Zeitschrift: Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft
Herausgeber: Schweizerische Astronomische Gesellschaft
Band: 32 (1974)
Heft: 144

Artikel: Pierre Simon Laplace's "Schwarze Löcher"
Autor: Fuchs, H.-U.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-899667

Pierre Simon Laplace's «Schwarze Löcher»

von H.-U. Fuchs, Zürich

(Eingegangen am 29. Juni 1974)

Schwarze Löcher gehören heute zu den interessantesten Studien- und Diskussionsobjekten der Astronomie und der Physik[1]). Wir datieren die Geburt der Idee auf die Dreissigerjahre dieses Jahrhunderts zurück. Kurz nach der Entdeckung des Neutrons brachte F. Zwicky die schwarzen Löcher in die Diskussion.

Es ist daher interessant zu entdecken, dass die Idee von Himmelskörpern, die alle Strahlung zurückbehalten, viel weiter zurück verfolgt werden kann.

I. Laplace's «*Exposition du système du monde*»

Ganz am Schluss seines 1798 erschienenen Werkes «Über das Weltsystem»[2]) bespricht Pierre Simon Laplace (1749–1827) die Welt ausserhalb des Sonnensystems. Die wohl erstaunlichste Eigenschaft der Sterne, nämlich sich verändern zu können, muss wohl seine ganze Aufmerksamkeit erregt haben. Er vermerkt besonders die Tatsache, dass es Sterne gibt, die plötzlich aufleuchten und darauf ziemlich schnell wieder unsichtbar werden. Man kann wohl annehmen, dass er damit die Novae meinte. Es bleibt also das Problem, das Unsichtbarwerden solcher Sterne zu erklären. Die Idee, die Laplace hatte, ist in dem erwähnten Werk dargelegt[2]):

> «Portons maintenant nos regards au-delà du système solaire. D'innombrables soleils qui peuvent être les foyers d'autant de systèmes planétaires, sont répandus dans l'immensité de l'espace, et à un éloignement de la terre, tel que le diamètre entier de l'ombre terrestre, vu de leur centre, est insensible. Plusieurs étoiles éprouvent dans leur couleur et dans leur clarté, des variations périodiques très remarquables; il en est d'autres qui ont paru tout-à-coup, et qui ont disparu après avoir, pendant quelque temps, répandu une vive lumière. Quels prodigieux changements ont dû s'opérer à la surface de ces grands corps, pour être aussi sensibles à la distance qui nous en sépare; et combien ils doivent surpasser ceux, que nous observons à la surface du soleil? Tous ces corps devenus invisibles, sont à la même place où ils ont été observés, puisqu'ils n'en ont point changé, durant leur apparition; il existe donc dans les espaces célestes, des corps obscurs aussi considérables, et peut-être en aussi grand nombre, que les étoiles. *Un astre lumineux de même densité que la terre, et dont le diamètre serait deux cents cinquante fois plus grand que celui du soleil, ne laisserait en vertu de son attraction, parvenir aucun de ses rayons jusqu'à nous;* il est donc possible que les plus grands corps lumineux de l'univers, soient par cela même, invisibles. Une étoile qui, sans être de cette grandeur, surpasserait considérablement le soleil; affaiblirait sensiblement la vitesse de la lumière, et augmenterait ainsi l'étendue de son aberration. Cette différence dans l'aberration des étoiles; un catalogue de celles qui ne font que paraître, et leur position observée au moment de leur éclat passager; (...) tels seront, relativement aux étoiles, les principaux objets de l'astronomie future.»

Dieser Text allein gäbe sehr viel Stoff zum Spekulieren, wie denn Laplace das gemeint haben könnte. Zum Glück aber gab er an einem anderen Ort einen Beweis seiner Idee, die in dem zentralen Satz «Ein Stern von derselben Dichte wie die Erde, und einem zweihundertfünfzigfachen Sonnendurchmesser liesse wegen seiner Anziehung keinen seiner Strahlen mehr zu uns kommen» formuliert ist. Auch so noch bleibt genug unsicher, wie er denn diesen Gedanken genau auffasste.

Aber folgen wir dem Beweis seines Satzes.

II. Beweis des Theorems, dass die anziehende Kraft eines schweren Körpers so gross sein könnte, dass kein Licht von ihm wegfliessen könnte. Von P. S. Laplace[3])
(Vom Verf. aus dem Englischen übersetzt)

(1) Wenn v die Geschwindigkeit, t die Zeit und s der Raum, der sich während dieser Zeit gleichförmig bewegt, ist, dann ist, wie man weiss, $v = s/t$.

(2) Wenn die Bewegung nicht gleichförmig ist, so muss man, um den Wert von v für jeden Zeitpunkt zu erhalten, den durchlaufenen Raum ds und das Zeitintervall dt durcheinander dividieren, nämlich $v = ds/dt$, weil die Geschwindigkeit über ein infinitesimal kleines Intervall konstant ist, und daher die Bewegung als gleichförmig genommen werden kann.

