Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 38 (1980)
Heft: [1]: Sondernummer = numéro spécial = numero speciale

Artikel: 2. Koordinaten-Transformationen
Autor: Schilt, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-899579

B 4. System der Ekliptik
System E′

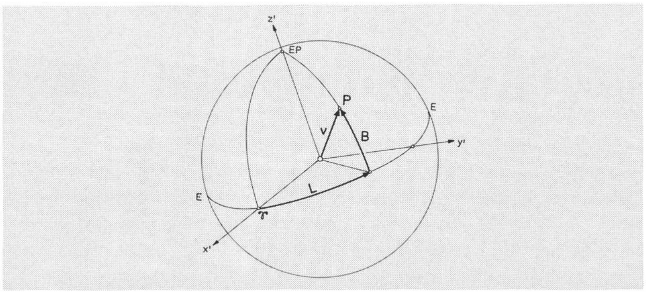

Fig. 1.n: rechtsorientiert

z'-Achse:	Richtung zum nördlichen Ekliptikpol EP
x'-Achse:	Richtung zum Frühlingspunkt
y'-Achse:	Schnitt $L = 90°$ mit Ekliptik-Ebene
E-E:	Ekliptik
$r := v$	Entfernung vom Himmelskörper oder 1
$\alpha := L$	ekliptikale Länge
$\beta := B$	ekliptikale Breite
$x' =$	$v \cos B \cos L$
$y' =$	$v \cos B \sin L$
$z' =$	$v \sin B$

Adresse des Autors:
Prof. H. Schilt, Höheweg 5, CH-2502 Biel.

2. Koordinaten-Transformationen

H. Schilt

Manchmal verwendet man für ein Problem mehrere Koordinatensysteme, weil sich das eine System für eine Teilaufgabe besser eignet als das andere. Man muss deshalb die Koordinaten von einem System in diejenigen des andern Systems umrechnen können. Dazu dienen Transformationsformeln.

Wir unterscheiden das Ausgangssystem vom Zielsystem. Wir nehmen an, wir kennen die Koordinaten eines geometrischen Objektes im Ausgangssystem und, auf dasselbe System bezogen, die notwendigen Grössen, um das Zielsystem festzulegen. Gesucht sind die Beziehungen, welche gestatten, aus den gegebenen Koordinaten diejenigen im Zielsystem auszurechnen.

Zuerst betrachten wir wieder ebene Systeme. Man unterscheidet zwischen Schiebungen (Translationen), Drehungen (Rotationen) und Spiegelungen.

2.1 Schiebungen
Wir gehen vom System K aus; in diesem System hat der Ursprung $\bar{O}$ des Zielsystems $\bar{K}$ die Koordinaten $x = u$ und $y = v$. Durch diese Angabe ist das Zielsystem festgelegt, da bei Schiebungen die Achsen je parallel bleiben.

Der Punkt P hat im (Fig. 2.a)

Ausgangssystem K die Koordinaten	Zielsystem $\bar{K}$
$x = \mathrm{O\,Q}$	$\bar{x} = \bar{\mathrm{O}}\,\bar{\mathrm{Q}}$
$y = \mathrm{Q\,P}$	$\bar{y} = \bar{\mathrm{Q}}\,\mathrm{P}$

Aus der Figur entnimmt man:

2.11

$$x - u = \bar{x}$$
$$y - v = \bar{y}$$

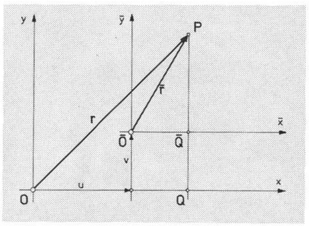

Fig. 2.a:

Beispiel:

$u = 5 \quad v = 3 \qquad 8 - 5 = 3 = \bar{x}$
$x = 8 \quad y = 8 \qquad 8 - 3 = 5 = \bar{y}$

2.2 Drehungen
Zwei gleichorientierte kartesische Koordinatensysteme mit nicht parallelen Achsen lassen sich immer durch eine Drehung um einen bestimmten Punkt zur Deckung bringen; sind sie verschieden orientiert, so ist eine Spiegelung notwendig (vgl. 2.3).

