

Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 38 (1980)
Heft: [1]: Sondernummer = numéro spécial = numero speciale

Artikel: 2. Koordinaten-Transformationen
Autor: Schilt, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-899579>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 25.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

B 4. System der Ekliptik
System E'

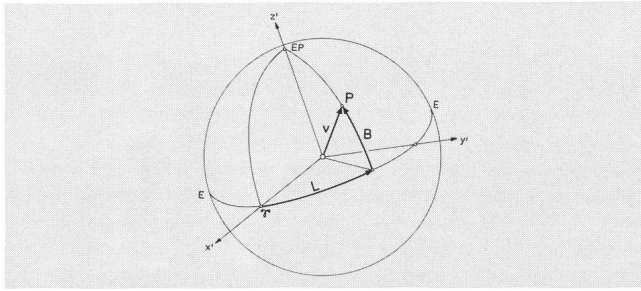


Fig. 1.n: rechtsorientiert

- z'-Achse: Richtung zum nördlichen Ekliptikpol EP
- x'-Achse: Richtung zum Frühlingspunkt
- y'-Achse: Schnitt $L = 90^\circ$ mit Ekliptik-Ebene
- E-E: Ekliptik
- r: = v Entfernung vom Himmelskörper oder 1
- α : = L ekliptikale Länge
- β : = B ekliptikale Breite
- $x' = v \cos B \cos L$
- $y' = v \cos B \sin L$
- $z' = v \sin B$

Adresse des Autors:
Prof. H. Schilt, Höhweg 5, CH-2502 Biel.

2. Koordinaten-Transformationen

H. SCHILT

Manchmal verwendet man für ein Problem mehrere Koordinatensysteme, weil sich das eine System für eine Teilaufgabe besser eignet als das andere. Man muss deshalb die Koordinaten von einem System in diejenigen des andern Systems umrechnen können. Dazu dienen Transformationsformeln.

Wir unterscheiden das Ausgangssystem vom Zielsystem. Wir nehmen an, wir kennen die Koordinaten eines geometrischen Objektes im Ausgangssystem und, auf dasselbe System bezogen, die notwendigen Größen, um das Zielsystem festzulegen. Gesucht sind die Beziehungen, welche gestatten, aus den gegebenen Koordinaten diejenigen im Zielsystem auszurechnen.

Zuerst betrachten wir wieder ebene Systeme. Man unterscheidet zwischen Schiebungen (Translationen), Drehungen (Rotationen) und Spiegelungen.

2.1 Schiebungen

Wir gehen vom System K aus; in diesem System hat der Ursprung \bar{O} des Zielsystems \bar{K} die Koordinaten $x = u$ und $y = v$. Durch diese Angabe ist das Zielsystem festgelegt, da bei Schiebungen die Achsen je parallel bleiben.

Der Punkt P hat im (Fig. 2.a) Ausgangssystem K die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= OQ \\ y &= QP \end{aligned}$$

Zielsystem \bar{K}

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{O}\bar{Q} \\ \bar{y} &= \bar{Q}P \end{aligned}$$

Aus der Figur entnimmt man:

2.11

$$\begin{aligned} x - u &= \bar{x} \\ y - v &= \bar{y} \end{aligned}$$

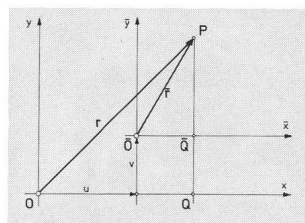


Fig. 2.a:

Beispiel:

$$\begin{aligned} u &= 5 & v &= 3 & 8 - 5 &= 3 &= \bar{x} \\ x &= 8 & y &= 8 & 8 - 3 &= 5 &= \bar{y} \end{aligned}$$

2.2 Drehungen

Zwei gleichorientierte kartesische Koordinatensysteme mit nicht parallelen Achsen lassen sich immer durch eine Drehung um einen bestimmten Punkt zur Deckung bringen; sind sie verschieden orientiert, so ist eine Spiegelung notwendig (vgl. 2.3).