(3) Eine kontinuierlich wirkende Kraft wird die Geschwindigkeit ändern. Diese Änderung der Geschwindigkeit, nämlich dv, ist damit das natürlichste Mass für die Geschwindigkeit. Aber weil jede Kraft in doppelter Zeit auch den doppelten Effekt hervorruft, müssen wir die Änderung der Geschwindigkeit dv noch durch die Zeit dt, in der jene durch die Kraft P hervorgebracht wird, teilen, und so erhält man einen allgemeinen Ausdruck für die Kraft P, nämlich

$$P = \frac{dv}{dt} = \frac{d \cdot \frac{ds}{dt}}{dt}.$$

Wenn nun dt konstant ist, gilt

$$d\,\frac{ds}{dt} = \frac{d \cdot ds}{dt} = \frac{dds}{dt}$$

also

$$P = \frac{dds}{dt^2}.$$

(4) Sei die anziehende Kraft eines Körpers $= M$; ein zweiter Körper, z. B. ein Lichtteilchen, befinde sich in der Entfernung r; die Wirkung der Kraft M auf dieses Lichtteilchen ist $-M/rr$; das Minuszeichen steht, weil die Wirkung von M der Bewegung des Lichtes entgegengesetzt ist.

I.
ABHANDLUNGEN.

I.

Beweis
des Satzes, daſs die anziehende Kraft bey einem Weltkörper ſo groſs ſeyn könne, daſs das Licht davon nicht ausſtrömen kann. *)

Von
Peter Simon La Place.

1) Wenn v die Geſchwindigkeit, t die Zeit und s der während dieſer Zeit gleichförmig durchlaufene Raum iſt, ſo iſt bekanntlich $v = \frac{s}{t}$

2) Iſt

*) Dieſen Satz, daſs ein leuchtender Körper des Weltalls von gleicher Dichtigkeit mit der Erde, deſſen Durchmeſſer 250 mahl gröſser wäre, als der der Sonne, vermöge ſeiner anziehenden Kraft keinen von ſeinen Lichtſtrahlen bis zu uns ſchicken könne, daſs folglich gerade die gröſsten Körper unſeres Weltgebäudes uns unſichtbar bleiben können, hat *La Place* in ſeiner *Expoſition du Syſtême du Monde* Part. II P. 305 ohne Beweis aufgeſtellt; hier iſt er. Vergl. A. G. E. May 1798 S. 603 *v. Z.*

2) Iſt die Bewegung nicht gleichförmig, ſo muſs man, um den Werth von v in jedem Augenblicke zu haben, den in dieſem Zeittheilchen dt durchlaufenen Raum ds in einander dividiren, nämlich $v = \frac{ds}{dt}$; weil die Geſchwindigkeit in einem unendlich kleinen Zeittheilchen unveränderlich und alſo die Bewegung gleichförmig angenommen werden kann.

3) Eine immerfort wirkende Kraft wird die Geſchwindigkeit zu ändern ſtreben. Dieſe Aenderung der Geſchwindigkeit, nämlich dv, iſt das natürlichſte Maſs der Kraft. Da aber jede Kraft in doppelter Zeit doppelte Wirkung hervorbringt, ſo muſs man noch die Aenderung der Geſchwindigkeit dv durch die Zeit dt, in welcher ſie von der Kraft P hervor gebracht wurde, dividiren, und man wird dadurch einen allgemeinen Ausdruck für die Kraft P erhalten, nämlich $P = \frac{dv}{dt} = \frac{d.\frac{ds}{dt}}{dt}$ Nun iſt, wenn dt beſtändig iſt, $d.\frac{ds}{dt} = \frac{d.\,ds}{dt} = \frac{dds}{dt}$ folglich $P = \frac{dds}{dt^2}$

4) Es ſey die Attractions-Kraft eines Körpers = M; ein zweyter Körper z. B. ein Lichttheilchen befindet ſich in der Entfernung r; die Wirkung der Kraft M dieſes Lichttheilchen wird $-\frac{M}{rr}$ ſeyn; das Zeichen — deswegen, weil die Wirkung von M der Bewegung des Lichts entgegen geſetzt iſt.

5) Nun iſt nach (3) dieſe Kraft auch $= \frac{ddr}{dt^2}$ folg-

(5) Wegen (3) ist die Kraft auch gleich ddr/dt^2, also

$$-\frac{M}{r \cdot r} = \frac{ddr}{dt^2} = -M \cdot r^{-2}.$$

Multipliziert mit dr

$$\frac{dr \cdot ddr}{dt^2} = -M \cdot dr \cdot r^{-2};$$

integriert
$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2} = C + M \cdot r^{-1}$$

wobei C eine Konstante ist, oder

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2C + 2M \cdot r^{-1}.$$

Nun ist wegen (2) dr/dt die Geschwindigkeit v, also gilt
$$v^2 = 2C + 2M \cdot r^{-1}$$
wobei v die Geschwindigkeit des Lichtteilchens in der Entfernung r ist.

