

# Wandel der Problemstellungen und Lösungsmethoden in der Himmelsmechanik während der letzten 400 Jahre

Autor(en): **Beutler, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft**

Band (Jahr): **42 (1984)**

Heft 202

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-899276>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Wandel der Problemstellungen und Lösungsmethoden in der Himmelsmechanik während der letzten 400 Jahre

Der vorliegende Aufsatz entstand als Manuskript zu einem Vortrag vor der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern vom 5. Mai 1983. Er ist in 6 Abschnitte unterteilt:

1. Allgemeine Umschreibung der Aufgaben
2. Tycho Brahe und Kepler
3. Beschreibung des Planetensystems von Newton bis Newcomb
4. Kleinplaneten oder die klassische Bahnbestimmung
5. Raumfahrt- und Computerära
6. Beobachtung heute

## 1. Allgemeine Umschreibung der Aufgaben

Mit Ausnahme von Tycho Brahe haben alle hier auftretenden Akteure ihren Untersuchungen das heliozentrische Weltbild zu Grunde gelegt.

In diesem System müssen wir die Begriffe *Bahn* eines Planeten und *Beobachtung* eines Planeten definieren.

Die *Bahn* ordnet dem Planeten für jeden Zeitpunkt  $t$  genau einen heliozentrischen Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  zu. Den Ortsvektor des Planeten Erde bezeichnet man normalerweise mit  $\vec{R}(t)$  (siehe Figur 1). Unter der *Beobachtung* eines Planeten war bis etwa in die Mitte des 20. Jahrhunderts die Messung der Richtung von einem Beobachter auf der Erde zum Planeten zu einer bestimmten Zeit zu verstehen. Gemessen wurden also die Einheitsvektoren  $\vec{e}_p(t)$  (Richtungen Beobachter-Planet) und auch die Einheitsvektoren  $\vec{e}_s(t)$  (Richtungen Beobachter-Sonne).

Diese Messungen wurden im Laufe der Monate und Jahre immer wieder wiederholt, so dass schliesslich für die Planeten resp. für die Sonne Messreihen folgender Art zur Verfügung standen:

$$\left. \begin{array}{l} t_j, \vec{e}'_{pj}: \text{Messung von } \vec{e}_p(t_j), j = 1, 2, \dots, n_{b_p} \\ t_j, \vec{e}'_{sj}: \text{Messung von } \vec{e}_s(t_j), j = 1, 2, \dots, n_{b_s} \end{array} \right| \quad (1)$$

$n_{b_s}$  ist dabei die Anzahl der Beobachtungen des betreffenden Himmelskörpers.

In der Himmelsmechanik ging und geht es immer darum, die Bahnen der Himmelskörper unseres Planetensystems zu bestimmen. Bei einer *Bahnbestimmung* geht es offenbar darum, aus den Messreihen (1) die heliozentrische Bahn  $\vec{r}(t)$  zu bestimmen: Es muss also ein Algorithmus angegeben werden, der es erlaubt, für beliebige Zeiten  $t$  den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  des Planeten zu berechnen. Dabei müssen alle in diesem Al-

gorithmus auftretenden Grössen allein aus den Messreihen (1) folgen.

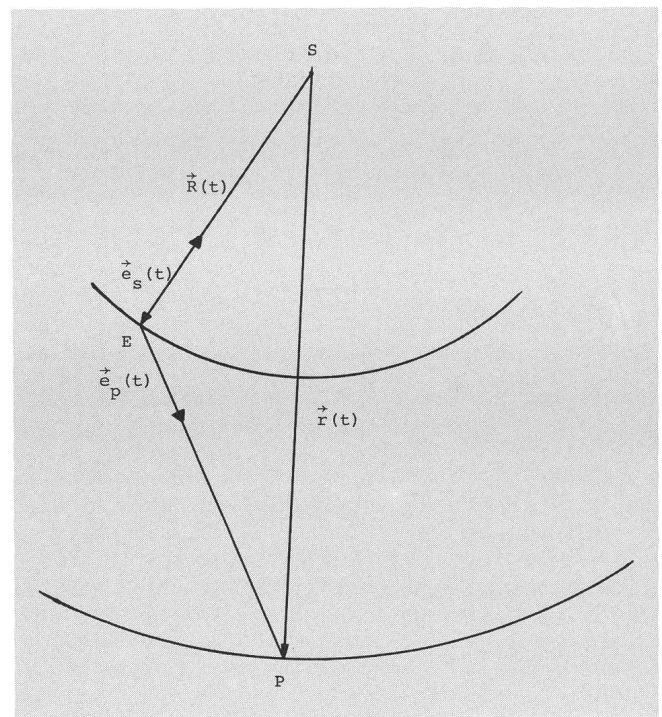


Fig. 1:  $S$ : Sonne,  $E$ : Erde,  $P$ : beobachteter Planet,  $\vec{R}(t)$ : Ortsvektor von  $E$ ,  $\vec{r}(t)$ : Ortsvektor von  $P$ ,  $\vec{e}_p(t)$ : beobachteter Einheitsvektor  $E \rightarrow P$ ,  $\vec{e}_s(t)$ : beobachteter Einheitsvektor  $E \rightarrow S$ .