Wir betrachten den speziellen Fall der gleichorientierten Systeme mit gemeinsamem Ursprung, der somit Drehpunkt ist. (Fig. 2.b)

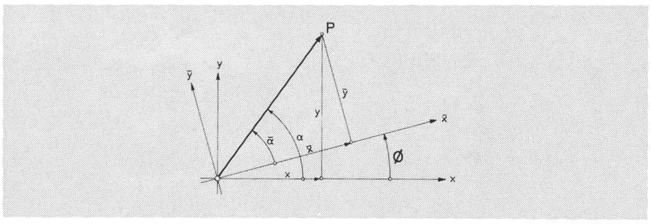

Fig. 2.b

Die Koordinaten von P sind

im System K Ausgangssystem	im System $\bar{K}$ Zielsystem
$x = r \cos \alpha$	$\bar{x} = \bar{r} \cos \bar{\alpha}$
$y = r \sin \alpha$	$\bar{y} = \bar{r} \sin \bar{\alpha}$

Bei einer Drehung von K um den Winkel Φ gilt:

2.21

$$r = \bar{r}$$
$$\alpha - \Phi = \bar{\alpha}$$

so dass

2.22

$$\bar{x} = r \cos(\alpha - \Phi)$$
$$\bar{y} = r \sin(\alpha - \Phi)$$

Man merke sich:

Phi "Φ" ist der Winkel, welcher von der x-Achse des Ausgangssystems bis zur $\bar{x}$-Achse des Zielsystems gemessen und im Sinne des Ausgangssystems gezählt wird.

Zum Rechnen mit einem Taschenrechner eignet sich folgende Anweisung:

2.23 R-P $(y, x)\,\boldsymbol{P} = (\alpha, r)$

Drehung
$$r = \bar{r}$$
$$\alpha - \Phi = \bar{\alpha}$$

P-R $(\bar{\alpha}, r)\,\boldsymbol{R} = (\bar{y}, \bar{x})$

Zerlegt man die trigonometrischen Formen in 2.22 mit Hilfe der Additionstheoreme und setzt die rechtwinkligen Koordinaten x und y ein, so erhält man das bekannte Gleichungspaar:

2.24
$$x \cos\Phi + y \sin\Phi = \bar{x}$$
$$-x \sin\Phi + y \cos\Phi = \bar{y}$$

Oft findet man dafür die symbolische Abkürzung (Matrixschreibweise):

2.25 $$\boldsymbol{D}_\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \text{ mit } \boldsymbol{D}_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\Phi & , & \sin\Phi \\ -\sin\Phi & , & \cos\Phi \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$\Phi = 120°$

$x = +3$	$r = 5$
$y = -4$	$\alpha = -53.13°$
$\bar{r} = 5$	$\bar{x} = -4.964$
$\bar{\alpha} = -173.13°$	$\bar{y} = -0.698$

Programm und Beispiel für die Drehung

Φ: Winkel zwischen x- und $\bar{x}$-Achse

$\Phi =$	120 ENTER↑	
$y =$	-4 ENTER↑	
$x =$	3	
		R-P
r	5.000	**
		*
		RDN
α	-53.130	*
		**
		X<>Y
Φ	120.000	
		***
		-
$\bar{\alpha} = \alpha - \Phi$	-173.130	
		***
		R↑
r	5.000	**
		*
		P-R
$\bar{x} =$	-4.964	**
		*
		X<>Y
$\bar{y} =$	-0.598	**
		*

Bedeutung der Symbole: siehe Seite 22

Zum Auflösen des Systems 2.24 nach x und y genügt die Bemerkung, dass von $\bar{K}$ aus gesehen, der Drehwinkel $-\Phi$ ist; somit gilt:

2.26
$$\bar{x} \cos\Phi - \bar{y} \sin\Phi = x$$
$$\bar{x} \sin\Phi + \bar{y} \cos\Phi = y$$

$$\boldsymbol{D}_{-\Phi} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist oft nützlich zu wissen, dass diese Beziehung mit

$$\boldsymbol{D}_\Phi \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

äquivalent ist.

Beispiele:

$\Phi = -120°$

$\bar{x} = 3$	$\bar{r} = 5$
$\bar{y} = -4$	$\bar{\alpha} = -53.13°$
$r = 5$	$x = 1.964$
$\alpha = 66.87°$	$y = 4.598$

$\Phi = +120°$

$\bar{y} = -4$	$\bar{r} = 5$
$\bar{x} = 3$	$\bar{\beta} = 143.130°$
$r = 5$	$y = 4.598$
$\beta = 23.130°$	$x = 1.964$

2.3 Achsenspiegelung

Das Koordinatensystem K soll an einer Geraden gespiegelt werden, dadurch entsteht aus der x-Achse die $\bar{x}$-Achse (Fig. 2c). Diese Achsen sollen den Winkel Φ einschliessen.