(6) Um nun die Konstante C zu bestimmen, setzen wir R für den Radius des anziehenden Körpers und a für die Geschwindigkeit des Lichtes in der Distanz R, also auf der Oberfläche des anziehenden Körpers; dann erhält man von (5)
$a^2 = 2C + 2M/R$ und weiter $2C = a^2 - 2M/R$. Setzt man das in die obere Gleichung ein, so ergibt sich

$$v^2 = a^2 - \frac{2 \cdot M}{R} + \frac{2 \cdot M}{r}.$$

(7) Sei R′ der Radius eines andern anziehenden Körpers, dessen Anziehungskraft gleich iM ist, und sei die Geschwindigkeit des Lichtes in der Entfernung r gleich v′, dann gilt wie in Gleichung (6)

$$v'^2 = a^2 - \frac{2iM}{R'} + \frac{2iM}{r}.$$

(8) Wenn man r unendlich gross macht, so verschwindet der letzte Ausdruck in der vorhergehenden Gleichung und man erhält

folglich $-\frac{M}{rr} = \frac{ddr}{dt^2} = -Mr^{-2}$

man multiplicire mit dr; $\frac{dr\,ddr}{dt^2} = -M\,dr\,r^{-2}$

integrirt, $\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2} = c + Mr^{-1}$ wo c die beſtändige Gröſse iſt, oder $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2c + 2Mr^{-1}$

Nun iſt nach (2) $\frac{dr}{dt}$ = der Geſchwindigkeit v

folglich $v^2 = 2c + 2Mr^{-1}$ wo v die Geſchwindigkeit des Lichttheilchens in der Entfernung r iſt.

6) Um nun die Conſtante c zu beſtimmen, ſey R der Halbmeſſer des anziehenden Körpers, a die Geſchwindigkeit des Lichts in der Entfernung R, folglich an der Oberfläche des anziehenden Körpers, ſo erhält man aus (5) $a^2 = 2c + 2\frac{M}{R}$ folglich $2c = a^2 - \frac{2M}{R}$ dieſs, in die vorige Gleichung geſetzt, gibt $v^2 = a^2 - \frac{2M}{R} + \frac{2M}{r}$

7) Eines andern anziehenden Körpers Halbmeſſer ſey R, ſeine Attractionskraft ſey iM, die Geſchwindigkeit des Lichts in der Entfernung r ſey v ſo iſt vermöge der Gleichung in (6)

$$v'^2 = a^2 - \frac{2iM}{R} + \frac{2iM}{r}$$

8) Setzt man r unendlich groſs, ſo verſchwindet das letzte Glied der vorhergehenden Gleichung und man erhält

$$v'^2 = a^2 - \frac{2iM}{R}.$$

A 2 Die

Die Entfernung der Fixſterne iſt ſo groſs, daſs man zu dieſer Annahme berechtiget iſt.

9) Die anziehende Kraft des zweyten Körpers ſey ſo groſs, daſs das Licht nicht ausſtrömen kann; dieſs läſst ſich analytiſch am bequemſten ſo ausdrücken: die Geſchwindigkeit des Lichts v' iſt gleich Null. Dieſen Werth von v' in der Gleichung für v' (8) geſetzt, wird eine Gleichung geben, aus der ſich die Maſſe iM wird herleiten laſſen, bey welcher dieſer Umſtand Statt findet. Man hat alſo

$$o = a^2 - \frac{2iM}{R'} \quad \text{oder} \quad a^2 = \frac{2iM}{R'}$$

10) Um a zu beſtimmen, ſey der erſte anziehende Körper die Sonne, ſo wird a die Geſchwindigkeit des Sonnenlichts an der Oberfläche der Sonne ſeyn. Die anziehende Kraft der Sonne iſt aber in Vergleichung mit der Geſchwindigkeit des Lichts ſo klein, daſs man dieſe Geſchwindigkeit als gleichförmig annehmen kann. Aus dem Phänomen der Aberration erhellet, daſs die Erde $20''\frac{1}{4}$ in ihrer Bahn durchläuft, während das Licht von der Sonne bis zur Erde kömmt, folglich: es ſey V die mittlere Geſchwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, ſo wird man haben

$$a : V = \text{radius}^{*)} : 20''\tfrac{1}{4} = 1 : \text{tang}\ 20''\tfrac{1}{4}$$

11) Meiner Annahme in *Expoſ. du Syſt. du Monde* Part. II P. 305 gemäſs, iſt R' = 250 R. Nun verhalten ſich die Maſſen, wie die Volumina der anziehenden Körper mit den Dichtigkeiten multiplicirt; die Volumina, wie die Würfel der Halbmeſſer; folglich die Maſſen, wie die Würfel der Halbmeſſer mit den

*) In Secunden ausgedrückt.

$$v'^2 = a^2 - \frac{2iM}{R'}.$$

(9) Sei die anziehende Kraft des zweiten Körpers so gross, dass das Licht nicht von ihm entweichen kann; analytisch kann das folgendermassen ausgedrückt werden: die Geschwindigkeit v' des Lichtes ist gleich Null. Dieser Wert für v' in Gleichung (8) eingesetzt ergibt eine Gleichung aus welcher die Masse iM, für welche das eintritt, hergeleitet werden kann. Es gilt also:

$$o = a^2 - \frac{2iM}{R'} \quad \text{oder} \quad a^2 = \frac{2iM}{R'}.$$

(10) Um a zu bestimmen, sei der erste anziehende Körper die Sonne; dann ist a die Geschwindigkeit des Sonnenlichtes an der Oberfläche der Sonne. Die anziehende Kraft der Sonne ist allerdings so klein, verglichen mit der Geschwindigkeit des Lichtes, dass man diese Geschwindigkeit als gleichförmig annehmen kann. Wir wissen von dem Phänomen der Aberration, dass die Erde auf ihrem Weg $20\frac{1}{4}''$ zurücklegt, während sich das Licht von der Sonne zur Erde bewegt. Sei also V die mittlere Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn, dann gilt a: V = Radius (ausgedrückt in Sekunden): $20\frac{1}{4}'' = 1$: tang $20\frac{1}{4}''$.

