Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft

Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft

Band: 36 (1978)

Heft: 168

Artikel: Astro- und Instrumententechnik : 5. Kapitel : "Das Steifigkeits-Additionsgesetz" (Teil I)

Autor: Ziegler, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-899501

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

5. Kapitel: «Das Steifigkeits-Additionsgesetz» (Teil I)

von Ing. H. ZIEGLER

5.1 Vorbemerkungen zum Steifigkeits-Additionsgesetz
Im 4. Kapitel wurde gezeigt wie an einer Teleskopmontierung die Systemsteifigkeit c_S gemessen wird, und dass diese Messung auch vom Amateur durchgeführt werden kann, da dafür keine Messapparaturen benötigt werden. In diesem Kapitel wird das *Steifigkeits-Additionsgesetz* behandelt. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen den individuellen Steifigkeiten der Elemente und der Systemsteifigkeit der Struktur. Die Frage nach diesem Zusammenhang stellt sich bereits bei der Messung der Steifigkeit, wenn man die Messergebnisse zu interpretieren versucht. In einem weiteren Schritt sollen dann die Zusammenhänge zwischen der Steifigkeit eines Teiles und seinen Konstruktionsparametern diskutiert werden. Die Systematik, nach der bisher vorgegangen wurde und nach der nun weitergefahren werden soll, ist durch das folgende Schema gegeben:

1. zeigen, dass für Teleskopmontierungen statische, kinetische und kinematische Aspekte relevant sind (2. Kapitel),

2. postulieren von drei Grundkriterien entsprechend den statischen, kinetischen und kinematischen Aspekten und den Anforderungen, die sich aus der Anwendung des Instrumentes ergeben (3. Kapitel),

3. jedem Grundkriterium eine definierte und messbare Basisgrösse zuordnen (Steifigkeit, mechanische Impedanz, kinematischer Fehler),

4. zeigen, wie die Statik, das Schwingungsverhalten und die Kinematik durch je ein fundamentales Strukturgesetz bestimmt werden (Steifigkeits-Additionsgesetz, Vierpolgleichungen, Fehlerfortpflanzungsgesetz),

5. aufzeigen der Zusammenhänge zwischen der jeweils für einen Aspekt relevanten Basisgrösse (Steifigkeit) und den Konstruktionsparametern wie Abmessungen, geometrische Form, Werkstoffeigenschaften usw.

Nach diesem Schema ist das *Steifigkeits-Additionsgesetz* das *Strukturgesetz,* das die *elastomechanischen Eigenschaften* der Einzelteile wie Achsen, Lager, Säule usw. mit jenen des fertigen Instrumentes verbindet. Es ist ein für die Konstruktion von Teleskopmontierungen wichtiges Gesetz mit Aspekten, die kaum bekannt sind und die in der Regel bei Amateurinstrumenten zu wenig berücksichtigt werden. Für den am Instrumentenbau, nicht jedoch an Theorie und Formeln interessierten Leser werden die Konsequenzen dieses wichtigen Gesetzes in einigen einfachen «Merksätzen» zusammengefasst.

5.2 Die Steifigkeit einer Kettenstruktur
Der Steifigkeitstensor lässt sich in allgemeiner Form durch eine kubische Matrix, das heisst durch 3 x 3 x 3 Zahlenwerte, darstellen. In dieser Matrix werden auch die Randwerte berücksichtigt. Die Addition von Steifigkeiten läuft daher auf die einfache Addition von Matrizen hinaus. Es soll hier jedoch gezeigt werden, dass das Steifigkeits-Additionsgesetz auch auf elementare und anschauliche Weise abgeleitet werden kann.

Für die weiteren Betrachtungen ist der Begriff der Kette wichtig. Unter einer Kette versteht man eine Struktur, bei der die Elemente (Einzelteile) in Serie, das heisst hintereinander, angeordnet sind. Eine äussere Kraft, die auf ein Element einwirkt, pflanzt sich als innerer Spannungszustand durch dieses Glied fort, tritt über eine Verbindungsstelle in das nächste Glied über usw., bis sie vom letzten Glied auf einen Festpunkt übertragen wird. Eine Teleskopmontierung ist ein typisches Beispiel für eine Kettenstruktur. Die wichtigsten Elemente (Hauptteile) in dieser uns besonders interessierenden Kette sind:

Rohr — Rohrsattel — Deklinationsachse — Deklinationsachslager — Lagergehäuse der Deklinationsachse — Polachse — Polachslager — Lagergehäuse der Polachse — Zwischenteil — Säule (Stativ) — Säulenbasis — Justierschrauben (Fundamentschrauben) — Fundament.