Ein Punkt P hat die Koordinaten

im System K
$x = r \cos\alpha$
$y = r \sin\alpha$

im System $\bar{K}$
$\bar{x} = \bar{r} \cos\bar{\alpha}$
$\bar{y} = \bar{r} \sin\bar{\alpha}$

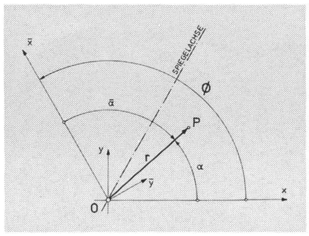

Fig. 2.c

Es gilt bei der Spiegelung:

2.31
$$r = \bar{r}$$
$$\Phi - \alpha = \bar{\alpha}$$

also ist

2.32
$$r \cos(\Phi - \alpha) = \bar{x}$$
$$r \sin(\Phi - \alpha) = \bar{y}$$

Folgende Zusammenstellung ist für Taschenrechner zweckmässig:

2.33 R – P $(y, x)\,\boldsymbol{P} = (\alpha, r)$

Spiegelung
$$r = \bar{r}$$
$$\Phi - \alpha = \bar{\alpha}$$

P – R $(\bar{\alpha}, r)\,\boldsymbol{R} = (\bar{y}, \bar{x})$

Programm und Beispiel für die Spiegelung

Φ: Winkel zwischen x- und $\bar{x}$-Achse

$\Phi =$	120 ENTER↑	
$y =$	-4 ENTER↑	
$x =$	3	
		R-P
r	5.000	**
		*
		RDN
α	-53.130	*
		**
		-
$\bar{\alpha} = \Phi - \alpha$	173.130	
		***
		R↑
r	5.000	**
		*
		P-R
$\bar{x} =$	-4.964	**
		*
		X<>Y
$\bar{y} =$	0.598	**
		*

Bedeutung der Symbole: siehe Seite 22

Die Festsetzung für Φ in 2.2 gilt auch hier. Weil die beiden Systeme verschieden orientiert sind, hat jedoch Φ für den Übergang von K zu $\bar{K}$ und jenem von $\bar{K}$ zu K je das gleiche Vorzeichen.

Analog wie in 2.2 können wir auch die Beziehung für die rechtwinkligen Koordinaten gewinnen; wir erhalten

2.34
$$x \cos\Phi + y \sin\Phi = \bar{x}$$
$$x \sin\Phi - y \cos\Phi = \bar{y}$$

Was symbolisch mit

$$S_\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{worin } S_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\Phi, & \sin\Phi \\ \sin\Phi, & -\cos\Phi \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Es gilt auch:

$$S_\Phi \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$\Phi = 120°$

$x = +4$ $\quad r = 5$

$y = -3$ $\quad \alpha = -36.87°$

$\bar{r} = 5$ $\quad \bar{x} = -4.598$

$\bar{\alpha} = -156.87°$ $\quad \bar{y} = +1.964$

2.4 Beispiele

Betrachtet man die vier wichtigsten Koordinatensysteme der Astronomie, so kann man feststellen, dass je zwei durch eine Drehung um eine Koordinatenachse oder eine Spiegelung ineinander übergeführt werden können. Die einführenden Betrachtungen haben wir in der x-y-Ebene durchgeführt, im dreidimensionalen Raum ist dazu noch eine z-Achse mit positivem Ende nach vorn zu denken. Diese Achse ist auch Drehachse oder eine Gerade, welche in der Spiegelebene liegt. Durch eine geeignete zyklische Vertauschung gelten unsere Überlegungen auch für Drehungen bzw. Spiegelungen für die x- oder y-Achse. Dabei ist allerdings noch die Orientierung des Systems zu beachten (vgl. Fig. 2.d)

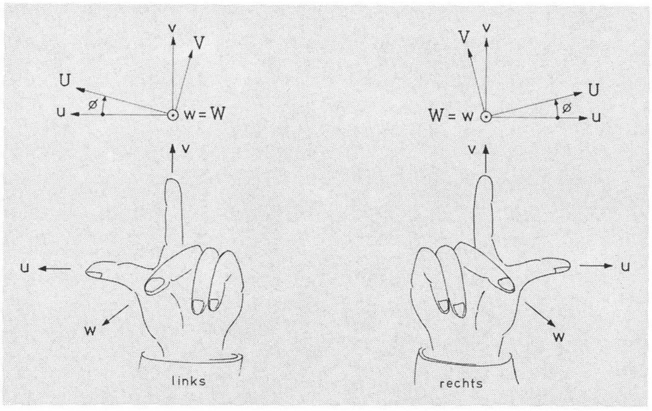

Fig. 2.d: Bestimmung der positiven Drehrichtung.

Ausgangssystem u v w   Zielsystem U V W

u v w ist irgend eine *zyklische* Vertauschung von x y z
U V W ist dieselbe zyklische Vertauschung von X Y Z

Die Achsen w und W sind identisch, also Drehachsen, beide nach vorn positiv gezählt (auf die Betrachter zukommend)

Der eingezeichnete Drehwinkel Φ ist je positiv.