Wir betrachten den speziellen Fall der gleichorientierten Systeme mit gemeinsamem Ursprung, der somit Drehpunkt ist. (Fig. 2.b)

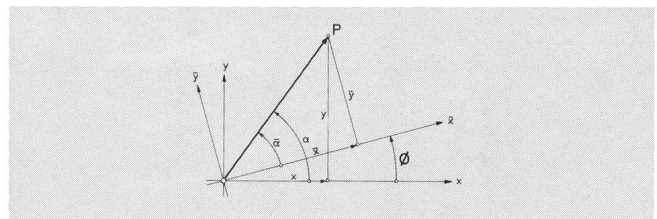


Fig. 2.b

Die Koordinaten von P sind im System K Ausgangssystem

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

im System \bar{K} Zielsystem

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{r} \cos \bar{\alpha} \\ \bar{y} &= \bar{r} \sin \bar{\alpha} \end{aligned}$$

Bei einer Drehung von K um den Winkel Φ gilt:

2.21

$$\begin{aligned} r &= \bar{r} \\ \alpha - \Phi &= \bar{\alpha} \end{aligned}$$

so dass

2.22

$$\begin{aligned} \bar{x} &= r \cos (\alpha - \Phi) \\ \bar{y} &= r \sin (\alpha - \Phi) \end{aligned}$$

Man merke sich:

Phi " Φ " ist der Winkel, welcher von der x-Achse des Ausgangssystems bis zur \bar{x} -Achse des Zielsystems gemessen und im Sinne des Ausgangssystems gezählt wird.

Zum Rechnen mit einem Taschenrechner eignet sich folgende Anweisung:

2.23 R-P $(y, x)P = (\alpha, r)$

Drehung $r = \bar{r}$
 $\alpha - \Phi = \bar{\alpha}$

P-R $(\bar{\alpha}, r)R = (\bar{y}, \bar{x})$

Zerlegt man die trigonometrischen Formen in 2.22 mit Hilfe der Additionstheoreme und setzt die rechtwinkligen Koordinaten x und y ein, so erhält man das bekannte Gleichungspaar:

2.24 $x \cos \Phi + y \sin \Phi = \bar{x}$
 $-x \sin \Phi + y \cos \Phi = \bar{y}$

Oft findet man dafür die symbolische Abkürzung (Matrixschreibweise):

2.25 $D_{\Phi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ mit $D_{\Phi} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix}$

Beispiel:

$\Phi = 120^\circ$ $x = +3$ $r = 5$
 $y = -4$ $\alpha = -53.13^\circ$
 $\bar{r} = 5$ $\bar{x} = -4.964$
 $\bar{\alpha} = -173.13^\circ$ $\bar{y} = -0.698$

Programm und Beispiel für die Drehung

Φ : Winkel zwischen x - und \bar{x} -Achse

```

Φ = 120 ENTER↑
y = -4 ENTER↑
x = 3
r 5.000 R-P
α -53.130 RDN
Φ 120.000 X<>Y
ᾱ = α - Φ -173.130
r 5.000 R↑
x̄ -4.964 P-R
ȳ -0.698 X<>Y
    
```

Bedeutung der Symbole: siehe Seite 22

Zum Auflösen des Systems 2.24 nach x und y genügt die Bemerkung, dass von \bar{K} aus gesehen, der Drehwinkel $-\Phi$ ist; somit gilt:

2.26 $\bar{x} \cos \Phi - \bar{y} \sin \Phi = x$
 $\bar{x} \sin \Phi + \bar{y} \cos \Phi = y$

$D_{-\Phi} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Es ist oft nützlich zu wissen, dass diese Beziehung mit

$D_{\Phi} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

äquivalent ist.

Beispiele:

$\Phi = -120^\circ$ $\bar{x} = 3$ $\bar{r} = 5$
 $\bar{y} = -4$ $\bar{\alpha} = -53.13^\circ$

$r = 5$ $x = 1.964$
 $\alpha = 66.87^\circ$ $y = 4.598$

$\Phi = +120^\circ$ $\bar{y} = -4$ $\bar{r} = 5$
 $\bar{x} = 3$ $\bar{\beta} = 143.130^\circ$

$r = 5$ $y = 4.598$
 $\beta = 23.130^\circ$ $x = 1.964$

2.3 Achsenspiegelung

Das Koordinatensystem K soll an einer Geraden gespiegelt werden, dadurch entsteht aus der x -Achse die \bar{x} -Achse (Fig. 2c). Diese Achsen sollen den Winkel Φ einschließen.

