Astro- und Instrumententechnik : 6. Kapitel : "Die Steifigkeit als Konstruktionsgrösse" [Fortsetzung]

Autor(en): **Ziegler, H.G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft**

Band (Jahr): **37 (1979)**

Heft 174

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-899624

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

6. Kapitel: «Die Steifigkeit als Konstruktionsgrösse»

von H. G. ZIEGLER

6.4 Die Steifigkeit stabförmiger Elemente bei allgemeiner Belastung

Der in der Abb. 6.1 dargestellte Belastungsfall[1]) und die ihm zugeordnete Steifigkeit sind für Montierungselemente eher ein Sonderfall. Greift man ein beliebiges Element aus der Struktur heraus, dann liegen zwischen diesem und der Bildebene, als Wirkungsebene der Kraft und Bezugspunkt der Steifigkeit, andere Elemente. Die Kraft wirkt nicht mehr direkt sondern über andere Teile auf das herausgegriffene Element ein. Man kann sich die zwischen Bildebene und Element liegenden Teile auch durch einen starren Hebelarm ersetzt denken. Im allgemeinen Fall werden daher die Teile einer Montierung nicht nur durch Kräfte sondern auch durch Momente belastet. Es ist wichtig diesen allgemeinen Belastungsfall näher zu betrachten um daraus die für die Konstruktion erforderlichen Konsequenzen zu ziehen. In der Abb. 6.4 sind die 4 elementaren Belastungsfälle eines Stabes oder stabförmigen Elementes noch einmal dargestellt.

Fall 1.
Der Kraftvektor fällt mit der Stabachse zusammen. Es liegt reine Druck- oder Zugbelastung vor. Die Verschiebung des Punktes Q durch die Kraft F ist:

$$\Delta = F \cdot \frac{l}{A \cdot E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Gl. 6.1}$$

Fall 2.
Der Kraftvektor steht senkrecht zur X-Achse. Es liegt elementare Biegebelastung vor. Der Punkt Q erfährt eine Verschiebung Δ und die Stabachse eine Drehung um den Biegewinkel β.

$$\Delta = F \cdot \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot J} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Gl. 6.2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = F \cdot \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot J} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Gl. 6.10}$$

Fall 3.
In der XY-Ebene oder XZ-Ebene liegt ein Kräftepaar, das im Punkt Q ein Drehmoment M_b erzeugt. Wie im Fall 2 erfährt das Stabende eine Verschiebung Δ und die Stabachse eine Drehung um den Biegewinkel β.

$$\Delta = M_b \cdot \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot J} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Gl. 6.11}$$

$$\operatorname{tg} \beta = M_b \cdot \frac{l}{E \cdot J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Gl. 6.12}$$

Fall 4.
In der YZ-Ebene liegt ein Kräftepaar, das im Punkt Q ein Drehmoment M_t erzeugt. Bezüglich der Stabachse wird ein solches Moment als Torsionsmoment bezeichnet. Der Stab wird durch ein solches Moment tortiert, das heisst, die Stabachse erfährt eine Drehung um sich selbst ohne dabei ausgelenkt zu werden. Der Torsionswinkel Ψ ist:

$$\Psi = M_t \frac{l}{G \cdot J_t} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Gl. 6.13}$$

In der Gleichung 6.13 steht anstelle des Elastizitätsmoduls E der *Schubmodul* D und anstelle des axialen Flächenträgheitsmomentes J das *Torsionsflächenmoment* J_t. Für rotationssymmetrische Querschnitte (Rundstab und Rohr) ist J_t gleich dem *polaren Flächenträgheitsmoment* J_p.

In der Abb. 6.5 ist noch einmal ein stabförmiges Element dargestellt. Dabei wird angenommen, dass die