(11) Meine Annahme, die ich in «Expos. du syst. du monde», Teil II, Seite 305, gemacht habe, ist R' = 250 R. Nun ändert sich die Masse wie das Volumen des anziehenden Körpers multipliziert mit seiner Dichte; das Volumen wie der Kubus des Radius; also die Masse wie der Kubus des Radius multipliziert mit der Dichte. Sei die Dichte der Sonne gleich 1; die des zweiten Körpers gleich ϱ. Dann gilt:

$$M : iM = 1\,R^3 : \varrho \cdot R'^3 = 1\,R^3 : \varrho \cdot 250^3\,R^3$$

oder $1 : i = 1 : \varrho \cdot (250)^3$

oder $i = (250)^3\,\varrho$.

(12) Man setzt die Werte von i und R' in die Gleichung $a^2 = 2iM/R'$ ein und erhält so

Abhandlungen. 5

den Dichtigkeiten multiplicirt. Es ſey die Dichte der Sonne $= 1$; die des zweyten Körpers $= \varrho$ ſo iſt

$$M : iM = 1\,R^3 : \varrho\, R'^3 = 1\,R^3 : \varrho\, 250^3\, R^3$$

oder $1 : i = 1 : \varrho\,(250)^3$

oder $i = (250)^3\,\varrho$.

12) Man ſubſtituire die Werthe von i und R' in die Gleichung $a^2 = 2i\,\frac{M}{R'}$ ſo erhält man

$$a^2 = \frac{2\,(250)^3\,\varrho M}{250\,R} = 2\,(250)^2\,\varrho\,\frac{M}{R}$$

oder $\varrho = \frac{a^2\,R}{2\,(250)^2\,M}$

13) Um ϱ zu haben, darf man nur noch M beſtimmen. Die Kraft der Sonne M iſt in der Entfernung D gleich $\frac{M}{D^2}$. Es ſey D die mittlere Entfernung der Erde, V die mittlere Geſchwindigkeit der Erde; ſo iſt dieſe Kraft auch gleich $\frac{V^2}{D}$ (man ſehe La Lande's Aſtronomie III § 3539.) folglich $\frac{M}{D^2} = \frac{V^2}{D}$ oder $M = V^2D$. Dieſs in die Gleichung für ϱ in (12) ſubſtituirt gibt

$$\varrho = \frac{a^2\,R}{2\,(250)^2\,V^2\,D} = \frac{8}{(1000)^2}\left(\frac{a}{V}\right)^2\cdot\left(\frac{R}{D}\right)$$

$$\frac{a}{V} = \frac{\text{Geſchw. d. Lichts}}{\text{Geſchw. d. Erde}} = \frac{1}{\text{tang } 20''\frac{1}{4}} \text{ nach (10)}$$

$$\frac{R}{D} = \frac{\text{wahrem Halbmeſſer} \odot}{\text{mittlern Entfernung} \odot} = \text{tang. mittlern ſchein-}$$

baren Halbmeſſers der $\odot$.

A 3 folg-

$$a^2 = \frac{2\,(250)^3\varrho M}{250\ R} = 2\,(250)^2\,\varrho\,\frac{M}{R}$$

oder
$$\varrho = \frac{a^2\ R}{2\,(250)^2\ M}.$$

(13) Um ϱ zu erhalten, muss man immer noch M bestimmen. Die Kraft M der Sonne ist in einer Entfernung D gleich M/D^2. Sei D die mittlere Entfernung der Erde, V die mittlere Geschwindigkeit der Erde; dann ist diese Kraft auch gleich V^2/D (siehe Lande's Astronomie, III, § 3539). Also ist $M/D^2 = V^2/D$ oder $M = V^2D$. Dies in Gleichung (12) für ϱ eingesetzt ergibt

$$\varrho = \frac{a^2\ R}{2\,(250)^2 V^2 D} = \frac{8}{(1000)^2}\left(\frac{a}{V}\right)^2\left(\frac{R}{D}\right),$$

$$\frac{a}{V} = \frac{\text{Lichtgeschw.}}{\text{Geschw. d. Erde}} = \frac{1}{\text{tang } 20\tfrac{1}{4}''} \text{ wie in (10)}$$

$$\frac{R}{D} = \frac{\text{absol. Rad. d. Sonne}}{\text{mittl. Entf. d. Sonne}} = \text{tang (mittl. scheinb. Radius d. Sonne)}$$

6 *Abhandlungen.*

folglich $\varrho = 8\,\frac{\text{tang } 16'\ 2''}{(1000\ \text{tang. } 20''\frac{1}{4})^2}$

hieraus ϱ beynahe 4, oder ſo groſs, als die Dichte der Erde.

Also

$$\varrho = 8\ \frac{\text{tang } 16'2''}{(1000 \text{ tang } 20\tfrac{1}{4}'')^2}$$

womit man $\varrho \approx 4$ erhält, was etwa so gross ist, wie die Dichte der Erde.