Drehung	Spiegelung
$D_\Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$	$S_\Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$
$u \cos\Phi + v \sin\Phi = U$	$u \cos\Phi + v \sin\Phi = U$
$-u \sin\Phi + v \cos\Phi = V$	$u \sin\Phi - v \cos\Phi = V$

2.41

$(v, \mathrm{u})\, \boldsymbol{P} = (\alpha, r)$	$(v, u)\, \boldsymbol{P} = (\alpha, r)$
$\alpha - \Phi = \bar{\alpha}$	$\Phi - \alpha = \bar{\alpha}$
$(\bar{\alpha}, r)\, \boldsymbol{R} = (V, U)$	$(\bar{\alpha}, r)\, \boldsymbol{R} = (V, U)$

B 1. Systeme des Äquators

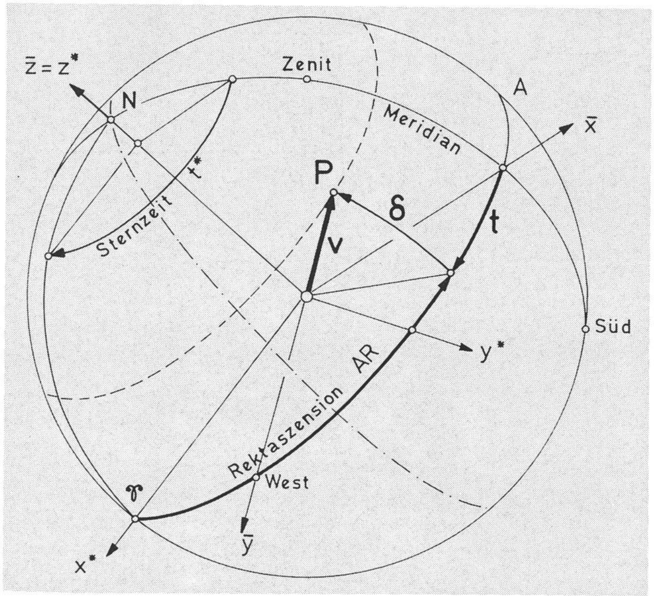

Fig. 2.e

Nur bei den beiden Äquatorsystemen sind die Polarkoordinaten der Umwandlung angepasst und die Spiegelung kann direkt mit der Beziehung

2.42 $$AR = t^* - t$$

erfolgen. (Fig. 2e und 2f)

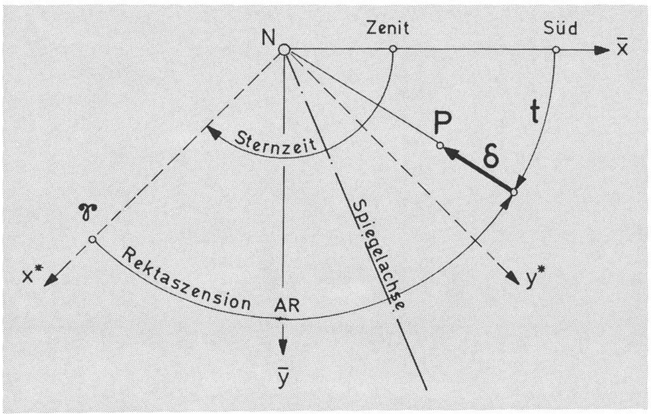

Fig. 2.f

Die Erdrotation ist so regelmässig, dass man sie bis 1958 zur Definition der Sekunde benutzte. Erst mit Quarz- und Atomuhren konnte man Unregelmässigkeiten der Erdrotation feststellen. Für die meisten praktischen Zwecke kann sie aber heute noch als gleichförmig betrachtet werden. Deshalb eignen sich die Systeme des Äquators besonders gut für Probleme, in denen die Zeit eine Rolle spielt.

B 2. Systeme des Ortsäquators und des Horizontes

Die beiden linksorientierten Systeme des Ortsäquators und des Horizontes haben eine gemeinsame y-Achse. Das Ortsäquatorsystem sei unser Ausgangssystem: dieses geht bei einer Drehung mit dem Winkel $\Phi = 90° - \varphi$ (von der $\bar{z}$- zur z-Achse gemessen) in das Horizontsystem über. Symbolisch geschrieben:

2.43 $$D_\Phi \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}, \; \bar{y} = y$$

Diese Methode kann auch angewandt werden, wenn es gilt, von einem Vektor v, der durch seine Komponenten $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ bezüglich des Ortsäquatorsystems gegeben ist, die Komponenten v_1, v_2, v_3 im Horizontsystem zu bestimmen:

2.44 $$D_\Phi \begin{pmatrix} \bar{v}_3 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_1 \end{pmatrix}, \; \bar{v}_2 = v_2$$

ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \bar{v}_3 \cos\Phi + \bar{v}_1 \sin\Phi &= v_3 \\ -\bar{v}_3 \sin\Phi + \bar{v}_1 \cos\Phi &= v_1 \\ \bar{v}_2 &= v_2 \end{aligned}$$

num. Beispiel und Fig. 2.g

$$\varphi = -60°; \Phi = 150°$$
$$\bar{v}_3 = -6, \; \bar{v}_1 = -2, \; \bar{v}_2 = 3$$
$$v_3 = 4.20, \; v_1 = 4.73, \; v_2 = 3$$