Komponente	Belastungsart	Verschiebung in			Drehung um die		
		X-Achse	Y-Achse	Z-Achse	X-Achse	Y-Achse	Z-Achse
F_x'	Zug / Druck	$\Delta_{xx} = F_x' \cdot \frac{l}{A \cdot E}$	—	—	—	—	—
F_y'	Biegung	—	$\Delta_{yy} = F_y' \cdot \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot J_z}$	—	—	—	$\operatorname{tg} \beta_{yz} = F_y' \cdot \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot J_z}$
F_z'	Biegung	—	—	$\Delta_{zz} = F_z' \cdot \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot J_y}$	—	$\operatorname{tg} \beta_{zy} = F_z' \cdot \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot J_y}$	—
M_x'	Torsion	—	—	—	$\Psi_{xx} = M_x' \cdot \frac{l}{G \cdot J_t}$	—	—
M_y'	Biegung	—	—	$\Delta_{yz} = M_y' \cdot \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot J_y}$	—	$\operatorname{tg} \beta_{yy} = M_y' \cdot \frac{l}{E \cdot J_y}$	—
M_z'	Biegung	—	$\Delta_{zy} = M_z' \cdot \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot J_z}$	—	—	—	$\operatorname{tg} \beta_{zz} = M_z' \cdot \frac{l}{E \cdot J_z}$

Tabelle 6.1: Deformationskomponenten bei allgemeiner Belastung eines stabförmigen Elementes.
Bei den Verschiebungen und Drehungen steht der erste Index für die Ursache (F', M') und der zweite Index für die Richtung der Deformation. Mit J_y, J_z sind die Flächenträgheitsmomente der Y und Z-Achse bezeichnet. Der Einfluss der Schubspannungen wurde bei den Biegedeformationen vernachlässigt. Strenggenommen müsste er bei Elementen mit kleinem Schlankheitsgrad berücksichtigt werden.

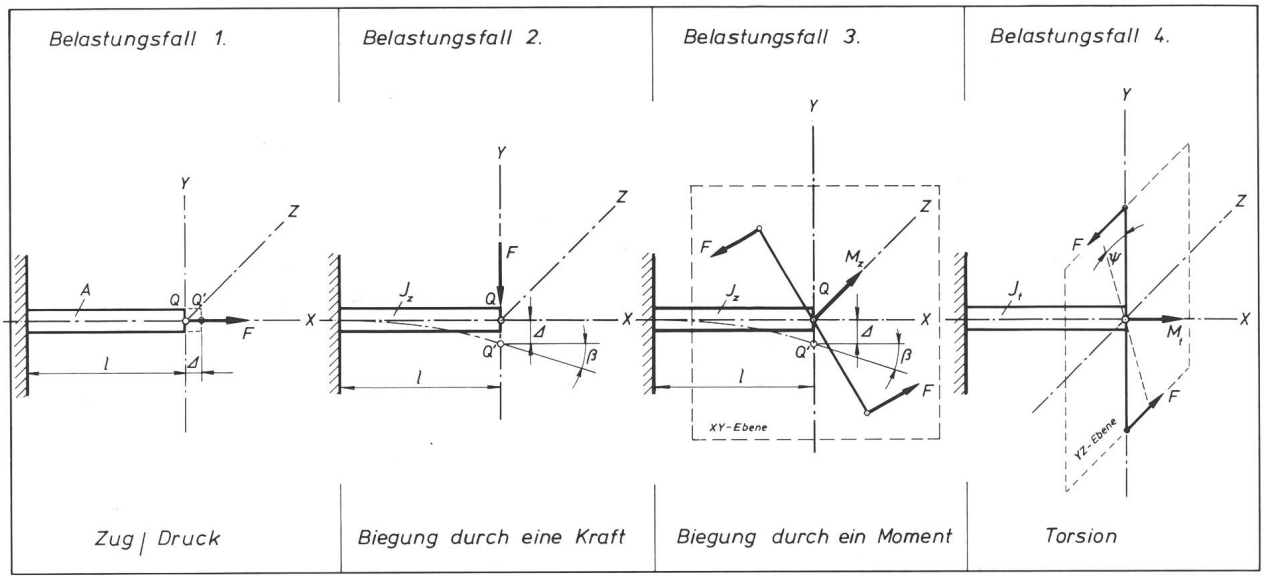

Abb. 6.4: Die 4 elementaren Belastungsfälle eines stabförmigen Elementes.
Der Belastungsfall 3. gilt auch für ein Moment M_y entsprechend einem Kräftepaar in der XZ-Ebene.

Kraft F in der Bildebene des Instrumentes liegt. Hingegen soll das Element bezüglich der Kraft beliebig im Raum orientiert sein. Zwischen dem Punkt P (x, y, z) der Bildebene (Brennpunkt) und dem Endpunkt Q (Schnittpunkt) des Stabes liegen andere Teile der Montierung, die durch den Hebelarm r repräsentiert werden. Die Auslenkung des Punktes P durch die Kraft F und die auf den Punkt P bezogene Steifigkeit c lässt sich in drei Schritten berechnen.