## 2. Tycho Brahe und Kepler

Diese Epoche lässt sich zeitlich durch die Lebensdaten der Akteure fixieren:

Tycho Brahe (1546–1601)

Johannes Kepler (1571–1630)

Es ist natürlich eine grobe Vereinfachung, diese beiden Wissenschaftler isoliert zu betrachten: Sie hatten ihre Vorgänger und Mitstreiter. Es lässt sich aber nicht übersehen, dass von ihnen die wesentlichen Beiträge zur Beschreibung des Planetensystems jener Zeit ausgingen.

Tycho Brahe hat in der astronomischen Beobachtungstechnik neue Massstäbe gesetzt, und man darf sagen, dass er dem astronomischen Beobachter zu dem hohen Ansehen verhalf, das er noch heute besitzt. Zunächst in Dänemark (1576–1597), anschliessend in Prag (1599–1601), haben er und seine Gehilfen die Planeten und die Sonne mit einer für jene Zeit beispiellosen Genauigkeit beobachtet.

Man darf nun nicht glauben, dass Tycho Brahe diese Beobachtungen als Selbstzweck betrieb. Er hat sie sehr wohl als Entscheidungsgrundlage für die Richtigkeit verschiedener Modelle des Planetensystems betrachtet. Dass ihm eine befriedigende Interpretation der Messreihen nicht gelang, ist bekannt.

Johannes Kepler war vor 1600 als «Landschaftsmathematiker» in Graz tätig. Seine Neigung zur Himmelsmechanik bewies er mit seinem Werk «Mysterium Cosmographicum», in welchem er mit mässigem Erfolg versuchte, die Bahnradien der bekannten Planeten mit In- und Umkugeln der regulären Polyeder in Relation zu bringen. Wichtiger als der Inhalt jenes Werkes ist der Umstand, dass Tycho auf ihn aufmerksam wurde und ihn einlud, in Prag an der Auswertung der Beobachtungen mitzuwirken.

«Auswertung der Beobachtungen» konnte aber nichts anderes heissen, als die Gesetze der Planetenbewegung formulieren. Als schliesslich Kepler im Jahre 1600 dieser Einladung folgte, war er 28jährig und voller Optimismus. Es ist überliefert, dass er eine Wette annahm, der Schwierigkeiten in 8 Tagen Herr zu werden. Er hat die Aufgabe gelöst, allerdings nicht ganz in der vorgesehenen Zeit: die Resultate wurden in der «Astronomia Nova» im Jahre 1609 veröffentlicht.

Dass die Lösung so viel Zeit in Anspruch nahm, ist keineswegs verwunderlich: Kepler darf für sich in Anspruch nehmen, wohl das schwierigste Bahnbestimmungsproblem der Geschichte gelöst zu haben.

Rufen wir uns die Schwierigkeiten in Erinnerung:

- Kepler kannte die Unbekannten der Aufgabe nicht! Heute wissen wir, dass – jedenfalls in guter Näherung – die Bahn eines jeden Planeten durch sechs Grössen, die Bahnelemente, eindeutig bestimmt ist. Kepler kannte weder die Zahl, noch die Art der Unbekannten.
- Kepler hatte die Aufgabe, die Bahn des Planeten Mars aus dessen Beobachtungen zu bestimmen. Da aber diese Beobachtungen von der Erde aus gemacht wurden, deren Bahn um die Sonne damals auch nicht bekannt war, blieb Kepler nichts anderes übrig, als *zusätzlich* die Erdbahn zu bestimmen.

Diese Aufgabe konnte nur dank der 24jährigen Beobachtungsreihen von Mars und Sonne von Tycho Brahe gelöst werden.