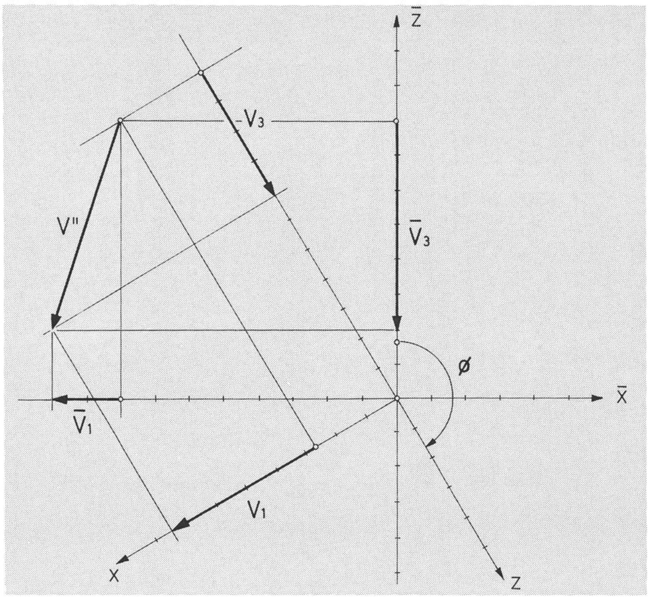

Fig. 2.g: v'' ist der Aufriss des Vektors $\boldsymbol{v}$. Der Vektor v hat eine Komponente v_2, die bei einem rechtsorientierten Koordinatensystem nach hinten positiv gezählt würde; diese Komponente bleibt bei der Drehung unverändert. Die Figur entspricht dem numerischen Beispiel.

Sind die Polarkoordinaten t, δ, r gegeben (Fig. 2.h), so müssen diese zuerst in rechtwinklige ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) umgewandelt, nachher die Drehung ausgeführt und schliesslich (x, y, z) in Polarkoordinaten a, h, r zurückverwandelt werden.

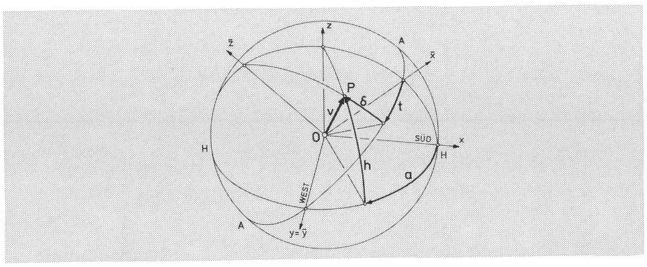

Fig. 2.h

Dies ist die einfachste und zuverlässigste Methode, um mit einem entsprechenden Taschenrechner das System:

2.45 $$\begin{aligned} \cos\Phi \sin\delta + \sin\Phi \cos\delta \cos t &= \sin h \\ -\sin\Phi \sin\delta + \cos\Phi \cos\delta \cos t &= \cos h \cos a \\ \cos\delta \sin t &= \cos h \sin a \end{aligned}$$

zu lösen. Nach den im ORION *164* S. 36–38 gegebenen Hinweisen sind die Werte Φ, t, δ, r einzugeben und nach 19 Programmschritten erscheint das Resultat a, h, r, dabei werden ausser den vier Stackregistern keine Speicher belegt.

Die gleichen Programmschritte leisten den Übergang von $-\Phi$, a, h, r nach t, δ, r

num. Beispiele:

$\varphi = -60°, \Phi = -150°$	$a = 100°$	$h = 20°$	$r = 8$
	$t = 71.351°$	$\delta = -12.393°$	$r = 8$
$\Phi = 150°$	$t = 100°$	$\delta = -20°$	$r = 4$
	$a = 71.351$	$h = 12.393$	$r = 4$

vgl. S. 22 bzw. S. 23

B 3. Systeme der Ekliptik und des Himmels-Äquators

Das Ekliptiksystem K′ und das Himmels-Äquator-System K*, beide rechtsorientiert, haben eine gemeinsame x-Achse (Richtung zum Frühlingspunkt γ) (Fig. 2.i).