Ein Punkt P hat die Koordinaten

im System K
 $x = r \cos \alpha$
 $y = r \sin \alpha$

im System \bar{K}
 $\bar{x} = \bar{r} \cos \bar{\alpha}$
 $\bar{y} = \bar{r} \sin \bar{\alpha}$

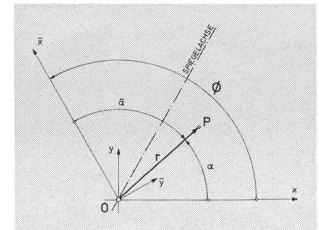


Fig. 2.c

Es gilt bei der Spiegelung:

2.31 $r = \bar{r}$
 $\Phi - \alpha = \bar{\alpha}$

also ist

2.32 $r \cos (\Phi - \alpha) = \bar{x}$
 $r \sin (\Phi - \alpha) = \bar{y}$

Folgende Zusammenstellung ist für Taschenrechner zweckmässig:

2.33 R-P $(y, x)P = (\alpha, r)$

Spiegelung $r = \bar{r}$
 $\Phi - \alpha = \bar{\alpha}$

P-R $(\bar{\alpha}, r)R = (\bar{y}, \bar{x})$

Programm und Beispiel für die Spiegelung

Φ: Winkel zwischen x- und x̄-Achse

```

Φ =      120 ENTER↑
y =      -4 ENTER↑
x =       3
r =  5.000  R-P  **
          *
α = -53.130  RBN  **
          *
ā = Φ - α   173.130  -
          ****
r =  5.000  R↑   **
          *
x̄ = -4.964  P-R  **
          *
ȳ =  0.598  X<>Y **
          *
    
```

Bedeutung der Symbole: siehe Seite 22

Die Festsetzung für Φ in 2.2 gilt auch hier. Weil die beiden Systeme verschieden orientiert sind, hat jedoch Φ für den Übergang von K zu K̄ und jenem von K̄ zu K je das gleiche Vorzeichen.

Analog wie in 2.2 können wir auch die Beziehung für die rechtwinkligen Koordinaten gewinnen; wir erhalten

$$2.34 \quad \begin{aligned} x \cos \Phi + y \sin \Phi &= \bar{x} \\ x \sin \Phi - y \cos \Phi &= \bar{y} \end{aligned}$$

Was symbolisch mit

$$S_{\Phi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \text{ worin } S_{\Phi} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ \sin \Phi & -\cos \Phi \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Es gilt auch:

$$S_{\Phi} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\Phi = 120^\circ \quad \begin{aligned} x &= +4 & r &= 5 \\ y &= -3 & \alpha &= -36.87^\circ \\ \bar{r} &= 5 & \bar{x} &= -4.598 \\ \bar{\alpha} &= -156.87^\circ & \bar{y} &= +1.964 \end{aligned}$$

2.4 Beispiele

Betrachtet man die vier wichtigsten Koordinatensysteme der Astronomie, so kann man feststellen, dass je zwei durch eine Drehung um eine Koordinatenachse oder eine Spiegelung ineinander übergeführt werden können. Die einführenden Betrachtungen haben wir in der x-y-Ebene durchgeführt, im dreidimensionalen Raum ist dazu noch eine z-Achse mit positivem Ende nach vorn zu denken. Diese Achse ist auch Drehachse oder eine Gerade, welche in der Spiegelebene liegt. Durch eine geeignete zyklische Vertauschung gelten unsere Überlegungen auch für Drehungen bzw. Spiegelungen für die x- oder y-Achse. Dabei ist allerdings noch die Orientierung des Systems zu beachten (vgl. Fig. 2.d)

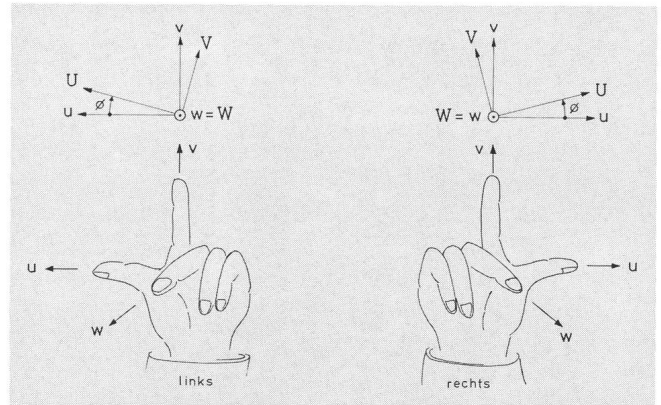


Fig. 2.d: Bestimmung der positiven Drehrichtung.