**Prinzip der Lösungsmethode**

Man liest heute hin und wieder, dass Kepler die Bahn des Mars völlig hypothesenfrei bestimmte. Dem ist zu widersprechen: Kepler ging nämlich von der Annahme aus, dass die Bahnkurven der Planeten in dem durch die Fixsterne definierten Raum streng periodisch sind. Heute wissen wir, dass dies nur näherungsweise richtig ist. Für die Genauigkeit der damaligen Beobachtungen und für das von ihm untersuchte Zeitintervall (Beobachtungen über 24 Jahre) war aber diese Annahme gerechtfertigt.

Die Umlaufzeiten von Erde und Mars aber konnte er nicht direkt aus den Beobachtungen bestimmen, sie waren ihm also

bekannt. Unter dieser Voraussetzung gelingt Kepler eine von weiteren Hypothesen freie Lösung der Aufgabe.

Die Lösung ist einfach und anschaulich, sie erfolgt in zwei Schritten:

1. Rekonstruktion der Erdbahn aus den Beobachtungen von Sonne und Mars
2. Bestimmung der Marsbahn bei bekannter Erdbahn.

Das Prinzip seiner Analyse sei hier unter der vereinfachenden Annahme erklärt, dass die Bahnebenen von Mars und Erde übereinstimmen:

1. *Erdbahn:* Aus den Beobachtungen von Sonne und Mars bestimmt Kepler den genauen Zeitpunkt einer Opposition, also den Zeitpunkt, für den  $\vec{e}_s(t_0) = -\vec{e}_m(t_0)$  gilt.

Diese Situation ist in Figur 2a wiedergegeben. Diese Figur ist für Kepler insofern nicht realistisch, als dort der Ortsvektor der Erde als bekannt vorausgesetzt wird (der Ortsvektor von Mars darf beibehalten werden; dies definiert den Massstab der Zeichnung).

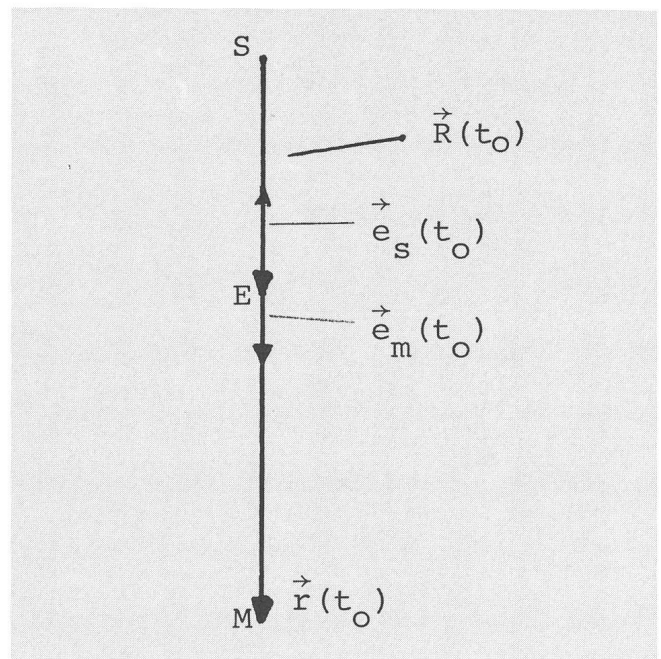


Fig. 2a: Marsopposition zur Zeit  $t_0$ . S : Sonne, M : Mars, E : Erde,  $\vec{R}(t_0)$ : Erdposition z.Z.  $t_0$ ,  $\vec{r}(t_0)$ : Marsposition z.Z.  $t_0$ ,  $\vec{e}_s(t_0)$ ,  $\vec{e}_m(t_0)$ : Einheitsvektor Erde – Sonne resp. Erde – Mars z.Z. der Opposition.

Nun setzt Kepler ja voraus, dass die Bahn von Mars periodisch ist. Er weiss also, dass sich Mars nach

$$U = 687 \text{ Tagen}$$

wieder an genau der gleichen Stelle im Raum befinden wird.

Es gilt also:  $\vec{r}(t_0 + U) = \vec{r}(t_0)$

Aus den Beobachtungen Tychos nun rekonstruiert Kepler die Richtungen Sonne → Erde ( $-\vec{e}_s(t_0 + U)$ ) und Mars → Erde ( $-\vec{e}_m(t_0 + U)$ ) zur Zeit  $t_0 + U$ . Der Erdort zu dieser Zeit folgt jetzt einfach als Schnittpunkt der durch S,  $-\vec{e}_s(t_0 + U)$  und M,  $-\vec{e}_m(t_0 + U)$  definierten Geraden (siehe Figur 2b).