Die am Rohr angreifenden Kräfte durchlaufen diese Kette bis sie vom Fundament aufgenommen werden. In der Regel werden mindestens einige dieser aufgezählten Hauptteile aus mehreren Einzelteilen (Subelementen) zusammengefügt sein, so dass die Kette wesentlich mehr als nur 12 Glieder besitzen wird. Elemente lassen sich aber auch aus berechnungstechnischen Gründen in Abschnitte aufgliedern, die für sich kein eigenständiges Element sind. So kann z. B. die Deklinationsachse in einen Wellenabschnitt Achsflansch—Hauptlager, in einen Wellenabschnitt zwischen den beiden Lagern und in einen Wellenabschnitt Gegenlager—Ausgleichsgewicht unterteilt werden. Auf diese Weise erhält man geometrisch einfache Teilelemente, deren Steifigkeiten sich in der Regel ohne allzu grossen Aufwand berechnen lassen. Die Unterteilung eines Teiles in immer kleinere Elemente kann sogar soweit getrieben werden, dass man sich diesen aus einer sehr grossen Anzahl gleichgeformter kleiner Bausteine, z. B. Tetraeder, aufgebaut denkt. Mit solchen Kleinelementen operiert das unter dem Namen *«Finite Elemente Methode»* bekannte Rechenverfahren, mit dem sich verschiedene Aspekte kompliziert geformter Teile wie Spannungsverteilungen oder die Steifigkeit berechnen lassen.

Das Gegenteil von einer *Kettenstruktur* ist eine *Parallelstruktur.* Ein Beispiel dafür wäre ein Stuhl, bei dem die Last gleich verteilt über die 4 Beine auf den Boden übertragen wird. Solche Parallelstrukturen sind jedoch

für Teleskopmontierungen weniger interessant. Das Additionsgesetz soll nun am Beispiel von hintereinander angeordneten Drehfedern und am Beispiel einer auskragenden Welle gezeigt werden.

Beispiel 1. In Serie angeordnete Drehfedern nach Abb. 5.1

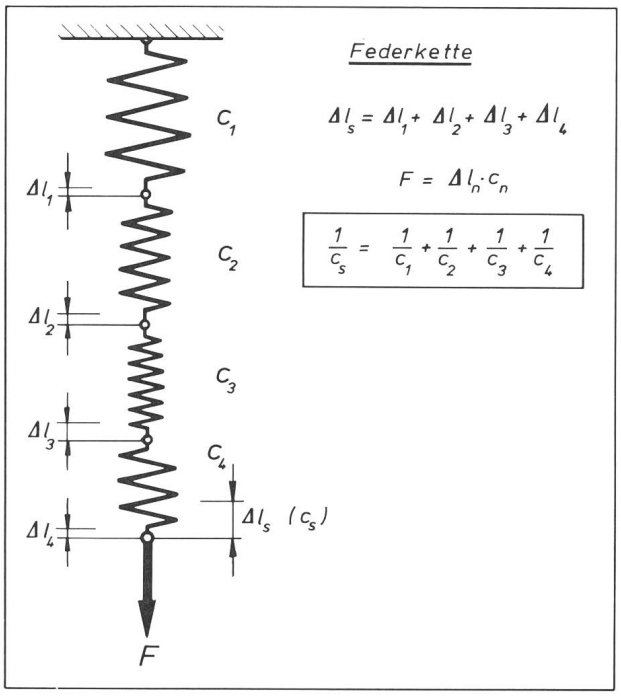


Abb. 5.1. Steifigkeit einer Federkette.
Die Federkette ist ein elementares Beispiel für das Steifigkeits-Additionsgesetz.