1. Bestimmung des im Punkt Q wirkenden Kraftsystems (F', M')
2. Bestimmung der Auslenkungen (Δ, β) des Punktes Q durch das Kraftsystem (F', M')
3. Transformation der Auslenkungen (Δ, β) von Q nach P.

1. Bestimmung des im Punkt Q wirkenden Kraftsystems

Dazu nimmt man in Punkt Q ein Koordinatensystem an, dessen X-Achse mit der Stabachse zusammenfällt. Der Punkt P hat die Koordinaten x, y, z und der Kraftvektor die Richtungswinkel α_x, α_y, α_z zu den Koordinatenachsen. Die Komponenten F_x, F_y, F_z der Kraft F ergeben sich durch Multiplikation mit dem *Cosinus* des entsprechenden Richtungswinkels α.

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos \alpha_x \\ F_y &= F \cdot \cos \alpha_y \qquad \text{Gl. 6.14} \\ F_z &= F \cdot \cos \alpha_z \end{aligned}$$

Diese Komponenten lassen sich mit dem «Momentensatz» in den Punkt Q transformieren. Im Prinzip verschiebt man dabei die Kraft F parallel von P nach Q und stellt das gestörte Gleichgewicht durch Einführen eines Momentes M' wieder her. Das transformierte Kraftsystem (F', M') hat dann die Kraftkomponenten:

$$F_x' = F_x, \quad F_y' = F_y, \quad F_z' = F_z \qquad \text{Gl. 6.15}$$

und die Momentenkomponenten:

$$\begin{aligned} M_x' &= y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ M_y' &= z \cdot F_x - x \cdot F_z \qquad \text{Gl. 6.16} \\ M_z' &= x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{aligned}$$

2. Bestimmung der Auslenkungen des Punktes Q

Mit den Formeln 6.1 und 6.2 sowie 6.10—6.13 lassen sich für jede Komponente des Kraftsystems die Verschiebungen Δ und die Drehungen β bzw. Ψ bestimmen. Die Auslenkung des Punktes Q ist dann die geometrische Summe (vektorielle Summe) der einzelnen Verschiebungen und die Summe der Drehungen, die in der Tabelle 1 übersichtlich zusammengestellt sind. Man sieht, dass bei allgemeiner Belastung eines stabförmigen Elementes sowohl Verschiebungen in den Achsrichtungen X, Y, Z als auch Drehungen um jede dieser Achsen auftreten.

3. Transformation der Auslenkungen von Q nach P

Die Verschiebungen Δ_x, Δ_y, Δ_z des Punktes Q scheinen in gleicher Grösse im Punkt P auf (Parallelverschiebung). Eine Drehung um eine Achse hat ebenfalls eine Drehung des Punktes P zur Folge. Nach der Kreisgleichung sind die neuen Koordinaten x_β', y_β' des Punktes P bei einer Drehung, z.B. der Z-Achse um den Winkel β:

$$\begin{aligned} x_\beta' &= x \cdot \cos \beta_z \pm y \cdot \sin \beta_z \\ y_\beta' &= y \cdot \cos \beta_z \mp x \cdot \sin \beta_z \end{aligned} \qquad \text{Gl. 6.17}$$

Diese Formeln gelten sinngemäss auch für die anderen Achsen. Die Verschiebungen Δx_β, Δy_β sind dann:

$$\begin{aligned} \Delta x_\beta &= x - x_\beta' = x \cdot (1 - \cos \beta_z) \pm y \cdot \sin \beta_z \\ \Delta y_\beta &= y - y_\beta' = y \cdot (1 - \cos \beta_z) \mp x \cdot \sin \beta_z \end{aligned} \qquad \text{Gl. 6.18}$$

Da bei Teleskopmontierungen nur sehr kleine Verdrehungen an den Teilen auftreten, bzw. auftreten dürfen, kann man für

$$\cos \beta \cong 1, \text{ für } \sin \beta \cong \operatorname{tg} \beta \text{ und für } \sin \Psi \cong \Psi$$

schreiben. Damit ergeben sich für die transformierten Verschiebungen die einfachen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \Delta x_\beta &= \pm y \cdot \operatorname{tg} \beta_z \\ \Delta y_\beta &= \mp x \cdot \operatorname{tg} \beta_z \end{aligned} \qquad \text{Gl. 6.19}$$

in die die Formeln 6.10 und 6.12 bzw. 6.13 eingesetzt werden können. Die durch ein beliebiges Element der Teleskopmontierung in der Bildebene verursachten Aus-