Ausgangssystem u v w Zielsystem U V W

u v w ist irgend eine zyklische Vertauschung von x y z
 U V W ist dieselbe zyklische Vertauschung von X Y Z

Die Achsen w und W sind identisch, also Drehachsen, beide nach vorn positiv gezählt (auf die Betrachter zukommend)

Der eingezeichnete Drehwinkel Φ ist je positiv.

	Drehung	Spiegelung
	$D_{\Phi} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$	$S_{\Phi} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$
	$u \cos \Phi + v \sin \Phi = U$ $-u \sin \Phi + v \cos \Phi = V$	$u \cos \Phi + v \sin \Phi = U$ $u \sin \Phi - v \cos \Phi = V$
2.41	$(v, u)P = (\alpha, r)$	$(v, u)P = (\alpha, r)$
	$\alpha - \Phi = \bar{\alpha}$	$\Phi - \alpha = \bar{\alpha}$
	$(\bar{\alpha}, r)R = (V, U)$	$(\bar{\alpha}, r)R = (V, U)$

B 1. Systeme des Äquators

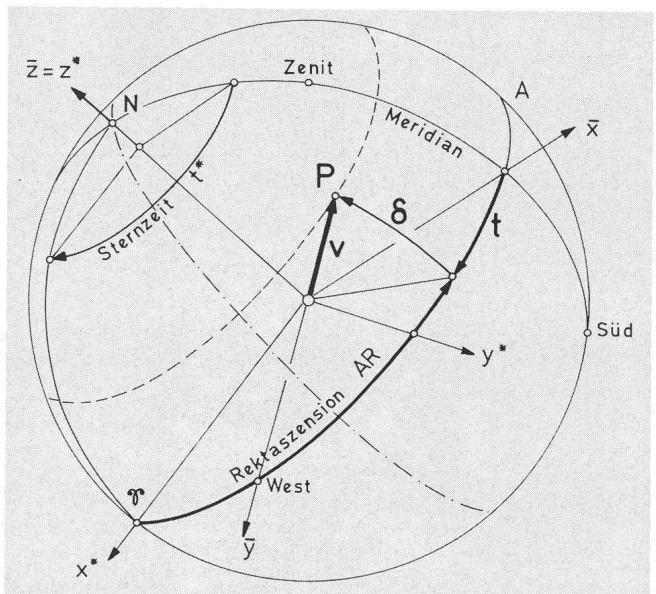


Fig. 2.e

B 3. Systeme der Ekliptik und des Himmels-Äquators

Das Ekliptiksystem K' und das Himmels-Äquator-System K^* , beide rechtsorientiert, haben eine gemeinsame x -Achse (Richtung zum Frühlingspunkt γ) (Fig. 2.i).

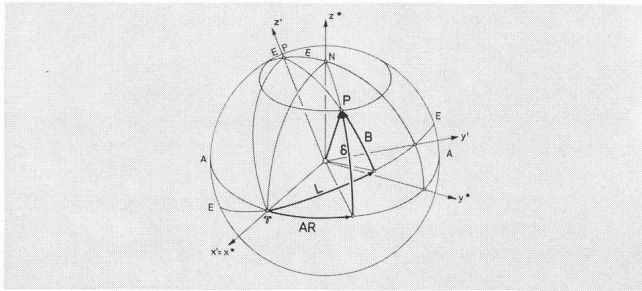


Fig. 2.i

Wir gehen vom Ekliptiksystem aus; drehen wir dieses um die x' -Achse mit dem Winkel $-\epsilon$ (Schiefe der Ekliptik), so kommt die y' -Achse auf die y^* -Achse zu liegen. Somit gilt:

$$x' = x^* \quad D_{-\epsilon} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

Mit

$$\begin{aligned} x' &= r \cos B \cos L & x^* &= r \cos \delta \cos AR \\ y' &= r \cos B \sin L & y^* &= r \cos \delta \sin AR \\ z' &= r \sin B & z^* &= r \sin \delta \end{aligned}$$

ergeben die Formeln:

$$\begin{aligned} 2.46 \quad \cos B \cos L &= \cos \delta \cos AR \\ \cos \epsilon \cos B \sin L - \sin \epsilon \sin B &= \cos \delta \sin AR \\ \sin \epsilon \cos B \sin L + \cos \epsilon \sin B &= \sin \delta \end{aligned}$$

Die Bemerkungen bezüglich Taschenrechner in Beispiel 2 gelten auch hier.