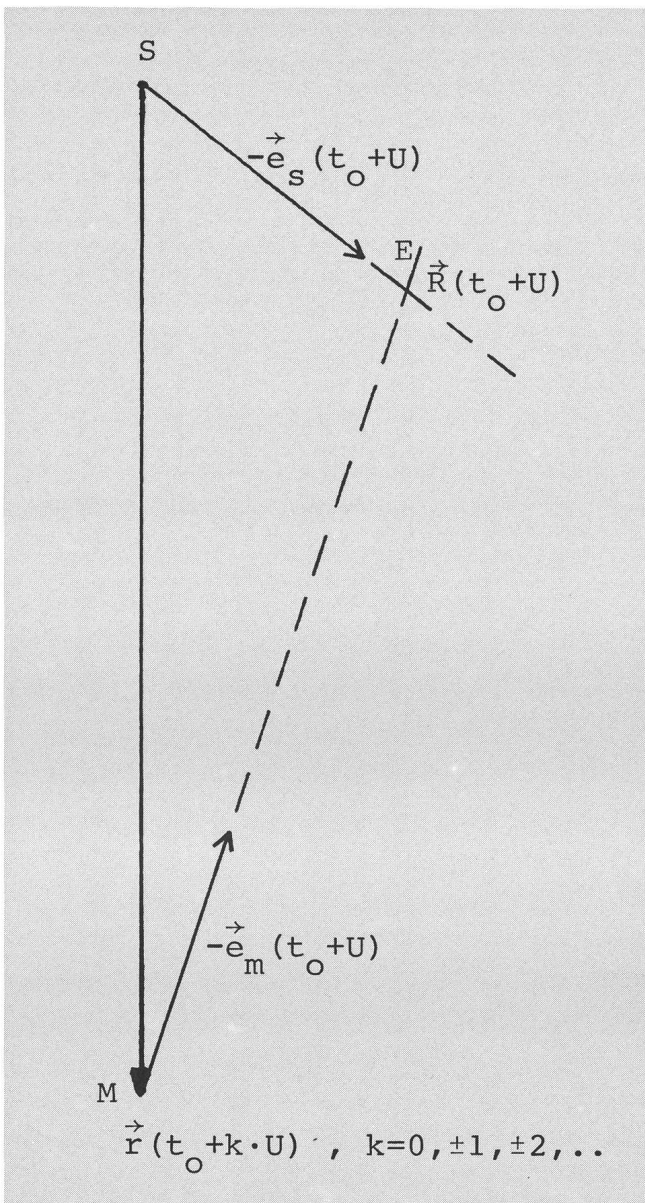


Fig. 2b: Rekonstruktion der Erdbahn aus Beobachtungen von Sonne und Mars zu den Zeiten  $t_k = t_0 + k \cdot U, k=1,2,\dots, U$ : siderische Umlaufzeit von Mars,  $\vec{e}_m(t_0+U)$ : beobachteter Einheitsvektor Erde - Mars  $^*$ ,  $\vec{e}_s(t_0+U)$ : beobachteter Einheitsvektor Erde - Sonne  $^*$ ,  $^*$ ) z.Z.  $t_0+U, \vec{R}(t_0+U)$ : Erdposition z.Z.  $t_0+U$ .

Das gleiche Verfahren kann nun sinngemäss für die Zeiten  $t_0 + k \cdot U, k=(1,2,3,\dots)$  gebraucht werden: jedesmal erhält man einen Punkt der Erdbahn.

Das Resultat war einfach: In ausgezeichnete Näherung war die Erdbahn ein Kreis, wobei die Sonne nicht ganz im Zentrum stand. Da auch die Bahn der Erde nach Voraussetzung periodisch ist, konnte Kepler jedem beobachteten Einheitsvektor (Erde-Sonne) den Betrag des Radiusvektors (Erde-Sonne) zuordnen (siehe Figur 2c).

2. Marsbahn

Damit hatte Kepler die Aufgabe auf das reduziert, was man

heute unter Bahnbestimmung versteht: Bestimmen von  $\vec{r}(t)$  unter der Voraussetzung, dass die Bahn des Beobachters bekannt ist. Kepler wendet im wesentlichen die gleiche Methode wie bei der Erdbahn an: Er geht von einer andern Opposition  $t_0^*$  aus. Er weiss, dass  $\vec{r}(t_0^*) = \vec{r}(t_0^*+U)$  auf der durch  $\vec{R}(t_0^*)$  und  $\vec{e}_m(t_0^*)$  definierten Geraden und auf der durch  $\vec{R}(t_0^*+U)$  und  $\vec{e}_m(t_0^*+U)$  definierten Geraden liegen muss! Auf diese Art kann Kepler für jede Marsopposition genau einen Bahnpunkt von Mars konstruieren (siehe Figur 2c).