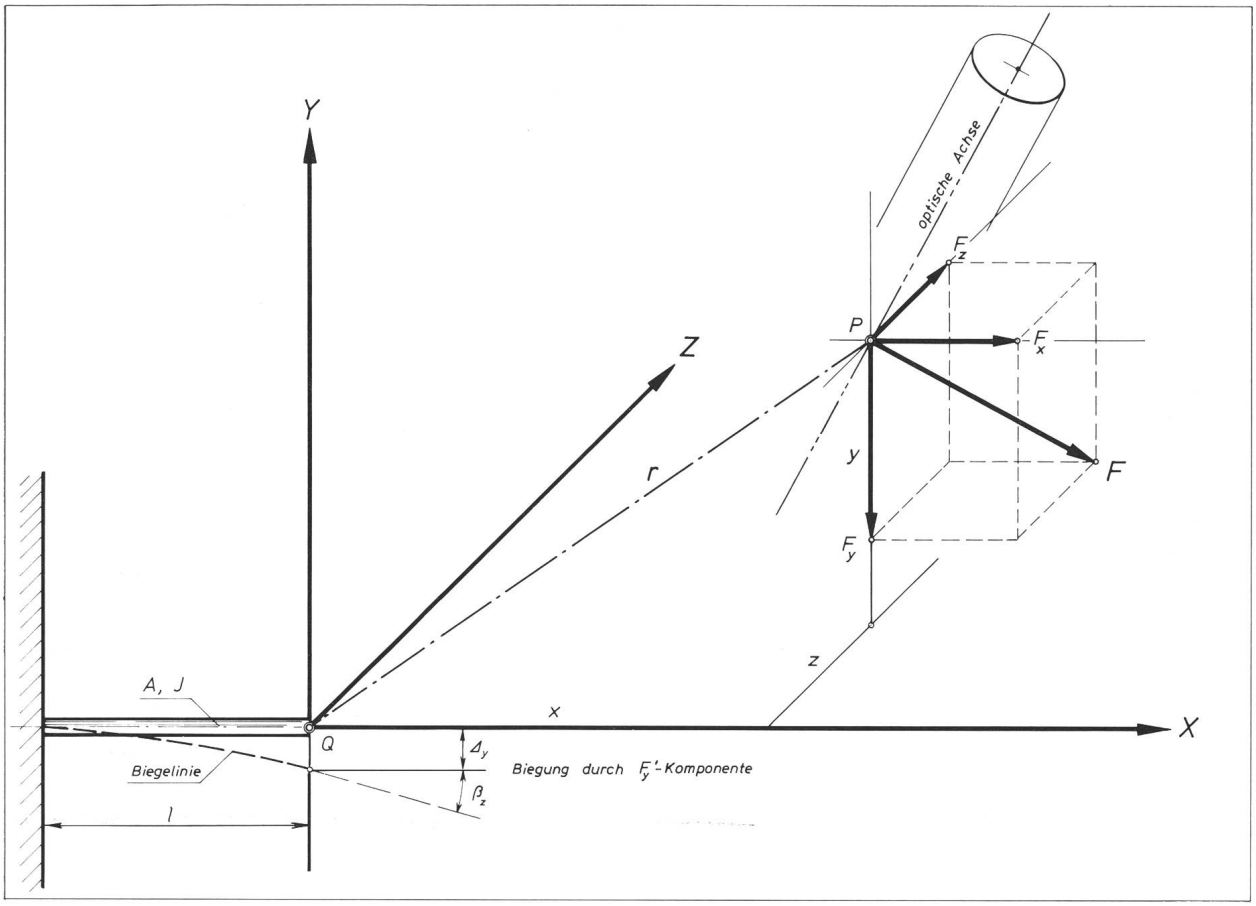

Abb. 6.5: Allgemeine Belastung eines stabförmigen Elementes im Montierungsverband.
Im Brennpunkt P (x, y, z) der Teleskopoptik greift eine Kraft F (Prüfkraft) an, die vereinbarungsgemäss in der Bildebene liegen soll. Zwischen dem Steifigkeitsbezugspunkt P und dem Schnittpunkt Q des Elementes liegen andere Teile, die man sich durch einen starren Hebelarm r ersetzt denken kann. Die Kraftkomponenten F_x, F_y, F_z führen zu elastischen Deformationen des Elementes, bzw. zu Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems X, Y, Z.