Auf die Federn mit den Federsteifigkeiten c_1, c_2, c_3, c_4 *wirkt eine Kraft F ein, die sich durch die Federkette fortpflanzt, jede Feder nach dem Federgesetz (Hookesches Gesetz)* $F = c \cdot \Delta l$ *dehnt und schliesslich vom Fesselpunkt aufgenommen wird. Die Gesamtdehnung* Δl_S *ist:*

$$\Delta l_S = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 \quad \ldots\ldots\ldots \text{Gl. 5.1}$$

Drückt man die Δl *durch das Federgesetz aus, dann erhält man*

$$\Delta l_S = \frac{F}{c_S} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} + \frac{F}{c_3} + \frac{F}{c_4} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{c_S} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \quad \ldots\ldots \text{Gl. 5.2}$$

damit ist das Steifigkeits-Additionsgesetz für eine Federkette abgeleitet.

Betrachtet man diese Formel, dann drängt sich eine Analogie zu elektrischen Netzwerken auf. Es ist ersichtlich, dass das elektrische Aequivalent der *mechanischen Steifigkeit* der *elektrische Leitwert* $\frac{1}{R}$ ist. Auf diese wichtige Analogie werden wir noch bei den Teleskopschwingungen zu sprechen kommen. Mit dem nächsten Beispiel soll gezeigt werden, dass das $\frac{1}{c}$ *-Gesetz* auch für eine biegebelastete Welle gilt. Dazu wurde eine Anordnung gewählt, die üblicherweise bei den Achsen der *Deutschen Montierung* anzutreffen ist; eine in zwei Punkten gelagerte Welle, die am *auskragenden* Ende die Last aufnimmt. Dieses dem Montierungsbau entnommene Beispiel wird zudem zeigen, dass auch bei einer in zwei Punkten gelagerten Welle eine reine Kette vorliegt und nicht eine Parallelstruktur, wie zu vermuten wäre. Damit dieses Beispiel möglichst praxisnah ausfällt soll ausserdem der Kraftangriffs- und Bezugspunkt der Systemsteifigkeit nicht auf der Welle, sondern ausserhalb dieser in einem Schwerpunkt S angenommen werden.

Beispiel 2. Steifigkeit einer auskragenden Welle nach Abb. 5.2
Dieser Belastungsfall lässt sich sehr einfach mit der Schnittmethode *lösen. Dazu denkt man sich die Welle im Punkt B geschnitten und führt an den Schnittstellen die* Reaktionskräfte *und* Reaktionsmomente *ein, so dass die* freigemachten *Teile im Gleichgewicht sind und getrennt betrachtet werden können. Man erhält so die mittlere Wellenpartie, die in den Lagerpunkten A und B abgestützt und durch ein Moment* $M = F_S \cdot s$ *belastet wird, und den in B eingespannten, auskragenden Wellenstummel mit der reduzierten Kraft* F_D *. Für diese elementaren Belastungsfälle einer Welle lassen sich die Biegeformeln leicht ableiten, oder können aus technischen Handbüchern*[1] *entnommen werden. Da die Steifigkeiten auf den Schwerpunkt S zu beziehen sind, ist es zweckmässig beim Wellenmittelteil mit dem Biegewinkel* β_1, *beim auskragenden Wellenstummel hingegen mit der Durchbiegung* Δx_2 *zu rechnen. Durch den sich durchbiegenden Mittelteil wird der auskragende Wellenstummel gekippt und zu dieser Kippung addiert sich seine eigene Durchbiegung* $\Delta x'_2$. *Die Auslenkung des Schwerpunktes ist daher:*

$$\Delta x_S = \Delta x_1' + \Delta x_2' = s \cdot \mathrm{tg}\beta_1 + \frac{s}{a} \cdot \Delta x_2 \quad \ldots \text{Gl. 5.7}$$

und mit den Biegeformeln der beiden Wellenabschnitte wird

$$\Delta x_S = F_S \cdot \left[\frac{s^2 \cdot l}{3 \cdot E \cdot J_{AB}} + \frac{s^2 \cdot a}{3 \cdot E \cdot J_{BD}} \right] \quad \ldots \text{Gl. 5.8}$$

Nach Division durch F und Umstellung des Bruches ergibt sich für die Steifigkeit einer solchen Welle

$$\frac{\Delta x_S}{F_S} = \frac{1}{c_S} = \frac{1}{\frac{3 \cdot E \cdot J_{AB}}{s^2 \cdot l}} + \frac{1}{\frac{3 \cdot E \cdot J_{BD}}{s^2 \cdot a}} \quad \ldots \text{Gl. 5.9}$$

