des 20. Jahrhunderts objektiv gewertet werden, wird man der Forschungsarbeit von Stephen Hawking einen hervorragenden Platz in den Annalen der Naturwissenschaften zuerkennen. Seine bemerkenswerten Leistungen sind denen der grössten Physiker der Vergangenheit gleichzustellen, weil er ein Bindeglied zwischen Quantentheorie und Gravitationstheorie schuf.

Er hat einen so grossen Schritt wie Michael Faraday getan, der Elektrizität und Magnetismus miteinander in Verbindung brachte — oder wie Einstein, der eine Beziehung zwischen Energie und Masse feststellte — oder wie Dirac, der die spezielle Relativitätstheorie und die Quantenmechanik miteinander verband. Hawking hat gezeigt, wie die Welt der Mikrophysik, in der die Gesetze der Quantentheorie herrschen, und die Struktur des Universums im grossen, in der die Gesetze der Gravitationstheorie herrschen, zueinander in Beziehung stehen.

Seine Suche nach einer zusammengefassten Theorie — einer Quantentheorie der Gravitation — wird die Art und Weise aufzeigen, in der die Natur den unendlichen Kollaps von Materie bis zu einem singulären Raum-Zeit-Punkt aufzuhalten vermag — denn sicherlich muss es innerhalb der schwarzen Löcher ein System und eine Wechselwirkung geben, die einen unaufhaltsamen Kollaps bis zum absoluten Nichts verhüten.

(BF), Dr. SIMON MITTON, Astron. Institut, Uni Cambridge, England

---

Ableitung der parabolischen Keplerbewegung aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz

von F. SPIRIG

Der interessante Artikel von Herrn GUBSER im ORION 166 hat mich dazu angeregt, mich wieder einmal mit dem Keplerproblem zu beschäftigen. Dabei ist die vorliegende Notiz entstanden, welche vielleicht bei dem einen oder andern ORION-Leser auf Interesse stösst, dem die einfachsten Regeln der Differential- und Integralrechnung vertraut sind. Im folgenden versuche ich auf möglichst elementarem Weg, die Bewegung eines Himmelskörpers, etwa eines Kometen, aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz herzuleiten. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf den parabolischen Fall.

Wählt man ein kartesisches Koordinatensystem, in dessen Ursprung sich die Sonne befindet, so lässt sich der Ort des Kometen relativ zur Sonne durch die Koordinaten (x, y, z) beschreiben. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gilt dann

$$\ddot{x} = -k^2 \frac{x}{r^3} \qquad (1.1)$$

$$\ddot{y} = -k^2 \frac{y}{r^3} \qquad (1.2)$$

$$\ddot{z} = -k^2 \frac{z}{r^3} \qquad (1.3)$$

Dabei ist r gleich der Distanz Sonne—Komet, also $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, und $^{\bullet}$ bezeichnet die Ableitung nach der Zeit t, also etwa

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \text{ und } \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Multipliziert man Gleichung (1.3) mit y, Gleichung (1.2) mit — z und zählt die so erhaltenen Gleichungen zusammen, so bekommt man

$$y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0 \text{ oder } (y\dot{z} - z\dot{y})^{\cdot} = 0.$$

Es muss also eine Konstante A geben, so dass

$$y\dot{z} - z\dot{y} = A. \qquad (2.1)$$

Analog schliesst man, dass es Konstanten B und C gibt, so dass

$$z\dot{x} - x\dot{z} = B, \qquad (2.2)$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C. \qquad (2.3)$$

Der Vektor $(y\dot{z} - z\dot{y},\ z\dot{x} - x\dot{z},\ x\dot{y} - y\dot{x})$ heisst *Drehimpuls*. Die Gleichungen (2) drücken somit die Erhaltung des Drehimpulses aus. Setzt man für A, B und C die entsprechenden Ausdrücke aus (2) ein, so folgt sofort

$$Ax + By + Cz = 0. \qquad (3)$$

Das heisst aber nichts anderes, als dass sich der Komet in einer *Ebene* bewegen muss. Denkt man sich das Koordinatensystem von Anfang an so gelegt, dass die Bahnebene des Kometen mit der x-y-Ebene zusammenfällt, so ist $z \equiv 0$, und als interessante Gleichungen bleiben nur noch (1.1), (1.2) mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und (2.3) übrig. Wegen (1.1) und (1.2) gilt nun weiter

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = -k^2 \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\text{oder } \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\cdot} = \left(\frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^{\cdot}.$$

Es muss also eine Konstante h geben, so dass

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = h + \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{4}$$