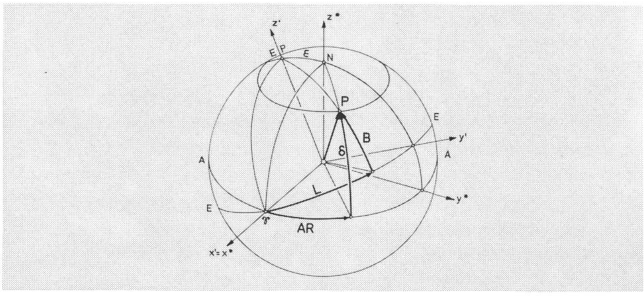

Fig. 2.i

Wir gehen vom Ekliptiksystem aus; drehen wir dieses um die x'-Achse mit dem Winkel $-\varepsilon$ (Schiefe der Ekliptik), so kommt die y'-Achse auf die y^*-Achse zu liegen. Somit gilt:

$$x' = x^* \qquad D_{-\varepsilon}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{matrix} y^* \\ z^* \end{matrix}$$

Mit

$$x' = r\cos B\cos L \qquad x^* = r\cos\delta\cos AR$$
$$y' = r\cos B\sin L \qquad y^* = r\cos\delta\sin AR$$
$$z' = r\sin B \qquad z^* = r\sin\delta$$

ergeben die Formeln:

2.46
$$\cos B\cos L = \cos\delta\cos AR$$
$$\cos\varepsilon\cos B\sin L - \sin\varepsilon\sin B = \cos\delta\sin AR$$
$$\sin\varepsilon\cos B\sin L + \cos\varepsilon\sin B = \sin\delta$$

Die Bemerkungen bezüglich Taschenrechner in Beispiel 2 gelten auch hier.

Für die Sonne ist $B = 0$, daher:

$$\cos L = \cos\delta\cos AR$$
$$\cos\varepsilon\sin L = \cos\delta\sin AR$$
$$\sin\varepsilon\sin L = \sin\delta$$

num. Beispiel:

$-\varepsilon = -23.44°$, $L = 120°$, $B = 10°$, $r = 4$
AR $= 124.614°$, $\delta = 29.906°$, $r = 4$*)

$-\varepsilon = -23.44°$. $L = 120°$, $B = 0°$, $r = 2$
$AR = 122.18°$, $\delta = 20.15°$, $r = 2$

*) vgl. S. 22 bzw. S. 23.

B 4. Das sphärische Dreieck

Drei Punkte A, B, C auf einer Kugel, die durch Grosskreisbogen a, b, c je zu zweien miteinander verbunden sind, nennt man ein sphärisches Dreieck. Das Dreieck gebildet aus dem Nordpol, dem Zenit und der Richtung zum Stern ist ein solches Dreieck; man nennt es das *nautische* Dreieck, weil es vor allem für die Navigation wichtig ist (Fig. 2.k).

Mit Hilfe der angeführten Transformationsformeln gelingt es, die drei wichtigsten Sätze für das sphärische Dreieck abzuleiten. Wir legen vom Kugelmittelpunkt durch B die $\bar z$-Achse und durch A die z-Achse, die $\bar y$- und y-Achsen sollen identisch sein und normal stehen zur Grosskreisebene, die den Bogen c und somit auch die Punkte A und B enthält.

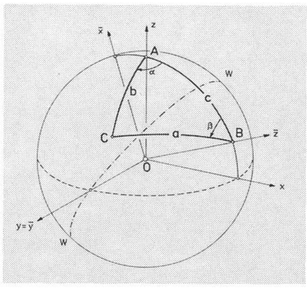

Fig. 2.k: A B C: Ecken des sphärischen Dreiecks. w-w: Schnitt der winkelhalbierenden Ebene mit der Kugel. System K ist spiegelbildlich zum System K bezüglich der Ebene w-w

Der Punkt C hat im System $\bar K$ die Koordinaten:

$$\bar x = r\sin a\cos\beta$$
$$\bar y = r\sin a\sin\beta$$
$$\bar z = r\cos a$$

und im System K hat derselbe Punkt die Koordinaten:

$$x = r\sin b\cos\alpha$$
$$y = r\sin b\sin\alpha$$
$$z = r\cos b$$

Die beiden Systeme sind verschieden orientiert und gehen daher durch eine Spiegelung an der Ebene, welche den Winkel zwischen den Koordinatenebenen $x = 0$ und $\bar x = 0$ halbiert, ineinander über. Die z- und die $\bar z$-Achse schliessen die «Seite» c ein; somit gilt:

$$\begin{pmatrix} \bar z \\ \bar x \end{pmatrix} = S_c\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{mit } S_c = \begin{pmatrix} \cos c, & \sin c \\ \sin c, & -\cos c \end{pmatrix}$$

und $\bar y = y$

Wenn wir noch Polarkoordinaten einführen, gibt uns die erste Gleichung

$$\bar z = z\cos c + x\sin c$$

den *Cosinus-Satz:*

2.47 $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\cos\alpha\sin c;$

die zweite Gleichung

$$\bar x = z\sin c - x\cos c$$

führt uns zum *Sinus-Cosinus-Satz:*

2.48 $\sin a\cos\beta = \cos b\sin c - \sin b\cos\alpha\cos c$

und aus der letzten Gleichung:

$$\bar y = y$$

erhalten wir den *Sinus-Satz:*

2.49 $\sin a\sin\beta = \sin b\sin\alpha$

Das Vertauschen von b mit c und β mit γ führt zu einem neuen Tripel und mit den zyklischen Vertauschungen ergeben sich im ganzen sechs verschiedene Tripel.

num. Beispiel:

$c = 70°$, $\alpha = 110°$, $b = 130°$, $r = 7$
$\beta = 125.55°$, $a = 117.78°$, $r = 7$*)

$b = 130°$, $\alpha = 110°$, $c = 70°$
$\gamma = 86.41°$, $a = 117.78°$

*) vgl. S. 22 bzw. S. 23.