Für die Sonne ist $B = 0$, daher:

$$\begin{aligned} \cos L &= \cos \delta \cos AR \\ \cos \epsilon \sin L &= \cos \delta \sin AR \\ \sin \epsilon \sin L &= \sin \delta \end{aligned}$$

num. Beispiel:

$$\begin{aligned} -\epsilon &= -23.44^\circ, & L &= 120^\circ, & B &= 10^\circ, & r &= 4 \\ & & AR &= 124.614^\circ, & \delta &= 29.906^\circ, & r &= 4^* \\ -\epsilon &= -23.44^\circ, & L &= 120^\circ, & B &= 0^\circ, & r &= 2 \\ & & AR &= 122.18^\circ, & \delta &= 20.15^\circ, & r &= 2 \end{aligned}$$

*) vgl. S. 22 bzw. S. 23.

B 4. Das sphärische Dreieck

Drei Punkte A, B, C auf einer Kugel, die durch Grosskreisbogen a, b, c je zu zweien miteinander verbunden sind, nennt man ein sphärisches Dreieck. Das Dreieck gebildet aus dem Nordpol, dem Zenit und der Richtung zum Stern ist ein solches Dreieck; man nennt es das *nautische* Dreieck, weil es vor allem für die Navigation wichtig ist (Fig. 2.k).

Mit Hilfe der angeführten Transformationsformeln gelingt es, die drei wichtigsten Sätze für das sphärische Dreieck abzuleiten. Wir legen vom Kugelmittelpunkt durch B die \bar{z} -Achse und durch A die z -Achse, die \bar{y} - und y -Achsen sollen identisch sein und normal stehen zur Grosskreisebene, die den Bogen c und somit auch die Punkte A und B enthält.

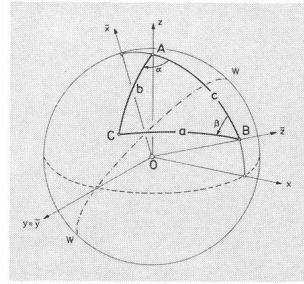


Fig. 2.k: A B C: Ecken des sphärischen Dreiecks. w-w: Schnitt der winkelhalbierenden Ebene mit der Kugel. System K ist spiegelbildlich zum System K' bezüglich der Ebene w-w

Der Punkt C hat im System \bar{K} die Koordinaten:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= r \sin a \cos \beta \\ \bar{y} &= r \sin a \sin \beta \\ \bar{z} &= r \cos a \end{aligned}$$

und im System K hat derselbe Punkt die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin b \cos \alpha \\ y &= r \sin b \sin \alpha \\ z &= r \cos b \end{aligned}$$

Die beiden Systeme sind verschieden orientiert und gehen daher durch eine Spiegelung an der Ebene, welche den Winkel zwischen den Koordinatenebenen $x = 0$ und $\bar{x} = 0$ halbiert, ineinander über. Die z - und die \bar{z} -Achse schliessen die «Seite» c ein; somit gilt:

$$\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = S_c \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit } S_c = \begin{pmatrix} \cos c & \sin c \\ \sin c & -\cos c \end{pmatrix}$$

und $\bar{y} = y$

Wenn wir noch Polarkoordinaten einführen, gibt uns die erste Gleichung

$$\bar{z} = z \cos c + x \sin c$$

den *Cosinus-Satz*:

$$2.47 \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \cos \alpha \sin c;$$

die zweite Gleichung

$$\bar{x} = z \sin c - x \cos c$$

führt uns zum *Sinus-Cosinus-Satz*:

$$2.48 \quad \sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos \alpha \cos c$$

und aus der letzten Gleichung:

$$\bar{y} = y$$

erhalten wir den *Sinus-Satz*:

$$2.49 \quad \sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha$$

Das Vertauschen von b mit c und β mit γ führt zu einem neuen Tripel und mit den zyklischen Vertauschungen ergeben sich im ganzen sechs verschiedene Tripel.

num. Beispiel:

$$\begin{aligned} c &= 70^\circ, & \alpha &= 110^\circ, & b &= 130^\circ, & r &= 7 \\ & & \beta &= 125.55^\circ, & a &= 117.78^\circ, & r &= 7^* \\ b &= 130^\circ, & \alpha &= 110^\circ, & c &= 70^\circ \\ & & \gamma &= 86.41^\circ, & a &= 117.78^\circ \end{aligned}$$

*) vgl. S. 22 bzw. S. 23.