Die im Nenner stehenden Ausdrücke sind die auf den Schwerpunkt S bezogenen Biegesteifigkeiten der beiden Wellenabschnitte. In den Formeln steht E für den Elastizitätsmodul des Werkstoffes (für Stahl ist $E = 206 \cdot 10^3$ N/mm^2*) und mit J ist das Flächenträgheitsmoment der Querschnittflächen der Welle bezeichnet. Das Flächenträgheitsmoment einer Welle vom Durchmesser D ist*

$$J_0 = D^4 \cdot \frac{\pi}{64} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Gl. 5.10}$$

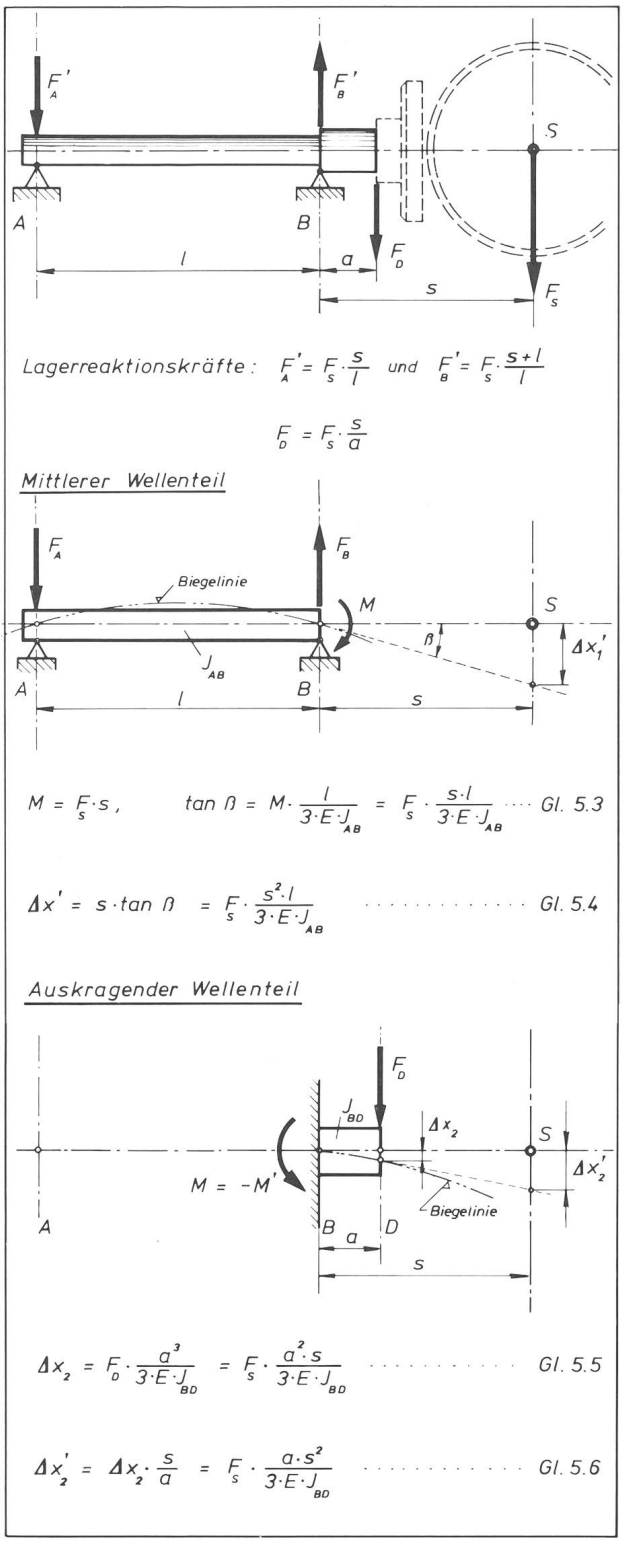


Abb. 5.2. Steifigkeit einer auskragenden Welle

Zur Durchbiegung Δx im Bezugspunkt S tragen sowohl der mittlere Wellenteil als auch der auskragende Teil bei. Diese Beiträge ($\Delta x_1'$, $\Delta x_2'$) lassen sich nach der Schnittmethode für die einzelnen Wellenabschnitte getrennt berechnen und summieren. Dabei wird ersichtlich, dass sich auch bei der Biegebelastung die Gesamtsteifigkeit nach dem $\frac{1}{c}$-Gesetz aus den Einzelsteifigkeiten der Wellenabschnitte errechnet.

