Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 42 (1984)
Heft: 205

Artikel: Wie bewegen sich die Sterne in einem Kugelsternhaufen?
Autor: Stettler, Raymond
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-899307

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Wie bewegen sich die Sterne in einem Kugelsternhaufen?

Dr. RAYMOND STETTLER

Die Beantwortung dieser Frage ist nicht leicht. Durch Beobachtung hat bis heute noch nie die Bewegung eines Einzelsterns eines Kugelsternhaufens (KH) verfolgt werden können. Da die Sterne perspektivisch so nahe beieinander liegen, dürfte dies sehr schwer sein (s. auch Abschnitt 5). Anderseits ist auch theoretisch – ausser gewissen sehr allgemeinen Aussagen – vorerst nicht viel zu erhoffen. Denn es handelt sich hier um ein n-Körperproblem mit $n \approx 10^4 - 10^6$ (n-Körperproblem: Wie bewegen sich n punktförmige Massen, die allein ihren Gravitationskräften unterliegen, bei gegebenen Anfangsbedingungen?). Dabei weiss man, dass schon das 3-Körperproblem streng mathematisch ungelöst ist! Man kann nur versichern, dass Gebilde wie die KH nicht stabil sind, dass sie sich vielmehr mit der Zeit auflösen.*)

Trotz den angedeuteten Schwierigkeiten sind Versuche gemacht worden, das zeitliche Verhalten von KH mit Statistik und umfangreichen Computerrechnungen zu studieren. Dabei vergleicht man oft einen KH mit einer Gasmenge, auf die man die Gesetze der kinetischen Gastheorie anwendet.

Hier soll von einer andern einfachen Modellvorstellung berichtet werden, die wohl auf E. STRÖMGREN[1]) zurückgeht.

1) Stern- und Massendichte in einem KH

Durch Sternzählungen an KH hat man in vielen Fällen gezeigt, dass die räumliche Sterndichte S radialsymmetrisch ist, und sich gut durch folgende Formel darstellen lässt

$$S(\rho) = A \cdot \frac{1}{(1+\rho^2)^{5/2}} \cdot \qquad (1)$$

ρ bedeutet den Abstand vom KH-Zentrum, gemessen in einer Einheit e, die noch festzulegen ist (z.B. 1 pc, 2 pc,...). A ist eine Konstante, die weiter unten berechnet wird. Als Einheiten werden durchwegs festgesetzt: Längeneinheit ist, wie eben bemerkt, die Strecke e; Masseneinheit ist die Sonnenmasse, und die Zeiteinheit ist der mittlere Sonnentag.

Die Sterndichte S an einer Raumstelle ist gleich der Anzahl Sterne in $1e^3$, geteilt durch die Gesamtzahl N aller Sterne des KH.

Angenommen der Radius des KH sei R_0. Dann muss

$$\int_0^{R_0} 4\pi\rho^2 S\, d\rho = 1 \qquad (2)$$

sein. Wie man durch Ableiten leicht bestätigt, gilt

$$\int_0^x \rho^2(1+\rho^2)^{-5/2} d\rho = \frac{1}{3}\, x^3(1+x^2)^{-3/2} \ . \qquad (3)$$

*) Die Arbeit wurde angeregt durch eine Frage von Dr. A. SCHMID, Bern

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$4\pi A \cdot \frac{1}{3} \frac{R_0^3}{(1+R_0^2)^{3/2}} = 1,$$

also

$$A = \frac{3}{4\pi} \frac{(1+R_0^2)^{3/2}}{R_0^3} \ . \qquad (4)$$

Setzt man abkürzend

$$\frac{(1+R_0^2)^{3/2}}{R_0^3} = a,$$

so wird

$$A = \frac{3}{4\pi}\, a. \qquad (5)$$

Für $R_0 \geqq 10$ ist $1 < a \leqq 1{,}015$. a ist also praktisch 1.

Vereinfachend nimmt man ferner an, dass alle Sterne des KH dieselbe Masse m besitzen; dann ist $mN = M_0$ die Gesamtmasse des KH und M_0S die Massendichte (d.h. die Masse pro $1e^3$).