III. Interpretationen und Kritik

1) Was LAPLACE in den Punkten (1) bis (9) mühsam ableitet, ist nichts anderes, als die *Fluchtgeschwindigkeit* eines Himmelskörpers der Masse M (oder iM) und vom Radius R (oder R'). Die Fluchtgeschwindigkeit ist ja bekanntlich die Geschwindigkeit, die man einem materiellen Körper an der Oberfläche eines Gestirns erteilen muss, damit er diesen für immer verlässt. Erfährt der Körper eine Geschwindigkeit $V < V_\infty$, so kann er nur geschlossene Bahnen (Kreis, Ellipse) um das Gravitationszentrum durchführen.

Diese in der NEWTON'schen Mechanik bekannte Vorstellung überträgt LAPLACE also auf das Licht. Er sagt: *ist die Fluchtgeschwindigkeit eines Sterns grösser als die Lichtgeschwindigkeit* c, *so kann kein Lichtstrahl mehr den Stern verlassen*. Das legt den Gedanken nahe, dass LAPLACE das Licht als aus Teilchen mit Masse bestehend behandelt. Aber dazu muss noch einiges gesagt werden.

2) Um die mühsame Rechnung LAPLACE's deutlicher zu machen, sei hier gezeigt, wie diese mit modernen Begriffsbildungen (Energiesatz) durchgeführt wird. LAPLACE kannte damals den Begriff Energie und den Energiesatz noch nicht; zumindest waren diese Begriffe noch nicht so geklärt, dass man mit ihnen hätte arbeiten können.

Wir berechnen zuerst die potentielle Energie an der Oberfläche eines Himmelskörpers mit dem Radius R und der Masse M. Nach Definition ist diese gleich der Arbeit, die geleistet werden muss, um einen Probekörper mit der Masse m ins Unendliche zu befördern.

Es gilt
$$E_{pot} = \int_R^\infty P(r)\,dr. \tag{14}$$

Mit dem Gravitationsgesetz

$$P(r) = -\gamma\,\frac{M \cdot m}{r^2} \tag{15}$$

folgt für die potentielle Energie die Gleichung

$$E_{pot} = -\gamma\,\frac{M \cdot m}{R}. \tag{14a}$$

Diese Energie muss also (dem Betrage nach) dem kleinen Körper m an der Oberfläche des grossen in Form von Bewegungsenergie (kinetische Energie) mitgegeben werden, damit m den grossen Körper verlassen kann; also

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{\infty}^{2} = \frac{\gamma\,M\,m}{R}$$

woraus wir sofort

$$v_{\infty}^{2} = \frac{2\,\gamma\,M}{R} \tag{15}$$

erhalten. Hier ist v_∞ die Fluchtgeschwindigkeit. Diese Form entspricht genau Gleichung (9) in LAPLACE's Beweis, wenn man nur $v_\infty = a$ setzt. Man lasse sich nicht dadurch verwirren, dass bei LAPLACE die Gravitationskonstante γ fehlt. Diese fällt sowieso bei LAPLACE's Herleitung heraus. Auch abgesehen von dieser Unstimmigkeit hat LAPLACE die Begriffe (z. B. Kraft) nicht einheitlich verwendet.

3) Ist also die Fluchtgeschwindigkeit $v_\infty = a$ eines Sterns grösser als die Lichtgeschwindigkeit c, so haben wir nach LAPLACE einen Himmelskörper vor uns, der alles Licht zurückbehält. Gleichung (16) zeigt uns, dass durch die Bedingung $v_\infty = c$ nur das Verhältnis

$$\frac{M}{R} = \frac{1}{2\gamma}\,c^2 \tag{17}$$

nicht aber M und R einzeln, bestimmt ist. D. h. dass im Prinzip jeder Körper ein «schwarzes Loch» sein kann, da (17) nach beliebiger Wahl der Grösse ϱ (Dichte) immer noch erfüllt werden kann.

4) Für uns ist die Vorhersage schwarzer Löcher eine Folge der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) und der Kernphysik. Zum ersten Mal taucht die Möglichkeit, diese Himmelskörper zu postulieren, bei KARL SCHWARZSCHILD (1916) auf [4]). Allerdings wurde diese Gelegenheit damals nicht beachtet, auch weil noch zu wenig über Kernphysik und Sternaufbau bekannt war.

SCHWARZSCHILDS Lösung lässt sich so beschreiben: Die Metrik für eine stationäre, zentralsymmetrische Massenverteilung (z. B. Sonne) kann wie folgt angesetzt werden:

$$ds^2 = M(r)\,dt^2 + W(r)\,dr^2 + r^2\,d\sigma^2. \tag{18}$$

Dabei ist $d\sigma^2$ die Metrik auf der Sphäre S^2. Der metrische Tensor ist diagonal. Man kann zeigen, dass dies der allgemeinste Ansatz ist, der der physikalischen Situation entspricht. Setzt man nun (18) in die Feldgleichungen für den materiefreien Raum (ausserhalb des Sterns)

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{19}$$

ein, so erhält man sofort die sogenannte SCHWARZSCHILDlösung oder SCHWARZSCHILDmetrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{\alpha}{r}} - r^2\,(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\,d\Phi^2). \tag{20}$$