B 5. Programme und Beispiele für HP-Rechner
Alle HP (Hewlett-Packard) Taschenrechner besitzen vier Stack-Register, deren Namen, X, Y, Z, T man zweckmässigerweise an die Ecken eines Quadrates schreibt:

Z	Y
T	X

Der Inhalt des Registers X wird jeweils angezeigt. Zur Verschiebung der Inhalte stehen Befehle zur Verfügung.

ENTER kopiert den Inhalt des X-Registers in das Y-Register und verschiebt die Inhalte von Y und Z je im Gegenuhrzeigersinn; der Inhalt von T geht verloren. Das Register X ist bereit zur Aufnahme einer neuen Zahl.

X<>Y Austausch der Inhalte von X und Y

RDN «Roll Down» zyklische Vertauschung im Uhrzeigersinn

R↑ «Roll up» zyklische Vertauschung im Gegenuhrzeigersinn

R↑ Ist äquivalent mit RDN , RDN , RDN

X<>Z Ist äquivalent mit X<>Y , RDN , X<>Y , R↑ , X<>Y

X<>T Ist äquivalent mit R↑ , X<>Y , RDN

P–R	«to rectangular»	α in Y r in X	zu	y in Y x in X
R–P	«to polar»	y in Y x in X	zu	α in Y r in X

Drehung um x-Achse

$-\varepsilon =$	-23.44 ENTER↑	Eingabe
$L =$	120. ENTER↑	
$B =$	10. ENTER↑	
$r =$	4.	
	XEQ "DX"	
	01♦LBL "DX"	
	FIX 2	
	P-R	polare zu rechtwinklige Koordinaten
$\varrho' = r\cos B$	3.94 ***	
	X<>Y	
$z' = r\sin B$	0.69 ***	
	RDN	
ϱ'	3.94 ***	
	P-R	
$x' = r\cos B\cos L$	-1.97 ***	Ordnen des Stack
	X<> T	
z'	0.69 ***	
	X<>Y	
$y' = r\cos B\sin L$	3.41 ***	
	R-P	Drehung
ϱ'	3.48 ***	
	RDN	
α'	11.51 ***	
	X<>Y	Drehwinkel Φ
$\Phi = -\varepsilon$	-23.44 ***	
	-	
$\alpha^* = \alpha' - \Phi$	34.95 ***	
	R↑	
ϱ'	3.48 ***	
	P-R	Ordnen des Stack
$y^* = r\cos\delta\sin AR$	2.85 ***	
	X<>Y	
$z^* = r\sin\delta$	1.99 ***	
	RDN	
y^*	2.85 ***	
	X<>Y	
$x' = x^* = r\cos\delta\cos AR$	-1.97 ***	
	R-P	rechtwinklige zu polare Koordinaten
$\varrho^* = r\cos\delta$	3.47 ***	
	R↑	
z^*	1.99 ***	
	X<>Y	
ϱ^*	3.47 ***	
	R-P	Ausgabe
$r =$	4.00 ***	
	RDN	
$\delta =$	29.91 ***	
	X<>Y	
$AR =$	124.61 ***	
	END	

Drehung um y-Achse

$\Phi =$	150. ENTER↑	Eingabe
$t =$	100. ENTER↑	
$\delta =$	-20. ENTER↑	
$r =$	4.	
	XEQ "DY"	
	01♦LBL "DY"	
	FIX 2	
	P-R	polare zu rechtwinklige Koordinaten
$\bar{\varrho} = r\cos\delta$	3.76 ***	
	X<>Y	
$\bar{z} = r\sin\delta$	-1.37 ***	
	RDN	
$\bar{\varrho}$	3.76 ***	
	P-R	
$\bar{x} = r\cos\delta\cos t$	-0.65 ***	Ordnen
	X<>Y	
$\bar{y} = r\cos\delta\sin t$	3.70 ***	
	X<> T	
$\bar{z}$	-1.37 ***	
	R-P	Drehung
ϱ'	1.52 ***	
	RDN	
$\bar{\alpha}$	-154.49 ***	
	X<>Y	Drehwinkel Φ
Φ	150.00 ***	
	-	
$\alpha = \bar{\alpha} - \Phi$	-304.49 ***	
	R↑	
ϱ'	1.52 ***	
	P-R	Ordnen
$z = r\sin h$	0.86 ***	
	RDN	
$x = r\cos h\cos a$	1.25 ***	
	R-P	rechtwinklige zu polare Koordinaten
$\varrho = r\cos h$	3.91 ***	
	R↑	
$z = r\sin h$	0.86 ***	
	X<>Y	
ϱ	3.91 ***	
	R-P	Ausgabe
$r =$	4.00 ***	
	RDN	
$h =$	12.39 ***	
	X<>Y	
$a =$	71.35 ***	
	END	