Die Masse des KH innerhalb einer Kugel vom Radius $r \leqq R_0$ ist deshalb

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\rho^2 M_0 S\, d\rho$$

$$= M_0 a \frac{r^3}{(1+r^2)^{3/2}} \ .$$

Wir setzen noch $M_0 a = M_0{}^*$ und erhalten endgültig

$$M(r) = M_0{}^* \frac{r^3}{(1+r^2)^{3/2}} \ . \qquad (6)$$

Wie es sein muss, ist $M(R_0) = M_0$.

2) Die Bewegungsgleichungen eines KH-Sterns

Gegeben sei ein Stern mit Masse m im Abstand r vom KH-Zentrum Z.

Auf ihn wirkt nur die Anziehungskraft aller Sterne innerhalb der Kugel mit Radius r, während die Kräfte der übrigen Sterne sich aufheben. Dies ist ein bekanntes Gesetz; es gilt hier allerdings nur in einer gewissen Näherung. Ausserdem darf man sich die Masse aller Sterne innerhalb dieser Kugel im Zentrum konzentriert denken. Auch dies ist ein bekanntes Gesetz, das hier wieder nur annähernd gilt. Also wirkt auf m näherungsweise die Kraft

$$K = -\, k_0{}^2 \frac{M(r) \cdot m}{r^2}\ , \qquad (7)$$

wo $k_0{}^2$ die Gauss'sche Gravitationskonstante ist, allerdings mit der Längeneinheit e.

K ist eine Zentralkraft. Daraus folgt, dass die Bewegung des Sterns in einer Ebene erfolgt und dass zudem der Flächen-

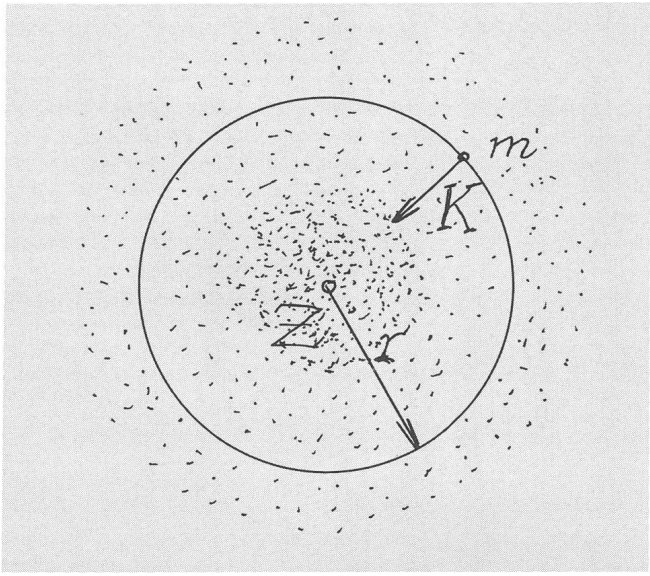

Abb. 1: Kraft, die der KH auf einen Stern ausübt.

satz gilt. Denkt man sich jetzt ein Koordinatensystem gegeben, dessen Ursprung mit dem KH-Zentrum zusammenfällt, und sind (x, y) die Koordinaten des Sterns, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = -k_0^2 \frac{M(r)\cdot m}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$$
$$m\ddot{y} = -k_0^2 \frac{M(r)\cdot m}{r^2}\cdot\frac{y}{r} \qquad (8)$$
$$r^2 = x^2+y^2.$$

Vereinfacht, und mit Rücksicht auf (6)

$$\ddot{x} = -k_0^2 M_0^* \frac{x}{(1+r^2)^{3/2}}$$
$$\ddot{y} = -k_0^2 M_0^* \frac{y}{(1+r^2)^{3/2}}. \qquad (9)$$

Alle möglichen Bewegungen eines KH-Sterns werden durch die Differentialgleichungen (9) erfasst. Man bestätigt übrigens sofort den Energiesatz.