Damit ist gezeigt, dass das $\frac{1}{c}$-*Gesetz* auch für eine biegebelastete Welle und für einen beliebig wählbaren Bezugspunkt S gilt. Man achte in der Gl. 5.9 auf die Ausdrücke $s^2 \cdot l$ und $s^2 \cdot a$, die für die Steifigkeit einer Teleskopachse wichtig sind. Es ist ersichtlich, dass diese Längen bei der Konstruktion einer Montierung kurz gemacht werden müssen. Ausserdem widerlegen sie die weit verbreitete Ansicht, dass die Lagerstellen A—B einer Welle weit auseinander liegen müssen. Bei gegebener Steifigkeit der Lager lässt sich ein optimaler Lagerabstand l anhand der Steifigkeitsformeln berechnen.

Die Gl. 5.9 kann ohne weiteres durch weitere $\frac{1}{\ldots}$-Glieder ergänzt werden, die die Steifigkeiten des Wellenflansches und der zwischen Flansch und Schwerpunkt liegenden Teile erfassen. Ausserdem liesse sich mit den gleichen Biegeformeln der Einfluss des Ausgleichsgewichtes an der Deklinationsachse auf die Steifigkeit im Punkt S erfassen.

Anhand dieser Beispiele lässt sich das *Steifigkeits-Additionsgesetz* für eine Kette angeben. Es lautet:

$$\frac{1}{c_S} = \frac{1}{c_{1k}} + \frac{1}{c_{2k}} + \frac{1}{c_{3k}} + \ldots + \frac{1}{c_{nk}} \quad \text{.. Gl. 5.11}$$

Zu dieser Formel sind Anmerkungen nötig, die sich bei exakter Darstellung durch Matrizen erübrigen würden.

1. Die Steifigkeiten c_{kn} der einzelnen Elemente müssen sich auf ein und denselben Belastungszustand der Struktur beziehen. Dies wird durch den Index k angedeutet.
2. Die Steifigkeiten der einzelnen Elemente müssen auf ein und denselben Punkt, in unserem Fall die *Bildebene,* bezogen werden.
3. Die Gl. 5.11 ist nur gültig, wenn die *Quersteifigkeiten* vernachlässigt werden können.

Die beiden ersten Punkte wurden bereits in den vorangegangenen Kapiteln behandelt und die Bedingung der vernachlässigbaren Querstiefigkeiten ist in der Regel bei Teleskopmontierungen erfüllt.

Ein interessantes Beispiel für ein Element bei dem der Punkt 3 nicht erfüllt ist, ist ein Gleitlager. Die Querverschiebung einer auf einem Schmierfilm «schwimmenden» Welle ist von der Viskosität des Schmiermittels abhängig. Mit anderen Worten, die Auslenkung Δz ist vom Widerstand abhängig den das Schmiermittel dem seitlichen «Herausgequetschtwerden» entgegensetzt. Dieser Widerstand ist nichts anderes als die *Quersteifigkeit* in den Koordinatenrichtungen x und y. In diesem Fall müssen in der Streifigkeitsmatrix die Glieder c_{xz} und c_{yz} berücksichtigt werden. Ein ähnlicher Fall wäre gegeben, wenn durch die Belastung ein Teil ausknicken würde. Dies kommt jedoch bei Teleskopmontierungen mit Sicherheit nie vor.

Welche Konsequenzen ergeben sich aus dem Steifigkeits-Additionsgesetz? Diese lassen sich anschaulich anhand von Zahlenbeispielen zeigen[2].

[1]) *Eine Zusammenstellung der Biegeformeln für den Balken bei verschiedenen Belastungsfällen findet man z.B. in: «Die Hütte».*

«Die Hütte», (Physikhütte Band 1), Des Ingenieurs Taschenbuch (29. Auflage). Berlin/München/Düsseldorf: Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.

[2]) *Die Zahlenbeispiele werden im Abschnitt 5.3 im Teil II diese Kapitels im ORION 168 behandelt.*

Zugezogene Literatur:
Physikhütte Band I, Handbuch des Ingenieurs (29. Auflage) siehe oben.

