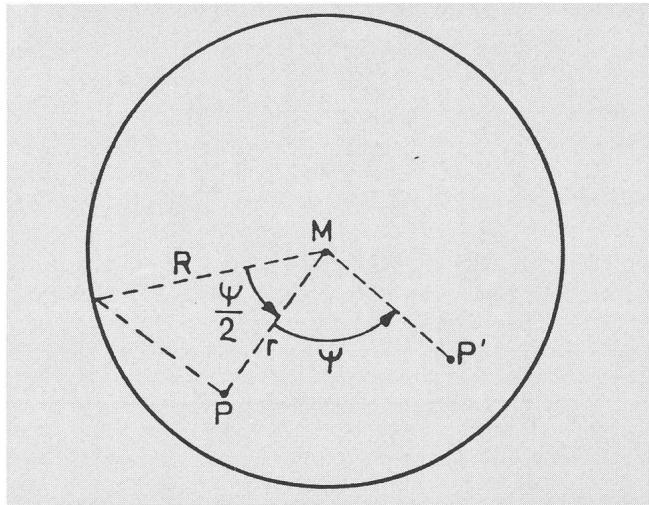


Fig. 12

Daraus ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

i) Die konzentrischen Kreise um M sind invariant d.h. ist  $K_r$  der konzentrische Kreis um M vom Radius  $r$ , dann ist mit einem Punkt  $P$  auch sein Nachfolger  $P'$  auf  $K_r$ , cf. Fig. 13.

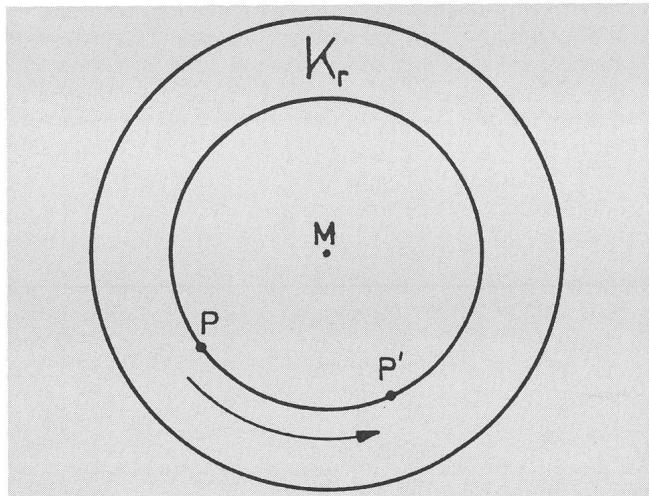


Fig. 13

ii) Auf einen konzentrischen Kreis  $K_r$  eingeschränkt ist der Übergang von  $P$  zu  $P'$  einfach eine Drehung um den Winkel

$$\psi(r) = 2 \arccos \left( \frac{r}{R} \right).$$

Weil der Drehwinkel aber von Kreis zu Kreis ändert, liegt nicht einfach eine Drehung um M vor, sondern eine sog. *Twist-Abbildung*.

iii) Ist  $P_0, P_1, P_2, \dots$  eine Folge von Nachfolgern, die auf einem Kreis  $K_r$  liegen und ist

$$\frac{\psi(r)}{360^\circ} = \frac{p}{q}$$

eine rationale Zahl, dann bilden  $P_0, P_1, \dots$  ein regelmässiges q-Eck und stellen eine *q-periodische Bewegung* dar. Ist hingegen

$$\frac{\psi(r)}{360^\circ}$$

eine irrationale Zahl, dann kommen Punkte der Folge  $P_0, P_1, P_2, \dots$  jedem Punkt  $Q$  auf  $K_1$  immer wieder beliebig nahe, stellen also eine *quasiperiodische Bewegung* dar.

Damit sind die alten Erkenntnisse ins neue Bild übertragen; alter Wein in neuen Schläuchen sozusagen!

Verlassen wir endlich das exakt kreisförmige Billard, gehen wir zu einem Billard über, dessen Bande nur noch *näherungsweise kreisförmig* ist, cf. Fig. 14.

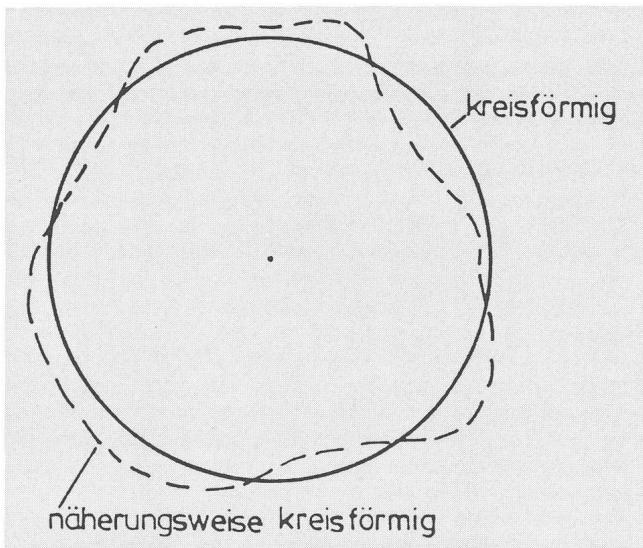


Fig. 14

Das wird ein so grosser Unterschied nicht sein, werden Sie denken! Da haben Sie schon recht, ein bisschen zumindest – aber Sie haben vor allem auch unrecht! Lassen Sie mich Ihnen erklären warum.