Die Integrationskonstante α konnte berechnet werden [5])

$$\alpha = \frac{2\gamma M}{c^2}, \tag{21}$$

wobei M und R wie früher definiert wurden. SCHWARZSCHILD glaubte noch, dass α physikalisch unbestimmt bliebe [6]). Daher auch konnte er den physikalischen Charakter der *Singularität* in Gl. (20) nicht erkennen. Gl. (20) wird also für

$$\alpha = r_S = \frac{2\gamma M}{c^2} \tag{21a}$$

singulär. r_S nennt man den SCHWARZSCHILDradius. Zieht sich ein Himmelskörper der Masse M auf einen Radius, der kleiner ist als r_S, zusammen, so «passiert» etwas mit ihm: er wird zu einem schwarzen Loch. (21a) legt also genau fest, wie gross der Radius eines Sterns mit Masse M sein muss, damit dieser zu einem schwarzen Loch wird.

5) Gleichung (21a) stimmt genau mit Gl. (9) überein. Dies «rechtfertigt» uns, das Licht als Teilchen mit Masse nach der klassischen Mechanik zu behandeln. Wir ordnen einem Photon eine «Pseudomasse» über die Beziehung

$$mc^2 = h\nu \tag{22}$$

zu und rechnen wie LAPLACE (Gl. (1) bis (16)). Wenn wir über Gl. (21a) den SCHWARZSCHILDradius der Sonne berechnen, so erhalten wir $r_{S\odot} = 2.95$ km. Natürlich wäre die Fluchtgeschwindigkeit dieses «schwarzen Loches» 300 000 km/s = c.

Wo liegt denn nun aber der Unterschied zwischen LAPLACE's und einer modernen Herleitung, wenn beide Resultate genau übereinstimmen?

6) Der erste (und wesentliche) Unterschied liegt darin, was man unter Licht versteht. Licht als Teilchen mit Masse betrachtet lässt eine klassische Behandlung zu. Heute aber unterwerfen wir das Licht nicht einfach den Gesetzen der klassischen Mechanik. Wir richten uns vielmehr nach einer wichtigen Eigenschaft desselben. Licht bewegt sich nämlich zwischen zwei Punkten auf der kürzesten Verbindung dieser Punkte (sogenannte Geodäte).

Nun weiss man aus der Allgemeinen Relativitäts-Theorie (ART), dass Massen den Raum krümmen, und dass daher die Geodäten keine Geraden mehr sind. Das Licht breitet sich also nicht mehr geradlinig aus.

Zwar liefert diese neue Idee bei den schwarzen Löchern dasselbe Ergebnis wie die klassische Rechnung. Diese Übereinstimmung tritt aber z. B. bei der Lichtablenkung nicht mehr ein! Die verblüffende Übereinstimmung unserer Resultate kommt daher, dass die Gravitationsrotverschiebung

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\gamma\,M}{c^2\,r} \tag{23}$$

(und damit als Grenzfall auch das Zurückhalten aller Signale in einem schwarzen Loch) allein schon aus dem *schwachen Äquivalenzprinzip* (= Äquivalenz von schwerer und träger Masse) folgt. Damit sind diese Effekte kein eigentlicher Beweis der ART, weil diese auf dem *starken Äquivalenzprinzip* aufbaut und darum sehr viel weiter geht[7]) (z. B. Lichtablenkung, Perihelbewegung). Zur Definition des starken Äquivalenzprinzips siehe z. B. WEINBERG S. 68[7]). Genau aus diesem Grund können einige Ergebnisse der ART auch klassisch erhalten werden. Man beachte dazu z. B. die Herleitung der zentralen Differentialgleichung im Artikel «Nichtstatische Weltmodelle» von D. WIEDEMANN[8]).

7) Ein weiterer Fortschritt in der modernen Theorie ist darin zu finden, dass einige zusätzliche Aussagen über schwarze Löcher gemacht werden können (nicht nur über den SCHWARZSCHILDradius). Was bedeutet die Singularität der Gl. (20), wenn also ein Stern einen Radius $r < r_S$ annimmt?

a) Die Raumkrümmung wird unendlich gross (das Licht ist im SCHWARZSCHILDradius = Ereignishorizont gefangen)
b) der Zusammenbruch des Sterns zum SCHWARZSCHILDradius scheint für einen aussenstehenden Beobachter unendlich lange Zeit zu dauern.
c) Wir nehmen einen Körper mit der Masse M und dem ursprünglichen Radius R. Der Körper soll kollabieren. Vom ersten Moment des Zusammenbruchs an bleibt die Rotverschiebung während der Periode

$$T = \pi \sqrt{\frac{R^3}{8\,\gamma\, M}}$$

klein und wächst darauf exponentiell mit der Rate

$$c^3 / 4\,\gamma\, M.$$ [9])

Numerisches Beispiel: Sphäre mit $M = 10^8\, M_\odot$, $R = 100$ Lichtjahre. Mit diesen Werten bleibt die Rotverschiebung von der Grössenordnung $z = 10^{-3}$ währen rund 10^5 Jahren. Danach wächst z jeweils innerhalb weniger Minuten um das Dreifache (genauer: um den Faktor e). Wenn man nichtrelativistisch rechnet, dauert es etwa 3 Stunden, bis $z \approx 1$, d. h. bis der Körper nahe am Zustand eines schwarzen Loches ist.