lenkungen liegen damit fest. Nach der Definitionsgleichung der Steifigkeit[2])

$$c \cdot \Delta = F$$

ergeben sich daraus die auf die Bildebene bezogenen Steifigkeitskomponenten c_x, c_y, c_z:

$$c_x = \frac{F_x}{\Sigma\Delta x}\ ,\quad c_y = \frac{F_y}{\Sigma\Delta y}\ ,\quad c_z = \frac{F_z}{\Sigma\Delta z}\ \ ..\ \text{Gl. 6.20}$$

6.5 Diskussion des allgemeinen Belastungsfalles

Aus den formalen Betrachtungen des Abschnittes 6.4 lassen sich eine Reihe wichtiger Schlüsse ziehen. Zuerst sieht man, dass die Steifigkeit eines Elementes in einer Struktur sowohl einen *elementspezifischen Aspekt* als auch einen *lagespezifischen Aspekt* hat. Die elementspezifischen Grössen sind:

l	(mm)	Stablänge
A	(mm^2)	Stabquerschnitt
J_y, J_z	(mm^4)	Flächenträgheitsmomente bezüglich der Y und Z-Achse
J_t	(mm^4)	Torsionsflächenmoment (polares Trägheitsmoment ◯, ◎)
E, G	(N/mm^2) . .	Elastizitäts- und Gleitmodul des Werkstoffes

Diese elementspezifischen Grössen sind von der Lage des Teiles im Verband unabhängig. Für die Steifigkeit stehen A, J_y, J_z, J_t, E, G jeweils im Zähler der entsprechenden Formeln. Es sind demnach Grössen, die die Steifigkeit erhöhen und die daher bei der Konstruktion entsprechend gross gemacht werden müssen. Die Stablänge steht dagegen im Nenner. Da sie zudem in den Potenzen l^2 und l^3 auftritt, hat sie einen dominierenden Einfluss auf die Steifigkeit. Wie schon im Abschnitt 6.3 anhand des Schlankheitsgrades λ gezeigt wurde, ist beim Gestalten der Teile von Teleskopmontierungen allergrösstes Augenmerk auf kurze Längen zu richten.

Die lagespezifischen Grössen sind die Koordinaten x, y, z, die den Abstand des Teiles vom Bezugspunkt, der Bildebene, festlegen. Wie die Stablänge stehen auch diese Abstände im Nenner, wobei die Kombinationsprodukte x·y, x·z, y·z und die Quadrate x^2, y^2, z^2 auftreten. Daraus ist ersichtlich, dass die Lage eines Teiles in einer Struktur einen grossen Einfluss auf die Steifigkeit hat. Mit grösserwerdenden Abstandskoordinaten fällt die Steifigkeit ein und desselben Teiles rapide ab. So mag z.B. die elementspezifische Steifigkeit einer M8-Schraube am Rohrsattel für ein gegebenes Instrument vollauf genügen, als Justierschraube oder Befestigungselement am Säulenfuss wird sie sich gravierend auf die Steifigkeit der Montierung auswirken. Dieser Sachverhalt zwingt uns die Montierung möglichst gedrungen und kompakt zu konzipieren. Bei Teilen, die

gezwungenermassen grössere Abstände von der Bildebene besitzen, lässt sich eine genügende Steifigkeit im Verband nur durch entsprechende Dimensionierung der elementspezifischen Grössen, etwa der *Flächenträgheitsmomente,* realisieren. Wie die Erfahrung zeigt, wird dem lagespezifischen Aspekt der Steifigkeit bei Amateurmontierungen in der Regel zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Daraus resultiert eine ungenügende Steifigkeit vieler Instrumente.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes lassen sich in folgenden Merksätzen zusammenfassen:

6. **Die Steifigkeit eines Teiles in einer Struktur wird durch elementspezifische und durch lagespezifische Konstruktionsgrössen bestimmt. Die dominanten elementspezifischen Grössen sind die Längedimensionen der Teile und ihre Flächenträgheitsmomente, sowie der Elastizitätsmodul als elastische Werkstoffeigenschaft.**
7. **Die Steifigkeit eines Teiles wird durch Vergrössern seiner Flächenträgheitsmomente vergrössert. Mit grösserwerdenden Abstandskoordinaten und Längen sinkt die Steifigkeit rapide ab, da diese Grössen in der zweiten und dritten Potenz unter dem Bruchstrich in die Steifigkeitsformeln eingehen.**