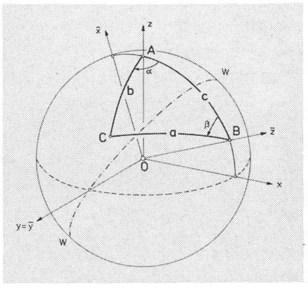

Fig. 2k: A B C: Ecken des sphärischen Dreiecks.
w-w: Schnitt der winkelhalbierenden Ebene mit der Kugel. System K ist spiegelbildlich zum System $\bar{K}$ bezüglich der Ebene w-w.

B 6. Programm und Beispiel für TI-Rechner [1])
TI (Texas Instruments) Taschenrechner besitzen folgende Befehle, deren Kenntnis für die angeführten Programme nützlich sind:

X:T	Austausch der Inhalte des X- und des T-Registers			
EXC	n Austausch der Inhalte des X- und des Registers n			
RCL	n Aufruf des Inhalts des Registers n in das Registers X			
P / R	«to rectangular»	r in T a in X	zu	x in T y in X
IP / R	«to polar»	x in T y in X	zu	r in T a in X

Spiegelung an Ebene durch y-Achse (sphärisches Dreieck)

$c =$	70. ENTER↑		Eingabe
$\alpha =$	110. ENTER↑		
$b =$	130. ENTER↑		
$r =$	7.		
	XEQ "DR"		
	01♦LBL "DR"		
		FIX 3	
		P-R	polare zu rechtwinklige Koordinaten
$z = r \cos b$	-4.500	***	
		RDN	
$\varrho = r \sin b$	5.362	***	
		P-R	
$x = r \sin b \cos \alpha$	-1.834	***	Ordnen des Stack
		X<>Y	
$y = r \sin b \sin \alpha$	5.039	***	
		X<> T	
z	-4.500	***	
		R-P	Spiegelung
ϱ'	4.859	***	
		RDN	
α'	-157.824	***	
		-	c Winkel zwischen z- und $\bar{z}$-Achse
$\bar{\alpha} = c - \alpha'$	227.824	***	
		R↑	
ϱ'	4.859	***	
		P-R	Ordnen
$\bar{z} = r \cos a$	-3.262	***	
		RDN	
$\bar{x} = r \sin a \cos \beta$	-3.601	***	
		R-P	rechtwinklige zu polare Koordinaten
$\bar{\varrho} = r \sin a$	6.193	***	
		R↑	
$\bar{z} = r \cos a$	-3.262	***	
		R-P	Ausgabe
$r =$	7.000	***	
		RDN	
$a =$	117.778	***	
		X<>Y	
$\beta =$	125.550	***	
		END	

$c =$	70.	STO 0	Eingabe
	70.000		
$\alpha =$	110.	STO 1	
	110.000		
$b =$	130.	X:T	
	4.000		
$r =$	7.	X:T	
	130.000		
	130.	P/R	polare zu rechtwinklige Koordinaten
$\varrho = r \sin b$	5.362		
	5.362311102	X:T	
$z = r \cos b$	-4.500		
	-4.499513268	EXC 1	
	110.000		
	110.	P/R	
$y = r \sin b \sin \alpha$	5.039		Ordnen
	5.038924173	EXC 1	
z	-4.500		
	-4.499513268	X:T	
$x = r \sin b \cos \alpha$	-1.834		
	-1.834018412	IP/R	Spiegelung
α'	202.176		
	-202.1759926	+	
$-\alpha'$	-202.1759926	RCL 0	
c	70.000		
	70.	=	
$\bar{\alpha} = c - \alpha'$	-132.176		
	-132.1759926	P/R	
$\bar{x} = r \sin a \cos \beta$	-3.601		
	-3.600888175	X:T	Ordnen
$\bar{z} = r \cos a$	-3.262		
	-3.26233774	EXC 1	
$\bar{y} = r \sin a \sin \beta$	5.039		
	5.038924173	IP/R	rechtwinklige zu polare Koordinaten
$\beta =$	125.550		
	125.5501489	EXC 1	
$\bar{z}$	-3.262		
	-3.26233774	X:T	
$\bar{\varrho} = r \sin a$	6.193		
	6.193315144	IP/R	
$a =$	117.778		

[1]) In freundlicher Weise mitgeteilt von Herrn Pierre Weber, 8704 Herrliberg Postfach.