Der Rest war einfach und nicht mehr aufzuhalten: Kepler fand seine beiden ersten Gesetze und veröffentlichte sie in dem fundamentalen Werk Astronomia Nova. Das dritte Gesetz, das hier vollständigkeitshalber mit aufgeführt wird, fand er erst wesentlich später (publiziert wurde es 1619):

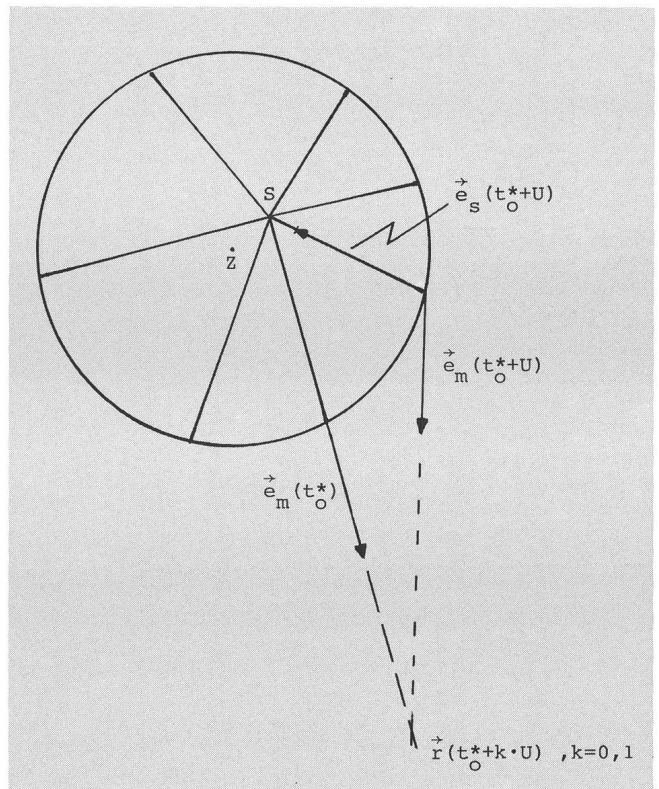


Fig. 2c: S : Sonne, Z : Zentrum des Kreises der Erdbahn,  $t_0^*$ : Zeitpunkt einer Marsopposition  $t_0^* \neq t_0$ .

- I: Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht
- II: Die Verbindungslinie «Sonne-Planet» überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
- III: Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen, oder:  $a^3/U^2 = \text{const}$  für jeden Planeten.

Mit diesen Gesetzen war auch die Parametrisierung der Aufgabe gegeben: Grösse und Form einer Ellipse werden z.B. durch die grosse Halbachse und die numerische Exzentrizität festgelegt, die Stellung der Bahnebene im Raum wird durch zwei Lagewinkel, die Stellung der Ellipse innerhalb der Bahnebene durch einen weiteren Lagewinkel definiert. Kepler hat dann noch gezeigt, dass man durch eine weitere Angabe, die Periheldurchgangszeit, sehr einfache Formeln ange-



ben kann, mit denen man  $\vec{r}(t)$  zu beliebigen Zeiten berechnen kann.

**3. Beschreibung des Planetensystems von Newton bis Newcomb**

Isaak Newton publizierte seine «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» im Jahre 1687. Ihre Bedeutung für die Entwicklung der Physik und Mathematik ist allgemein bekannt und anerkannt, so dass wir uns hier auf einige wenige Bemerkungen beschränken können:

Aus seinen Axiomen der Mechanik, seinem Gesetz der universellen Gravitation und aus dem Superpositionsprinzip der Kräfte folgen auf elementarste Weise die Gleichungen, die die Bewegung der Planeten um die Sonne definieren. In moderner Schreibweise lauten diese:

$$\ddot{\vec{r}}_i(2) = -\gamma \cdot (m_0 + m_i) \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - \gamma \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \cdot \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

Wobei: N: Anzahl Planeten,  $\gamma$ : Gravitationskonstante  
 $m_0$ : Sonnenmasse,  $m_i, i = 1, 2, \dots, N$ : Planetenmassen  
 $\vec{r}_i(t)$ : Ortsvektoren der Planeten,  $\vec{r}_i^{(k)}, k = 1, 2, \dots$   
 deren Ableitungen nach der Zeit ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Durch die Differentialgleichungen (3) sind die Planetenbahnen noch nicht eindeutig festgelegt. Dies ist erst dann der Fall, wenn zusätzlich die Ortsvektoren  $\vec{r}_{0i}$  und die Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{v}_{0i}$  zu einem Zeitpunkt  $T_a$  gegeben sind:

$$\begin{cases} \vec{r}_i(T_a) = \vec{r}_{0i} \\ \vec{v}_i(T_a) = \vec{v}_{0i} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N \quad (3a)$$