Bemerkung: Im Kraftgesetz (7) ist $M(r)$ eine Funktion von r allein. Da sich aber die Sterne des KH bewegen, so ist $M(r)$ i.a. auch eine Funktion der Zeit. Dies wird in den Gleichungen (9) nicht berücksichtigt. Damit behauptet man, dass sich der KH in einem stationären Zustand befindet, bei dem also die Sterndichte unabhängig von der Zeit ist. Die Existenz eines derartigen Zustands ist allerdings mathematisch unbewiesen. Wenn aber alle Sterne Kreisbahnen um das KH-Zentrum beschreiben, so ist $M(r)$ tatsächlich zeitunabhängig. Deshalb bilden die Kreisbahnen u.E. einen sehr wichtigen und aufschlussreichen Spezialfall.

3) Kreisbahnen

Eine mögliche Bewegung der KH-Sterne sind Kreisbewegungen. Macht man nämlich den Ansatz

$$x = r\cos\omega t \qquad r \text{ const.},$$
$$y = r\sin\omega t$$

so erfüllt dieser die Gleichungen (9). Einsetzen in $(9)_1$ ergibt

$$-\omega^2 x = -k_0^2 \frac{M_0^*\cdot x}{(1+r^2)^{3/2}}.$$

$(9)_2$ liefert eine analoge Beziehung. Also muss

$$\omega^2 = k_0^2 \frac{M_0^*}{(1+r^2)^{3/2}}$$

sein. Da aber

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ist, mit T als Umlaufsdauer, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_0^2 M_0^*}}(1+r^2)^{3/4}. \qquad (10)$$

Gemäss unserer obigen Annahme beschreiben alle Sterne konzentrische Kreise um das KH-Zentrum, wobei die Bahnebenen aber alle möglichen Stellungen haben. Man erkennt, dass T mit r wächst, aber nicht proportional zu $r^{3/2}$, wie im Planetensystem.

Die Bahngeschwindigkeit v eines Sterns im Abstand r beträgt

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{k_0^2 M_0^*}\cdot\frac{r}{(1+r^2)^{3/4}}. \qquad (11)$$

v wächst zuerst mit r und fällt dann asymptotisch auf Null. Das Maximum erhält man für $r = \sqrt{2}$. Daraus ergibt sich

$$v_{max} = \sqrt{k_0^2 M_0^*}\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{27}}. \qquad (12)$$

4) Die Konstante k_0^2

Im nächsten Abschnitt werden konkrete Beispiele betrachtet. Um aber die obigen Formeln anwenden zu können, muss k_0^2 bekannt sein. Die konventionelle Gauss'sche Konstante k^2 ist gegeben durch

$$k^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{U^2(1+\mu)} \approx 2{,}959\cdot 10^{-4}$$

mit a = 1 AE, U = 365,256 mittlere Sonnentage und $\mu = 2{,}819.10^{-6}$ Sonnenmassen.

Um nun k_0^2 zu erhalten, muss a in der Längeneinheit e ausgedrückt werden. Deshalb ist

$$k_0^2 = k^2\cdot\left(\frac{a}{e}\right)^3.$$

Daraus berechnet man folgende kleine Tabelle

e	a/e	k_0^2
1 pc	$4{,}848\cdot 10^{-6}$	$3{,}371\cdot 10^{-20}$
2 pc	$2{,}424\cdot 10^{-6}$	$4{,}214\cdot 10^{-21}$
3 pc	$1{,}616\cdot 10^{-6}$	$1{,}249\cdot 10^{-21}$
4 pc	$1{,}212\cdot 10^{-6}$	$5{,}268\cdot 10^{-22}$

5) Beispiele

Wenn man von einem KH die Masse M_0, den Durchmesser $2R_0$ kennt und ausserdem die Einheit e festlegt, so können mit den Formeln (10), (11), (12) T, v und v_{max} berechnet werden.

1. Beispiel:

e = 2 pc
$2R_O$ = 40 pc = 20 e
M_O = 10^5 = 10^5 Sterne mit m = 1.
Dann ist $M_O{}^* = 1{,}015 \cdot 10^5$, $k_O{}^2 = 4{,}214 \cdot 10^{-21}$.