Man wird vermuten, dass auch beim näherungsweise kreisförmigen Billard periodische und quasiperiodische Bewegungen auftreten. Diese Vermutung ist richtig. *Ausserordentlich überraschend ist* hingegen, wie schwierig es ist, die Richtigkeit dieser Vermutungen einzusehen. Was die periodischen Bewegungen anbelangt, folgt die Behauptung aus einem von dem berühmten französischen Mathematiker *Henri Poincaré* vermuteten, aber erst vom amerikanischen Mathematiker *George David Birkhoff* in den Zwanzigerjahren bewiesenen Satz, den man heute den Poincaré-Birkhoffschen Fixpunktsatz nennt. Allerdings ist das Bild, wie sich noch zeigen wird, doch ganz anders als im exakt kreisförmigen Fall; dort gibt es jeweils unendlich viele periodische Bewegungen zu einer Periode, die zusammen einen invarianten konzentrischen Kreis bilden; von diesen überleben typischerweise nur endlich viele die Abänderung der exakt kreisförmigen Bande. Sie werden sogleich verstehen, was ich meine, wenn ich Ihnen ein Bild zeige. Doch zunächst wollen wir uns noch den quasiperiodischen Bewegungen beim näherungsweise kreisförmigen Billard zuwenden. Diese Frage ist so schwierig, dass sie nicht schon in den Zwanzigerjahren, sondern erst in den Sechzigerjahren unseres Jahrhunderts gelöst worden ist! Sie ist Teil einer berühmt gewordenen Theorie, der sog. KAM-Theorie, die so heisst nach ihren Schöpfern, den Russen *Andrei Nikolaeivic Kolmogorov* und seinem Schüler *Vladimir Arnold*, und dem seit 1980 an der ETH in Zürich lehrenden Deutsch-amerikaner *Jürgen Moser*. Der Satz von Moser über gestörte Twist-Abbildungen besagt, dass es bei unserem näherungsweise kreisförmigen Billard noch immer sehr viele kreisähnli-

che invariante Kurven gibt, d.h. kreisförmige Kurven  $C$ , die die Eigenschaft haben, dass mit einem Punkt  $P$  auf  $C$  auch sein Nachfolger  $P'$  auf  $C$  ist. Überdies sind die Bewegungen auf solchen invarianten Kurven quasiperiodisch, d.h. jede Folge  $P_0, P_1, P_2, \dots$  von Nachfolgepunkten auf  $C$  kommt jedem Punkt  $Q$  auf  $C$  immer wieder beliebig nahe. Der Beweis dieses Satzes erfordert, wie schon bemerkt, tiefgründige mathematische Betrachtungen, die natürlich nicht Gegenstand dieses Vortrages sein können. Letztlich liegt der Grund für die Schwierigkeiten darin, dass bei der Twist-Abbildung zum exakt kreisförmigen Billard invariante konzentrische Kreise mit periodischen und solche mit quasiperiodischen Bewegungen beliebig benachbart sind.

#### Adresse des Autors:

Urs Kirchgraber, Seminar für Angewandte Mathematik, ETH-Zentrum, 8092 Zürich.

(Schluss in der nächsten Nummer)

## Buchbesprechungen

*High Energy Astrophysics and Cosmology*. Herausgegeben von *YANG JIAN* und *ZHU CISHENG*. Gordon and Breach Science Publishers 1983, 529 S., ca. 130 Abb., \$ 65.00.

Anfang 1982 fand in Nanking, China, ein Workshop zu diesem Thema statt, an dem hauptsächlich chinesische Astrophysiker und Glieder des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik in München, nebst einigen amerikanischen und japanischen Astronomen teilnahmen. Das vorliegende Buch gibt den vollen Text der Referate auf Englisch, die eine ganze Reihe von aktuellen Themen berühren. Während die chinesischen Artikel zur Hauptsache für den Spezialisten gedacht sind, finden wir bei den westlichen Beiträgen mehrheitlich Übersichtsreferate, die auch den physikalisch interessierten Sternfreund ansprechen und ihm die modernen Forschungsergebnisse (Stand 1982) nahebringen.

Der Inhalt gliedert sich in acht Abschnitte: Pulsare, Neutronensterne, Supernovae, Doppelsterne, Akkretionscheiben (d.h. Materie, die in einer ebenen Schicht mit hoher Geschwindigkeit z.B. auf einen Neutronenstern fliesst), Schwarze Löcher, Quasare und aktive Galaxien, Neutrinos mit Masse. Stellvertretend für die 41 Artikel seien die beiden des Abschnitts Supernovae erwähnt: W. HILLEBRANDT beschreibt lebendig, wie es in einem massereichen Stern nach der Verschmelzung von Silizium zu Eisen zum Kollaps und zur nachfolgenden Explosion kommt. Erst stellt er die Beobachtungstat-sachen dar und dann referiert er über die theoretischen Modelle, die das Zusammenfallen der Materie und den Rückprall am Kern des Sterns anhand von Computerrechnungen beschreiben. Dieser Rückprall und die nachfolgende Explosion machen den eigentlichen Supernova-Ausbruch aus. Aber obwohl das in der Natur so spektakulär verläuft, kommt in den Rechnungen die Explosion durchaus nicht immer zustande! – Supernovae sind auch für die Chinesen ein beliebtes Arbeitsgebiet, wurde doch jene des Jahres 1054, die dann zum Krabbennebel führte, vor allem von den Chinesen beobachtet. Im zweiten Beitrag sucht *Xi ZEONG* in historischen Aufzeichnungen nach weiteren Supernova-Ausbrüchen, dann aber auch nach Beschreibungen der Sonnenaktivität und stellt fest, dass Sonnenflecken bereits im Jahr 165 v. Chr. entdeckt worden sind. Nichts Neues unter der Sonne!

Das Buch kann dem an moderner Forschung interessierten Sternfreund gerade durch die Übersichtsartikel viel Wissenswertes bieten.

H. R. BRUGGER