Sind nun die rechten Seiten der Gleichungen (3a) sowie alle Massen  $m_j, j = 0, 1, \dots, N$  bekannt, können *im Prinzip* die Orts- und die Geschwindigkeitsvektoren der Planeten für jeden beliebigen Zeitpunkt t ohne weitergehende Analysen berechnet werden. Die Technik, die dies leistet, ist die der *Numerischen Integration*.

Die Bahnen der Planeten unseres Planetensystems bestimmen, heisst nach Newton somit offenbar, alle Massen  $m_j, j = 1, 2, \dots, N$  sowie alle Orts- und Geschwindigkeitsvektoren auf der rechten Seite von (3a) bestimmen. Es sind also für jeden Planeten insgesamt 7 Grössen zu bestimmen\*).

Dass es im Prinzip nicht erlaubt ist, die Bahnen eines Planeten unabhängig von den anderen zu bestimmen, folgt direkt aus der Struktur der Gleichungen (3): Ändert man beispielsweise die Masse des i-ten Planeten, ändern auch die Bahnen aller übrigen Planeten. Gegenüber der Keplerschen Aufgabe ist die «Bahnbestimmung nach Newton» einerseits komplizierter, da alle  $7 \cdot N$  Bahnparameter *simultan* bestimmt werden sollten, sie ist andererseits wesentlich einfacher, da man mit den Methoden von Kepler schon sehr gute Näherungen für die Anfangsbedingungen (3a) angeben konnte. Man konnte sich daher mit Bahnverbesserungsmethoden begnügen, welche die Beobachtungen als lineare Funktionen der Parameter darstellen.

\*) Gravitationskonstante und Sonnenmasse können allein aus Richtungsbeobachtungen nicht bestimmt werden.

Newton zeigte übrigens, dass die Keplerschen Gesetze aus seinem Gravitationsgesetz folgen, wenn man im Planetensystem sämtliche Massen mit Ausnahme der Sonnenmasse vernachlässigt. An Stelle von (3) erhält man dann N voneinander unabhängige Differentialgleichungssysteme:

$$\ddot{\vec{r}}_i(2) = -\gamma \cdot m_0 \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Insbesondere konnte er die im 3. Kepler'schen Gesetz auftretende Konstante angeben:

$$a^3/U^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \gamma \cdot m_0 \quad (5)$$

Dieses Gesetz – das in der Näherung (4) für die Bewegung der Planeten um die Sonne gilt – kann sinngemäss für die Bewegung von Monden um einen Planeten verwendet werden. Da man die linken Seiten von (5) aus den Beobachtungen berechnen kann, hatte Newton damit ein Mittel in der Hand, um die Verhältnisse  $m_i/m_0$  für jene Planeten zu berechnen, die bekannte Monde hatten. Die Masse von Jupiter bestimmte Newton nach diesem Verfahren mit einer Genauigkeit von ca. 2% zu

$$m_{\text{jup}}/m_0 = 1/1033 \text{ (heutiger Wert: } 1/1047\text{)}.$$

Dass die korrekte Beschreibung (3) des Planetensystems die mit elementaren Funktionen exakt lösbare Näherung (4) besitzt, war sowohl für die Entwicklung der Analysis, als auch für die Entwicklung der Analytischen Mechanik von grösster Bedeutung: Hier sind die Wurzeln der Störungsrechnung zu suchen. Der Zeit weit vorausweisend beschränken wir uns hier darauf, zwei der grössten Triumphe dieser Methode aufzuführen:

- Die Entdeckung von Neptun aus der Analyse von Uranus-Beobachtungen (entdeckt von Galle 1846, auf Grund von Rechnungen von Adams und Leverrier).
- Beschreibung des gesamten Planetensystems durch Simon Newcomb um die Jahrhundertwende 1900.

**4. Kleinplaneten oder die klassische Bahnbestimmung**

Mit der Entdeckung des ersten Kleinplaneten *Ceres* in der Neujahrnacht 1800/01 durch Piazza begann ein neuer Abschnitt in der Geschichte der Himmelsmechanik.