Wir stellen die gerundeten Resultate in einer Tabelle zusammen.

r / e	r / pc	M(r)/m / Anzahl Sterne	Mittl. Abstand zweier Sterne der Kugelschale in LJ	T / Jahre	v / km sec^{-1}
0	0	0		$8{,}3 \cdot 10^5$	0
0,1	0,2	100	0,23	8,4	1,5
0,25	0,5	1450	0,23	8,7	3,5
0,5	1,0	9100	0,26	9,8	6,2
1,0	2,0	35900	0,34	$1{,}4 \cdot 10^6$	8,8
2,0	4,0	73000	0,61	2,8	8,8
5,0	10,0	96000	1,8	9,6	6,4
10,0	20,0	100000	6,2	$2{,}6 \cdot 10^7$	4,6

Daraus entnimmt man z.B., dass im Abstand r = 0,5e = 1 pc ein Stern eine Umlaufsdauer von $9{,}8 \cdot 10^5$ Jahre und eine Bahngeschwindigkeit von 6,2 km sec^{-1} besitzt. In der Kugel mit diesem Radius befinden sich total 9100 Sterne der Masse 1. Der mittlere Abstand zweier Sterne in der Kugelschale mit den Radien 0,5 pc und 1,0 pc beträgt 0,26 LJ. Der mittlere Abstand zweier Sterne ist wie folgt definiert: Sind im Volumen V n Sterne, dann ist der mittlere Abstand = $(V/n)^{1/3}$.

Die maximale Geschwindigkeit ist v_{max} = 9,2 km sec^{-1}. Hieraus folgert man: Ist die Entfernung des KH etwa 10 kpc, so hätte ein Stern maximal eine jährliche EB, senkrecht zum Visionsradius, von nur 0,0002″. Dies würde heissen, dass erst nach Jahrhunderten Konfigurationsänderungen an KH beobachtbar sind!

Eine Vergrösserung von e bewirkt eine Zunahme des mittleren Abstands zweier Sterne sowie der Umlaufdauer, dagegen eine Abnahme der Geschwindigkeit.

2. Beispiel:

e = 4 pc
$2R_O$ = 40 pc = 10 e
M_O = 10^5 = $5 \cdot 10^4$ Sterne mit m = 2.
$M_O{}^* = 1{,}0606 \cdot 10^5$, $k_O{}^2 = 5{,}268 \cdot 10^{-22}$.

r / e	r / pc	M(r)/m / Anzahl Sterne	Mittl. Abstand zweier Sterne der Kugelschale in LJ	T / Jahre	v / km sec^{-1}
0	0	0		$2{,}3 \cdot 10^6$	0
0,125	0,5	100	0,56	2,3	1,3
0,25	1,0	760	0,58	2,4	2,6
0,50	2,0	4700	0,63	2,7	4,5
1,0	4,0	19000	0,83	3,9	6,3
2,0	8,0	38000	1,51	7,7	6,4
5,0	20,0	50000	4,50	$2{,}6 \cdot 10^7$	4,6

v_{max} = 6,63 km sec^{-1}.

Man beachte hier den erheblich vergrösserten mittleren Abstand, bedingt vor allem durch die grössere Einheit.

6) Verallgemeinerung des Modells

Das betrachtete KH-Modell ist wegen den vorausgesetzten Kreisbahnen recht speziell. Auf Grund der Differentialgleichungen (9) sind aber nicht nur Kreisbahnen, sondern auch sehr viel allgemeinere Bahnen möglich, nämlich sog. Rosettenbahnen. Bei diesen bleibt der Stern im KH gefangen; sein Abstand r variiert zwischen den beiden Extremwerten $r_{min} > 0$ und $r_{max} \leqq R_O$. Die Abb. 2a, b, c zeigen 3 Typen solcher Bahnen.

Die Entstehung einer Rosettenbahn kann als gestörte Kepler-Bewegung verstanden werden: Bewegt sich ein Stern in einer Kepler-Ellipse mit Brennpunkt im KH-Zentrum, und dreht sich gleichzeitig die Absidenlinie (hier retrograd), so liefert die Zusammensetzung beider Bewegungen die Rosettenbewegung. Die Elemente der Ellipse sowie die Drehung der Absidenlinie erfahren dabei periodische Störungen. Ausser den Rosettenbahnen sind übrigens auch Linearschwingungen durch das KH-Zentrum möglich, falls nämlich die Flächengeschwindigkeit verschwindet.