B 5. Programme und Beispiele für HP-Rechner

Alle HP (Hewlett-Packard) Taschenrechner besitzen vier Stack-Register, deren Namen, X, Y, Z, T man zweckmässigerweise an die Ecken eines Quadrates schreibt:



Der Inhalt des Registers X wird jeweils angezeigt. Zur Verschiebung der Inhalte stehen Befehle zur Verfügung.

ENTER kopiert den Inhalt des X-Registers in das Y-Register und verschiebt die Inhalte von Y und Z je im Gegenuhreigersinn; der Inhalt von T geht verloren. Das Register X ist bereit zur Aufnahme einer neuen Zahl.

X<>Y Austausch der Inhalte von X und Y

RDN «Roll Down» zyklische Vertauschung im Uhrzeigersinn

R↑ «Roll up» zyklische Vertauschung im Gegenuhrzeigersinn

R↑ Ist äquivalent mit **RDN**, **RDN**, **RDN**

X<>Z Ist äquivalent mit **X<>Y**, **RDN**, **X<>Y**, **R↑**, **X<>Y**

X<>T Ist äquivalent mit **R↑**, **X<>Y**, **RDN**

P-R «to rectangular» α in Y zu y in Y
 r in X x in X

R-P «to polar» y in Y zu α in Y
 x in X r in X

Drehung um x-Achse

```

-ε = -23.44 ENTER
L = 120. ENTER↑
B = 10. ENTER↑
r = 4.
XEQ "DX"
01♦LBL "DX"
FIX 2
P-R
3.94 ***
z' = r cos B
X<>Y
0.69 ***
z' = r sin B
RDN
3.94 ***
q'
P-R
-1.97 ***
x' = r cos B cos L
X<>T
0.69 ***
z'
X<>Y
3.41 ***
y' = r cos B sin L
P-P
3.48 ***
q'
RDN
11.51 **
α'
X<>Y
-23.44 **
Φ = -ε
*
34.95 **
α* = α' - Φ
R↑
3.48 ***
q'
P-R
2.85 ***
y* = r cos δ sin AR
X<>Y
1.99 ***
z* = r sin δ
RDN
2.85 ***
y*
X<>Y
-1.97 ***
x' = x* = r cos δ cos AR
P-P
3.47 ***
q* = r cos δ
R↑
1.99 ***
z*
X<>Y
3.47 ***
q*
P-P
r = 4.00 ***
RDN
δ = 29.91 **
X<>Y
AR = 124.61 **
END
    
```

Eingabe

polare zu rechtwinklige Koordinaten

Ordnen des Stack

Drehung

Drehwinkel Φ

Ordnen des Stack

rechtwinklige zu polare Koordinaten

Ausgabe

Drehung um y-Achse

```

Φ = 150. ENTER↑
t = 100. ENTER↑
δ = -20. ENTER↑
r = 4.
XEQ "DY"
01♦LBL "DY"
FIX 2
P-R
3.76 ***
q̄ = r cos δ
X<>Y
-1.37 ***
z̄ = r sin δ
PDN
3.76 ***
q̄
P-R
-0.65 ***
x̄ = r cos δ cos t
X<>Y
3.70 ***
ȳ = r cos δ sin t
X<>T
-1.37 ***
z̄
R-P
1.52 ***
q'
PDN
-154.49 *
ᾱ
X<>Y
150.00 *
Φ
*
-304.49 *
α = ᾱ - Φ
R↑
1.52 ***
q'
P-R
0.86 ***
z = r sin h
RDN
1.25 ***
x = r cos h cos a
P-P
3.91 ***
q = r cos h
R↑
0.86 ***
z = r sin h
X<>Y
3.91 ***
q
P-P
r = 4.00 ***
RDN
h = 12.39 **
X<>Y
a = 71.35 **
END
    
```

Eingabe

polare zu rechtwinklige Koordinaten

Ordnen

Drehung

Drehwinkel Φ

Ordnen

rechtwinklige zu polare Koordinaten

Ausgabe