Es zeigte sich nämlich bald, dass die verfügbaren, auf Euler und andere zurückgehenden Bahnbestimmungsverfahren nicht imstande waren, die neue Aufgabe zu lösen.

Welches war diese neue Aufgabe?

Piazza entdeckte die Ceres während der Opposition. Er konnte sie anschliessend nur während 42 Tagen – vom 1. Januar bis zum 11. Februar – insgesamt 19 mal beobachten. Danach liessen die Verhältnisse (Helligkeit der Ceres, Beobachtung in der Dämmerung) keine weiteren Beobachtungen zu. 42 Tage – dies entspricht ca. 1/40 der Umlaufszeit dieses Himmelskörpers um die Sonne! Die zur Verfügung stehende Zeitbasis war also extrem kurz. (Erinnern wir uns der Methode Keplers: diese setzt voraus, dass der Planet in verschiedenen Oppositionen beobachtet wurde.)

Diese kurze Zeitbasis war ein wichtiger Grund für das Versagen der damals bekannten Methoden. Der andere Grund war der, dass jene Verfahren nicht ohne einschneidende Hypothesen auskamen: Bei Kometen wurde meistens angenommen, dass die Bahnkurve eine Parabel war, bei der Berechnung einer ersten Bahn für den 1781 entdeckten Planeten Uranus wurde diese als Kreis angesetzt. Häufig wurde zudem

angenommen, dass die Bahnebene die Ekliptik war.

Solche Voraussetzungen waren physikalisch nicht zu begründen, sie waren – zufälligerweise – im Falle der Ceres bei weitem nicht erfüllt: Ihre Exzentrizität war mit .08 relativ hoch, ihre Neigung gegen die Ekliptik war mit  $10^\circ.6$  die grösste aller damals bekannten Planeten.

Gauss hat seine auf die Ceres angewandte Bahnbestimmungsmethode in einer vor der bekannten, ausgefeilten «Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium» entstandenen Arbeit «Summarische Übersicht der zur Bahnbestimmung der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methode» wie folgt charakterisiert: «Die von Kreis- und Parabel-Hypothesen unabhängige Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen beruht auf zwei Forderungen:

- I. Muss man Mittel haben, die Bahn zu finden, die drei gegebenen Beobachtungen Genüge thut.
- II. Muss man die so gefundene Bahn so verbessern können, dass die Differenzen der Rechnung von dem ganzen Vorrath der Beobachtungen so gering als möglich werden.»

Die erste Teilaufgabe ist das, was wir heute als «Gauss'sche Bahnbestimmung» schlechthin bezeichnen, das zweite stellt sich in wesentlichen Zügen als das heraus, was man heute als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet ...

Als Anekdote sei vermerkt, dass Gauss im konkreten Fall die zweite Teilaufgabe nicht ganz lupenrein gelöst hat; er schreibt nämlich:

«Es lässt sich zwar eine ganz methodische Anweisung geben, diese Werthe durch Rechnung zu finden; allein ein gewisser Tact wird immer ebenso sicher leiten.»

Dass in der Zwischenzeit die Methode der kleinsten Quadrate in allen möglichen Gebieten die bedeutendste Approximationsart ist, braucht nicht besonders betont zu werden.

Wenden wir uns der Lösung der ersten Teilaufgabe zu: Zunächst leuchtet es ohne weiteres ein, dass man für dieses kurze Zeitintervall (42 Tage) die Ceres-Bahn durch ein Differentialgleichungssystem der Art (4) beschreiben kann:

$$\ddot{\vec{r}}(2) = -k^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad k^2 := \gamma \cdot m_{\odot} \quad (6)$$

k: Gauss'sche Konstante

Als nächstes muss Gauss die Unbekannten der Aufgabe, die Bahnparameter wählen. Hier hat man – wie man sich leicht überzeugt – viele Freiheitsgrade: Beispielsweise könnte man die Komponenten der Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zur Zeit  $T_a$  [siehe (3a)] zu bestimmen versuchen; man könnte auch direkt die Kepler'schen Bahnelemente einführen).

Gauss geht einen anderen Weg, der es ihm im Endeffekt gestattet, die Zahl der Unbekannten von 6 auf 2 zu reduzieren!

Er formuliert die Aufgabe als Randwertaufgabe: Anstatt den Orts- und den Geschwindigkeitsvektor zu einem Zeitpunkt  $T_a$  zu suchen, sucht er die Ortsvektoren zu zwei verschiedenen Zeiten  $T_1$  und  $T_2$ .