Wie schon E. Strömgren feststellte, kann man die Differentialgleichungen (9) durch elliptische Integrale geschlossen integrieren. Am einfachsten erhält man die Sternbahnen jedoch durch numerische Integration; so wurden auch die Abbildungen 2 erhalten.

Damit Kreisbahnen entstehen, müssen gewisse Anfangsbedingungen streng erfüllt sein. Ist das nicht der Fall, so entste-

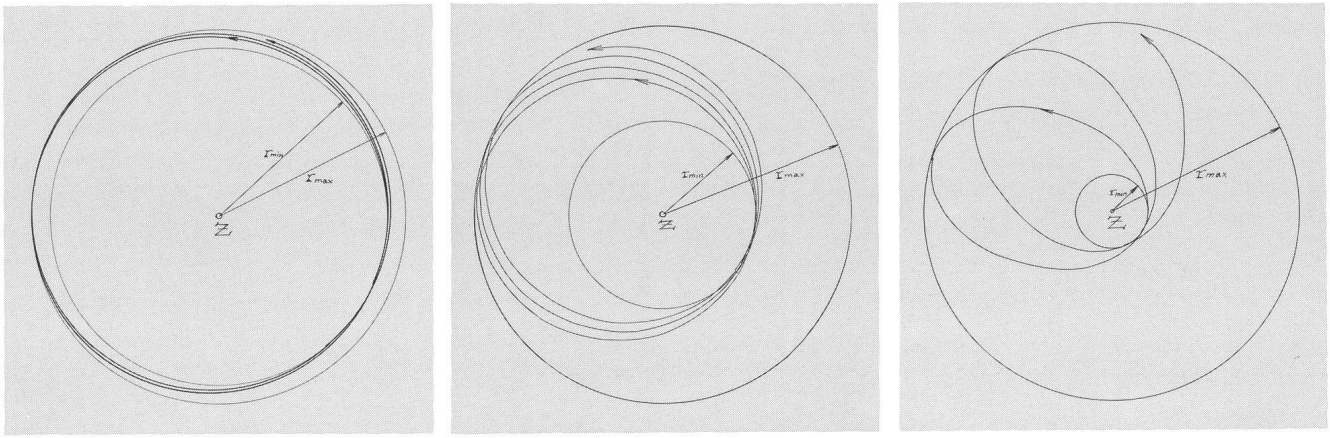

Abb. 2a, 2b, 2c: Typen von Rosettenbahnen

hen Rosettenbahnen. Letztere sind deshalb sehr viel wahrscheinlicher. Dagegen sind exakte Ellipsenbahnen unmöglich.

Sollte ein Stern durch Nachbarsterne mechanische Energie gewinnen, so dass seine Gesamtenergie

$$E \geqq - \frac{k_0^2 mM}{R_0^3}$$

wird, so löst er sich vom KH und entfernt sich auf einer Hyperbelbahn.

Es ist klar, dass für ausgesprochene Rosettenbahnen (Abb. 2c) die Formeln (10), (11), (12) ihren Sinn verlieren. Dagegen liefern sie noch Näherungswerte im Fall der Abb. 2a. Den letzteren Typus könnte man als «kreisähnliche» Rosettenbahnen bezeichnen. Diese Bahnen dürften u.E. die häufigsten im KH sein.

Zum Schluss noch ein Hinweis: Wir haben stets von Zusammenstössen von Sternen abgesehen. Sie dürften sehr selten sein. Auch deshalb erscheinen die kreisähnlichen Rosettenbahnen als die plausibelsten.

Literatur:
1) E. und B. Strömgren, Lehrbuch der Astronomie, Springer, Berlin 1933.

Adresse des Autors:
Dr. Raymond Stettler, Neufeldstrasse 118, 3012 Bern.

En attendant Halley (I)

W. Maeder

En règle générale, chaque homme ne peut assister qu'une seule fois dans sa vie au retour de la comète Halley. Il n'est donc pas surprenant que tous les amis du ciel étoilé attendent cet évènement avec impatience et s'y préparent déjà maintenant en pensée. Au cours des mois prochains, toutes les revues astronomiques en parleront en priorité et de plus en plus, d'impressionnantes photos prises par les grands observatoires vont apparaître. Mais il serait faux que l'amateur se résigne et renonce à photographier lui-même la comète, car aussi dans ce cas-là, la devise reste la même: la plus belle photo est toujours celle que l'on a prise soi-même!