Gleichung (4) beinhaltet den *Energiesatz:*

kinetische Energie $\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ + potentielle Energie

$$-\frac{k^2}{r} = \text{totale Energie } h.$$

Die *parabolische* Bewegung ist dadurch ausgezeichnet, dass $h = 0$ ist. Führt man nun Polarkoordinaten $x = r\cos v$, $y = r\sin v$ ein, so lauten (2.3) und (4) für $h = 0$:

$$r^2\dot{v} = C, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2) = \frac{k^2}{r}. \tag{6}$$

Gleichung (5) drückt übrigens die Konstanz der Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}r^2\dot{v}$, dh. das 2. Keplersche Gesetz aus: da C konstant ist, ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot{v}$ des Kometen umso grösser, je kleiner sein Abstand r von der Sonne ist, und umgekehrt ist $\dot{v}$ umso kleiner, je grösser r ist. Um die Polargleichung der Kometenbahn zu erhalten, muss man versuchen, r als Funktion von v aus (5) und (6) zu gewinnen. Dazu löst man zunächst (5) und (6) nach $\dot{v}$ bzw. $\dot{r}$ auf:

$$\dot{v} = \frac{C}{r^2}, \tag{7}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2k^2}{r} - r^2\dot{v}^2} \text{ oder } \dot{r} = \sqrt{\frac{2k^2}{r} - \frac{C^2}{r^2}}. \tag{8}$$

Nun gilt weiter

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dv}\frac{dv}{dt} \text{ oder } \dot{r} = r'\dot{v}, \tag{9}$$

wobei jetzt ' die Ableitung nach v bezeichnet. Setzt man schliesslich (7) und (8) in (9) ein, so folgt nach kurzer Rechnung

$$\frac{r'}{r\sqrt{\frac{r}{q} - 1}} = 1, \text{ wobei } q = \frac{C^2}{2k^2}. \tag{10}$$

Führt man die Hilfsvariable $w = \sqrt{\frac{r}{q} - 1}$ ein, so lässt sich (10) schreiben als

$$\frac{w'}{1+w^2} = \frac{1}{2} \text{ oder } (\text{arc tg } w)' = \left(\frac{v}{2}\right)'.$$

Also gilt

$$\text{arc tg } w = \frac{v}{2} \text{ oder } w = \text{tg}\frac{v}{2}.$$

Für r erhält man endlich die Polargleichung der Parabel

$$r = q(1 + w^2) = q(1 + \text{tg}^2\frac{v}{2}). \tag{11}$$

Um den zeitlichen Verlauf der Kometenbewegung zu bestimmen, setzt man (11) in (5) ein:

$$(1 + w^2)^2\dot{v} = k\sqrt{\frac{2}{q^3}}.$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$\dot{w} = (\text{tg}\frac{v}{2})^{\cdot} = (1 + w^2)\frac{\dot{v}}{2},$$

so folgt

$$(1 + w^2)\dot{w} = \frac{k}{\sqrt{2q^3}}.$$

Also muss gelten

$$w + \frac{w^3}{3} = \frac{k}{\sqrt{2q^3}}(t - T), \text{ wobei } w = \text{tg}\frac{v}{2} \tag{12}$$

und T eine Integrationskonstante ist.

Es bleibt nur noch festzustellen, dass (11) und (12) mit den Formeln (14) und (12) des eingangs erwähnten Artikels übereinstimmen.

Adresse des Verfassers:
FRANZ SPIRIG, Wilenstrasse 10, CH-9400 Rorschacherberg.

Meteoritenfund in der Antarktis

Wissenschaftler der NASA und der «Smithsonian Institution» haben bestätigt, dass die im Winter 1977 in der Antarktis gefundenen Meteoriten zu dem sehr seltenen Typus der Kohlenstoff-Chondrite (Meteorit mit sehr hohem Kohlenstoffgehalt) gehören. Der Meteorit wurde zusammen mit ca. 300 ähnlichen Stücken gefunden, die vermutlich dem gleichen Typus angehören. Kohlenstoff-Chondrite sind 4,5 bis 4,6 Milliarden Jahre alt und bilden den Schlüssel zur Anfangsgeschichte. Bereits bei früheren Analysen an solchen Meteoriten wurden Amino-Säuren nicht terrestrischen Ursprungs gefunden. Dies weist darauf hin, dass die für das Leben nötigen komplexen organischen Moleküle nicht unbedingt auf der Erde entstanden sind bzw. auch in anderen Regionen des Sonnensystems vorkommen.

NASA-Release 78—87