Über diese Zeiten  $T_k, k=1,2$  verfügt er sodann wie folgt:

$$T_1 := t_1, T_2 := t_3, t_1, t_3 : 1. \text{ und } 3. \text{ Beobachtungszeit} \quad (6)$$

Gesucht sind somit zwei Ortsvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_3$ :

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_3) = \vec{r}_3 \quad (7)$$

Damit scheint zunächst überhaupt nichts gewonnen: Nach wie vor suchen wir sechs Parameter (z.B. die Komponenten der Vektoren  $\vec{r}_k, k=1, k=3$  bez. eines Koordinatensystems), wir haben lediglich ein Anfangswert- mit einem Randwertproblem vertauscht. Entscheidend ist aber der Umstand, dass wir die Randvektoren je als Linearkombination des bekannten Ortsvektors des Beobachters zur Beobachtungszeit und des bekannten beobachteten Einheitsvektors schreiben können (vergleiche Figur 3):

$$\vec{r}_k = \vec{R}(t_k) + \Delta_k \cdot \vec{e}_k', \quad k=1, k=3 \quad (8)$$

In den Gleichungen (8) sind nur die topozentrischen Distanzen  $\Delta_1$  und  $\Delta_3$  nicht bekannt. Gauss braucht also nur noch diese beiden Parameter so zu variieren, dass auch die mittlere Beobachtung exakt dargestellt wird. Dies könnte er im Prinzip durch Probieren erreichen, er gab jedoch zur Lösung einen unerhört kompakten, häufig verwendeten, jedoch einigermaßen undurchsichtigen Iterationsprozess an.

Der Erfolg war total: Mit Hilfe der Gauss'schen Bahn gelang die Wiederentdeckung der Ceres am 7. Dezember 1801.

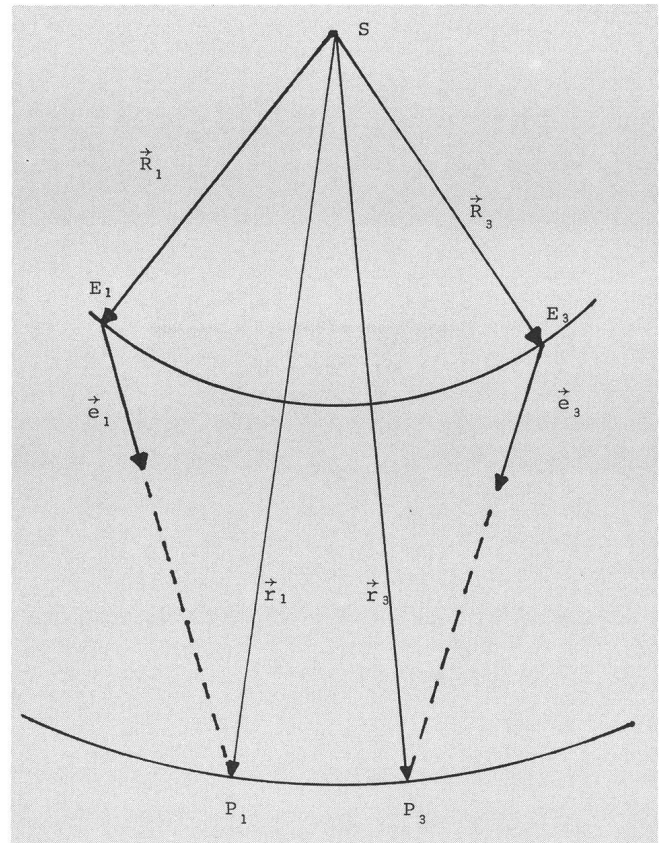


Fig. 3: S : Sonne,  $E_k, P_k$  : Erde, Planet z.Z.  $t_k, t_k, k=1, (2), 3$  : Beobachtungszeiten,  $\vec{r}_k := \vec{r}(t_k), k=1, (2), 3$  : Ortsvektor des Planeten z.Z.  $t_k$ ,  $\vec{R}_k := \vec{R}(t_k)$  : Ortsvektor des Beobachters z.Z.  $t_k$ ,  $\vec{e}_k, k=1, (2), 3$  : beobachtete Einheitsvektoren z.Z.  $t_k$ ,  $\Delta_k$  : Distanz Beobachter - Planet z.Z.  $t_k$ .

$$\vec{r}_k = \vec{R}_k + \Delta_k \cdot \vec{e}_k \quad k=1,2,3.$$

Adresse des Autors:

G. Beutler, Astronomisches Institut, Sidlerstrasse 5, 3012 Bern.

(Fortsetzung in der nächsten Nummer)