Nous savons que le passage de 1986 de la comète Halley ne figure malheureusement pas parmi les plus spectaculaires. Toutefois, des études récentes[1]) sont un peu plus optimistes, surtout en ce qui concerne la période après le périhélie. Mais ce passage-ci présente aussi quelques avantages: rarement il a été possible d'observer la comète avant et après le périhélie, avec deux rapprochements, bien que modestes, de la Terre. Il sera ainsi possible de suivre toute la progression d'une comète lors de son passage près du Soleil.

Mais comment se déroulera cette prochaine apparition de Halley? Environ à mi-septembre 1985, la comète deviendra visible pour les moyens et petits instruments. Sous la forme d'une petite tache floue de la 13ème magnitude, elle se trouvera près de l'étoile Eta Geminorum, légèrement au sud de l'écliptique. Elle se lèvera très tard et le meilleur moment pour l'observer ou la photographier se situera juste avant l'aube.

Au cours des semaines suivantes, elle ne changera que très peu sa position par rapport aux étoiles; en se levant de plus en plus tôt, elle se déplacera lentement dans le Taureau et passera le 17 novembre 1985 au sud des Pléiades. Vers la fin novembre, elle devrait atteindre la magnitude 7 et être visible aux jumelles. Après avoir atteint le 27 novembre la plus faible distance par rapport à la Terre avant son périhélie, la comète s'éloigne de nouveau de nous, tout en se rapprochant du Soleil. Et c'est au début de décembre que le moment tant attendu devrait arriver: la comète Halley est visible à l'oeil nu! Aux jumelles, on devrait même apercevoir une faible queue.

Jusqu'à la fin de l'année, la magnitude de la comète ne variera que peu et, s'approchant de plus en plus du Soleil, elle disparaîtra lentement dans le crépuscule pour devenir invisible autour du 25 janvier 1986. Le périhélie a lieu le 9 février, mais nous devront certainement patienter jusque vers la fin du mois pour voir apparaître d'abord la queue, ensuite aussi le noyau de la comète au ciel matinal.

Selon l'étude citée plus haut, c'est maintenant que la comète devrait entrer dans sa phase glorieuse dont, hélas!, seule la première partie pourra être contemplée par les habitants de l'hémisphère nord. La distance entre la Terre et la comète diminue de nouveau rapidement et c'est vers le 15 mars que la comète, qui se trouve dans le Sagittaire, devrait atteindre pour nous sa plus belle prestance. Vers la fin mars, la tête de la comète disparaîtra lentement sous l'horizon sud et lorsqu'elle atteindra le point le plus proche de la Terre le 11 avril, il est possible qu'une partie de la queue pointe encore dans notre ciel.

Avec la comète haute dans le ciel et avec une queue qui pourrait atteindre 30 degrés de longueur, le spectacle devrait être grandiose pour les habitants de l'hémisphère sud. Il n'est donc pas étonnant que l'on parle dèjà d'organiser des voyages vers les pays du sud pour admirer cet évènement unique, car la prochaine occasion se présentera seulement dans 76 ans!

Mais la comète n'a pas pour autant terminé sa représentation pour nous. Fin avril, elle revient au ciel nord, près de la Coupe et se lève au début de la nuit. Il n'est pas certain qu'elle soit encore visible à l'oeil nu. Faiblissant de plus en plus, elle pourra encore être suivie par des petits et moyens instruments, avec plus ou moins de difficultés, jusque vers fin juillet 1986.

Avec étonnement, nous constatons que la comète Halley nous occupera pendant presque 10 mois. Mais ne nous faisons pas trop d'illusions: le mauvais temps et la Lune vont nous empêcher bien souvent de l'observer ou photographier.

Ces quelques indications préliminaires devraient suffire pour le moment. Nous reviendrons dans les prochains numéros d'ORION sur la comète du siècle.

Litérature:
1) John E. Bortle, W. R. Brooks: Brighter Prospects for Halley's Comet. Sky + Telescope, Jan. 84.

Adresse de l'auteur:
Werner Maeder, 18 Grand-Pré, CH-1202 Genève.