8) Der dritte Fortschritt kommt von der Physik der Materie. Wir können uns heute einigermassen vorstellen, wie ein schwarzes Loch entstehen könnte.

Ein Stern, der nach seinem Ausbrennen (und nach einer Explosion als Supernova) noch mehr Masse besitzt, als eine gewisse Grenze angibt (rund 1.5 Sonnenmassen), wird nicht zu einem *weissen Zwerg* werden können. Er zieht sich zu einem *Neutronenstern* (Dichte $\varrho \approx 10^{14}$ g/cm^3) zusammen. Vielleicht wird er aber noch weiter schrumpfen und zu einem *schwarzen Loch* werden. Ob dies allerdings auch theoretisch möglich ist, ist heute noch nicht ganz geklärt.

Ein schwarzes Loch ist also für uns in erster Linie ein Körper von ungeheurer Dichte, sehr kleinem Radius und einigen wenigen Sonnenmassen. Gleichung (21a) lässt aber wie Gl. (9) die «Konstruktion» beliebiger schwarzer Löcher zu. Wir wählen einfach die Dichte frei. Es gilt:

$$\varrho = \frac{3c^2}{8 \cdot \pi \cdot \gamma} \cdot \frac{1}{{r_S}^2} \qquad (21b)$$

und

$$\varrho = \frac{3c^6}{32\,\pi\,\gamma^3} \cdot \frac{1}{M^2} \qquad (21c)$$

Sterne von einigen 10 Sonnenmassen hätten demnach als schwarze Löcher Dichten von 10^{13} bis 10^{14} g/cm^3. LAPLACE's «schwarzes Loch» hat eine Dichte von ca. 5 g/cm^3 bei etwa $5 \cdot 10^7$ Sonnenmassen. Es wird dann und wann vermutet, dass solche schwarzen Löcher im Zentrum von Galaxien existieren könnten[1]). Vor kurzem wurden sogar «Mini-schwarze-Löcher» postuliert[10]) [11]) mit etwa Asteroidenmasse und einigen 10 bis 100 Å Durchmesser.

Aber wie gesagt, ob es diese interessanten Körper im Weltall überhaupt gibt, ist immer noch fraglich.

9) Es bleibt uns noch zu klären, wie LAPLACE auf die Idee kommen konnte, es gäbe Sterne, die alles Licht zurückbehalten. Dabei muss diese Erklärung ein Versuch bleiben.

Die Notwendigkeit, auf eine solche Idee zu kommen, scheint gut begründet zu sein. Für LAPLACE stellt sich ja das Problem, das plötzliche Verschwinden von Sternen erklären zu müssen. Dies geht eindeutig aus seinen Bemerkungen in «*Exposition du système du monde*» hervor.

Dass er seine Hypothese dann aber auf der Basis der klassischen Physik und mit der Annahme, die Lichtteilchen (Photonen) hätten von Null verschiedene Ruhemasse, zu beweisen versuchte, bedarf einer näheren Betrachtung.

Wir müssen heute sagen, dass LAPLACE's Behandlung des Themas physikalisch eindeutig falsch ist. Photonen haben Ruhemasse Null. Sie können also nicht einfach wie ein normales materielles Teilchen (z. B. wie ein Satellit) im Schwerefeld eines Himmelskörpers behandelt werden.

Nur sind wir uns heute der Modellvorstellung vom masselosen Lichtteilchen vielleicht zu stark bewusst. Auch wenn wir das Licht als Welle beschreiben, so ordnen wir ihm keine Masse zu. Wir müssen also etwas zurückblenden in die Vorgeschichte der modernen Lichttheorien, um LAPLACE gerecht zu werden.

Nun wäre es ja denkbar, dass LAPLACE sich die Sache folgendermassen überlegt hat: die Herleitung gilt für beliebige, also auch für beliebig kleine Massen, also wird sie im Grenzfall auch für massefreie Teilchen gelten. Dann tauchte für ihn das Problem, ob er dem Licht eine Masse zuordnen sollte oder nicht, überhaupt nicht auf.

Allerdings können wir ebenso leicht annehmen, dass LAPLACE wirklich von dem Bild ausging, dass das Licht aus Teilchen besteht, die eine von Null verschiedene Masse besitzen.

Der *Streit um die Deutung des Lichtes* war im 18. Jahrhundert von den Anhängern NEWTONS im Sinne der *Korpuskeltheorie* entschieden worden[12]). Zwar hatten schon Zeitgenossen von NEWTON, nämlich CH. HUYGENS und R. HOOKE, um 1670 die Theorie von der *Wellennatur des Lichtes* vertreten. Aber durchsetzen konnte sich diese Ansicht erst gegen 1800. Abgesehen davon, dass LAPLACE sich Zeit seines Lebens nie an die Wellentheorie des Lichtes gewöhnen konnte, kamen die entscheidenden Versuche in dieser Richtung auch erst ein paar Jahre nach dem Beweis, dass es «schwarze Löcher» geben könnte. TH. YOUNG erklärte die Farben an dünnen Schichten mit periodischen, sich durchdringenden Wellen. Das war zwischen 1801 und 1803. Bald darauf verstand er die Beugung als Interferenzphänomen. Um 1808 schlossen YOUNG, FRESNEL und ARAGO auf die Transversalität der Lichtwellen.