Aus diesem Grund gilt als oberstes Gebot des Montierungsbaues:

8. **Bei der Konstruktion sind möglichst kurze Längen, das heisst eine gedrungene und kompakte Ausführung der Teile und der Montierung gesamthaft, anzustreben.**

1) siehe ORION No. 172 (1979).
2) siehe ORION No. 164 (1978).

Zugezogene Literatur:
I. SZABO: Einführung in die Technische Mechanik.
I. SZABO: Höhere Technische Mechanik, beide im Springerverlag: Berlin / Göttingen / Heidelberg.
HOLZMANN/MEYER/SCHUMPICH: Technische Mechanik, Band 3 Festigkeitslehre, Verlag B. G. Teuber: Stuttgart.

Zuschriften an den Verfasser:
H.G. ZIEGLER, Hertensteinstrasse 23, CH-5415 Nussbaumen.

Gesucht: Jugendberater

Zur Betreuung der Jungmitglieder sucht der Zentralvorstand einen initiativen Amateurastronomen. Wer Interesse hat, sich für die Belange der Jungmitglieder in der SAG einzusetzen, melde sich bitte bei:

Werner Lüthi, Techn. Leiter SAG, Lorraine 12 D/16, 3400 Burgdorf

Astro-Bilderdienst der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft

NEUE DIAS

NASA-ZEISS-DIAS:

zu den Serien 1—10 und 13—19 sind ab sofort neu lieferbar:
Serie 21 Viking auf dem Mars
Serie 22 Merkur, Venus und Jupiter
Serie 23 Space-Shuttle

Arbeitsgemeinschaft Astrofotografie

zu den Dias 1—21 sind ab sofort neu lieferbar:
Nr. 26 Cirrusnebel NGC 6992—5 (Schwan)
Nr. 27 Kokon-Nebel IC 5146 (Schwan)
Nr. 32 Cirrusnebel NGC 6960 (Schwan)
Nr. 33 Milchstrasse um Sternbild «Kreuz des Südens»

Zusätzlich sind drei Diasätze mit je 10 plasticgerahmten AGAF-Dias erhältlich: (Fr. 29.— pro Satz)
Serie 1: Dias Nr. 1, 4, 5, 8, 9, 13, 15, 17, 18, und 21
Serie 2: Dias Nr. 7,12,14,23,25,26,27,31,33 und 34
Serie 3: Dias Nr. 2,3,6,10,11,16,17,19,20 und 29

Verlangen Sie bitte Katalog, Nachtrag und Bestellscheine/Preislisten bei

Astro-Bilderdienst SAG, Meieriedstrasse 28 B, CH-3400 Burgdorf

NOUVEAUTÉS

DIAS NASA-ZEISS:

en plus des séries 1—10 et 13—19, les nouvelles séries sont livrables immédiatement:
série 21 Viking sur Mars
série 22 Mercure, Vénus et Jupiter
série 23 Space-Shuttle

Communauté de travail astrophotographique (AGAF)

en plus des dias 1—21, les nouvelles dias suivantes sont livrables immédiatement:
no. 26 Nébuleuse filamenteuse NGC 6992—5 (Cygne)
no. 27 Nébuleuse en cocon IC 5146 (Cygne)
no. 32 Nébuleuse filamenteuse NGC 6960 (Cygne)
no. 33 La Voie lactée aux environs de la «Croix-du-Sud»

De plus sont livrables 3 jeux de dias contenant chacun 10 dias AGAF à cadre plastique: (Fr. 29.— par jeux)
série 1: dias no. 1, 4, 5, 8, 9, 13, 15, 17, 18 et 21
série 2: dias no. 7,12,14,23,25,26,27,31,33 et 34
série 3: dias no. 2,3,6,10,11,16,17,19,20 et 29

Catalogue, supplément et bulletin de commande/liste de prix sont à commander à l'adresse suivante:

Service de Photographies SAS, Meieriedstrasse 28 B, CH-3400 Burgdorf

Service de photographies de la Société Astronomique de Suisse