Holzmann/Meyer/Schumpich, Technische Mechanik Band III, Festigkeitslehre. Stuttgart: B.G. Teubner 1975.

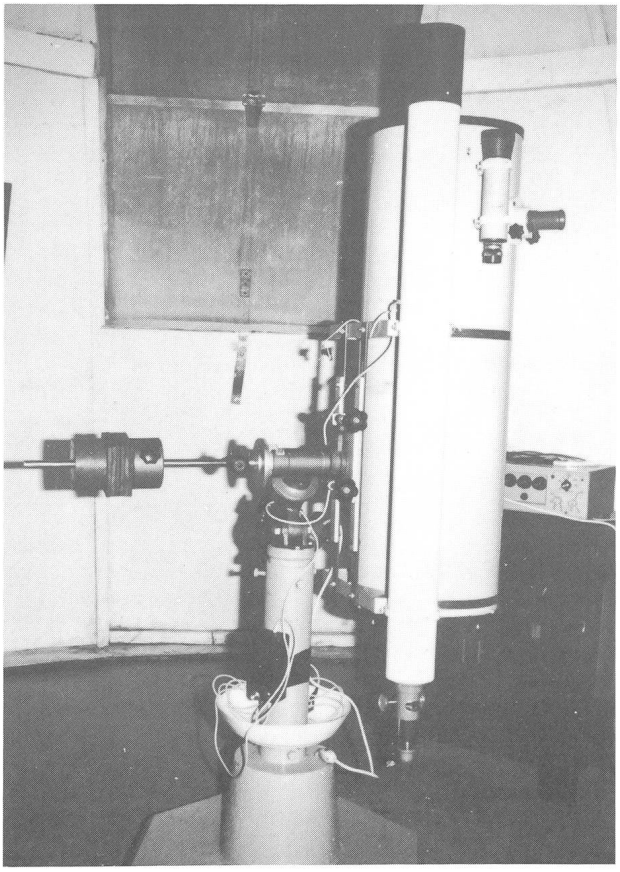
Pittroff, H., E. Giebner, Auslegung von Werkzeugmaschinenspindeln. Maschinenmarkt Jg. 76 (1970), Nr. 74, S. 1675—1679.

Wallin, H.H., Axiale Steifigkeit von Werkzeugmaschinenspindeln. Kugellager-Zeitschrift, Heft 183, S. 1—7.

Zuschriften an den Verfasser:
Ing. H. ZIEGLER, Hartensteinstrasse 23, CH-5415 Nussbaumen

Ein 25-cm-Reflektor aus Amerika

Die astronomische Arbeitsgemeinschaft Geseke/Warstein arbeitete bisher mit einem 15cm Reflector und einem 9cm Refractor. Da in der AG die Astrofotografie immer mehr Vorrang gewann, beschlossen wir gemeinsam, ein lichtstärkeres Teleskop anzuschaffen. Das neue Teleskop sollte etwa eine Brennweite von 0,8—1 m und mindestens ein Öffnungsverhältnis von 1:4 haben. So einigten wir uns schliesslich auf einen 25cm-Spiegel.

Kostenvoranschläge, die wir innerhalb von Europa einholten, schienen uns zu hoch. Deshalb setzten wir uns mit einer amerikanischen Firma, die in «Sky and Teleskop» inserierte, brieflich in Verbindung. Nach ca. 4 Wochen bekamen wir von dieser Firma einen ausführlichen Prospekt zugeschickt, in dem ein Spiegel mit 25cm Durchmesser und einer Brennweite von 1m für 156 Dollar angeboten wurde. Obwohl dieser Spiegel nur 1/8 Wellenlänge besass, war es für ein Öffnungsverhältnis von 1:4 immer noch ein relativ guter Wert. Ausserdem bot uns die Firma einen dazu passenden Fangspiegel zum Preis von 30 Dollar an.

Im November 1977 bestellten wir diese beiden Teile von der amerikanischen Firma. Ende November erreichte uns die Rechnung über 186 Dollar. Da der Rechnungsbetrag in Dollar an die Firma überwiesen werden musste, liessen wir dieses im Dezember 1977 von einer Bank erledigen. Die amerikanische Firma bestätigte uns Ende Dezember den Erhalt des Geldes und teilte uns mit, dass die Optik in ca. 8—10 Wochen an uns geliefert würde.