Wir können also ruhig annehmen, dass LAPLACE ein überzeugter Anhänger der Teilchentheorie des Lichtes war. Diesen Teilchen eine, wenn auch eine geringe Masse zuzuordnen, scheint nicht abwegig zu sein. Und dann ist die Idee der alles verschluckenden Sterne eine konsequente Folge der Theorie über das Licht und NEWTONS Gravitationstheorie.

10) Hat also LAPLACE die «schwarzen Löcher» schon vor 175 Jahren vorausgesehen? Wenn wir ein schwarzes Loch ganz allgemein als einen Himmelskörper definieren, von dem kein Signal entweicht, dann war die Grundidee bei LAPLACE schon vorhanden.

11) Es muss aber deutlich festgehalten werden, dass LAPLACE mit seinen «schwarzen Löchern» nichts (auch keine Teilergebnisse) von der allgemeinen Relativitätstheorie oder der modernen Kernphysik vorwegnahm. Und als «Kinder» dieser modernen Theorien müssen wir ja die schwarzen Löcher ansehen.

Literaturverzeichnis:
1) R. PENROSE: Black Holes. Scientific American 226, 38, May 1972.
2) P. S. LAPLACE: Exposition du système du monde. Bd. II, S. 304.
3) Allgemeine geographische Ephemeriden, verfasst von einer Gesellschaft Gelehrten und herausgegeben von F. von Zach. Weimar 1799, S. 1. Dieser Text ist in Faksimile-Druck wiedergegeben.
4) K. SCHWARZSCHILD: Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der EINSTEIN'schen Theorie. Sitz. ber. kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin 1916. S. 189.
5) G. C. MC VITTIE: General Relativity and Cosmology. S. 82.
6) K. SCHWARZSCHILD: a. a. O. S. 195.
7) S. WEINBERG: Gravitation and Cosmology. Wiley N. Y. S. 69.
8) D. WIEDEMANN: ORION 141, 71 u. 73, 1974.
9) S. WEINBERG: a. a. O. S. 348.
10) S. HAWKING: Mon. Not. Roy. astr. Soc. 152, 75 (1971).
11) JACKSON, RYAN: Nature, 245, 88 (1973).
12) zur Geschichte der Lichttheorien siehe z. B. F. HUND: Geschichte der physikalischen Begriffe. Bibl. Inst. S. 142 ff und 212 ff.

Adresse des Autors:
H. U. FUCHS, Lerchenrain 7/26, CH-8046 Zürich.

Ein Meteoriten-Museum in der DDR

von J. CLASSEN, Pulsnitz

Im Zusammenhang mit der Errichtung einer Sternwarte in Pulsnitz wurde dort bereits 1927 mit dem Sammeln von Meteoriten begonnen. Ihre Beschaffung war damals noch leicht, da sich kaum jemand für diese «abwegigen» Naturprodukte interessierte. Die Astronomen beobachteten meist nur die Meteorerscheinungen am Himmel, während sich die Mineralogen lieber mit den von der Erde stammenden und daher geologisch interessanteren Mineralien befassten.

Gegen Ende des 2. Weltkrieges, am 27. April 1945, geriet die Pulsnitzer Meteoritensammlung in grosse Gefahr, da die Sternwarte, die von 1933–1945 Sitz einer antifaschistischen Widerstandsgruppe gewesen war, von der Gestapo geplündert wurde. Da diese aber mit den Meteoriten wohl nichts anzufangen wusste, entstanden nur kleinere Verluste, die inzwischen wieder ersetzt werden konnten. Mit dem Beginn der Weltraumflüge durch Sputnik 1, der am 4. Oktober 1957 in den Raum geschossen wurde, stieg das Interesse an Meteoriten auf der ganzen Erde sprunghaft an. Die Pulsnitzer Sammlung erhielt einen eigenen Raum und wurde zu einem kleinen Museum ausgebaut, dem bisher einzigen, das sich streng auf Meteorite beschränkt. Dieses Museum wurde von 1960 an vom Rat des Kreises Bischofswerda zusammen mit der Sternwarte unterstützt, was einen erfreulichen Besucherstrom zur Folge hatte. Sternwarte und Museum waren bis 1964 von über 30 000 Interessenten besichtigt worden. Leider wurde diese erfreuliche Entwicklung von 1968 an durch örtliche Intrigen gegen die Sternwarte unterbrochen, so dass gegenwärtig ein Besuch des Pulsnitzer Meteoriten-Museums nur ausnahmsweise möglich ist.

Die 1927 gegründete Meteoritensammlung sollte von Anfang an der Meteoritenforschung dienen. So konnte 1964 die erste kleinere Schrift *«Beiträge zur Meteoritenkunde»* herausgegeben werden. 1967 erschien in der Reihe der Veröffentlichungen der Sternwarte Pulsnitz die erste grössere Arbeit *«Die Entstehung der Tektite»*. Weitere Veröffentlichungen folgten 1968 *«Die Meteoritenforschung in der UdSSR»* und 1969 *«Über Eisenmeteorite und ihre Ausbeutung durch den*