Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Solothurn

Band: 8 (1924-1928)

Artikel: Die Inverse der Konchoide im Falle 1=p als Enveloppe eines invertierten besondern Hyperbelsystems

Autor: Kaufmann, Arnold

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-543244

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Inverse der Konchoide im Falle l=p als Enveloppe eines invertierten besondern Hyperbelsystems.

Von Dr. ARNOLD KAUFMANN, Solothurn.

In meiner Arbeit „Die Inverse der Konchoide des Nikomedes“ [1]) wurde die Inverse für die allgemeine Lage und für einige spezielle Lagen des Inversionszentrums untersucht und diskutiert.

Die Inverse der Konchoide im Falle $l = p$ [2]) lässt sich auch als Enveloppe des invertierten Hyperbelsystems darstellen, das gebildet wird von sämtlichen Hyperbeln, die einen festen Punkt zum Scheitel und eine feste Gerade zur gemeinschaftlichen Asymptote haben.[3])

Um dies zu beweisen, stellt man die Gleichung des invertierten Hyperbelsystems auf und bestimmt dann dessen Enveloppe.

Wählt man den festen Punkt als Nullpunkt und legt die x-Achse senkrecht durch ihn zur gegebenen Asymptote $x = d$, so lautet die *Gleichung des Hyperbelsystems:*

$$x^2 + 2kxy - d\,(1 \pm \sqrt{1 + 4k^2})\,x - 2kdy = 0. \qquad (1)$$

In dieser Gleichung bedeutet k ein veränderlicher Parameter. Nimmt k alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ an, so erhält man, dem doppelten Vorzeichen in obiger Gleichung entsprechend, zwei Systeme von je unendlich vielen Hyperbeln.

Die Inversion vollziehe sich am Einheitskreis (Inversionspotenz = 1). Wählt man den festen Punkt als Inversionszentrum

---

[1]) Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der Kantonsschule Solothurn, 1919/1920.

[2]) Die Bedeutung von p und l ergibt sich aus der geometrischen Definition der Konchoide: Es ist eine feste Gerade (Leitlinie, Basis oder Direktrix genannt) und ein fester Punkt O im senkrechten Abstand p von dieser Geraden gegeben. Um den festen Punkt, den Pol O, dreht sich ein Strahl. Von seinem Schnittpunkt mit der Leitlinie aus trägt man eine beliebig gewählte, aber konstante Strecke l nach beiden Seiten ab. Auf diese Weise ergeben sich unendlich viele Punktepaare und der geometrische Ort aller dieser Punktepaare ist dann die Konchoide.

[3]) Dr. Hans Teuscher: Ueber ein besonderes Hyperbelsystem, Inaugural-Dissertation, Bern, 1915.

und substituiert in Gleichung (1) die Transformationsformeln der Inversion:

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \; ; \; y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

so erhält man die *Gleichung des invertierten Hyperbelsystems:*

$$2kd\eta(\xi^2+\eta^2) + d(1 \pm \sqrt{1+4k^2})\,\xi(\xi^2+\eta^2) - 2k\xi\eta - \xi^2 = 0 \quad (2).$$

Diese ist vom dritten Grade und repräsentiert zwei Systeme von je unendlich vielen Kurven dritter Ordnung. Die Gleichung enthält den veränderlichen Parameter k im zweiten Grade. Die Frage nach einer Enveloppe der Kurvenschar dritter Ordnung ist demnach berechtigt.

Bezeichnet man die Gleichung (2) abgekürzt mit

$$f(\xi, \eta, k) = 0,$$

so erhält man die Gleichung der Enveloppe durch Elimination des veränderlichen Parameters k aus den beiden Gleichungen:

$$f(\xi, \eta, k) = 0 \text{ und } \frac{\partial f(\xi, \eta, k)}{\partial k} = 0.$$

Gleichung (2) quadriert, ergibt:

$$f = d^2\xi^2(\xi^2+\eta^2)^2 + 4d^2k^2\xi^2(\xi^2+\eta^2)$$
$$- [2kd\eta(\xi^2+\eta^2) + d\xi(\xi^2+\eta^2) - 2k\xi\eta - \xi^2]^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 2kd^2\xi^2(\xi^2+\eta^2)^2$$
$$- [2kd\eta(\xi^2+\eta^2) + d\xi(\xi^2+\eta^2) - 2k\xi\eta - \xi^2]$$
$$[d\eta(\xi^2+\eta^2) - \xi\eta] = 0.$$

Wird in der Gleichung $f = 0$ der Koeffizient von k^2 mit a, derjenige von k mit 2b und die Glieder ohne k mit c bezeichnet, so lässt sich die Gleichung schreiben:

$$f(\xi, \eta, k) = ak^2 + 2bk + c = 0$$

und hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 2ak + 2b = 0$$

$$k = -\frac{b}{a}$$

Diesen Wert in $f(\xi, \eta, k)$ substituiert, ergibt:

$$b^2 - ac = 0.$$

Die Gleichung der Enveloppe lässt sich demnach auf einfache Weise aus den Koeffizienten a, b und c der Gleichung $f = 0$ finden.

Die obige Gleichung $f = 0$ des invertierten Hyperbelsystems wird nach Ausrechnung des quadratischen Ausdrucks:

$$k^2 [4 d^2 \eta^2 (\xi^2 + \eta^2)^2 + 4 \xi^2 \eta^2 - 8 d \xi \eta^2 (\xi^2 + \eta^2) - 4 d^2 \xi^2 (\xi^2 + \eta^2)^2]$$
$$+ 2 k [2 d^2 \eta \xi (\xi^2 + \eta^2)^2 - 4 d \eta \xi^2 (\xi^2 + \eta^2) + 2 \xi^3 \eta]$$
$$+ \xi^4 - 2 d \xi^3 (\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Demnach entsprechen den Koeffizienten a, b und c folgende Werte:

$$a = 4 [d^2 \eta^2 (\xi^2 + \eta^2)^2 + \xi^2 \eta^2 - 2 d \xi \eta^2 (\xi^2 + \eta^2) - d^2 \xi^2 (\xi^2 + \eta^2)^2]$$
$$b = 2 [d^2 \eta \xi (\xi^2 + \eta^2)^2 - 2 d \eta \xi^2 (\xi^2 + \eta^2) + \xi^3 \eta]$$
$$c = \xi^4 - 2 d \xi^3 (\xi^2 + \eta^2)$$

Die Gleichung der gesuchten Enveloppe

$$b^2 - a c = 0$$

wird somit:

$$4 d^4 \xi^2 \eta^2 (\xi^2 + \eta^2)^4 - 8 d^3 \eta^2 \xi^3 (\xi^2 + \eta^2)^3 - 8 d^3 \xi^5 (\xi^2 + \eta^2)^3$$
$$+ 4 d^2 \xi^4 (\xi^2 + \eta^2)^3 = 0.$$

Nach Division dieser Gleichung durch $4 d^2 \xi^2 (\xi^2 + \eta^2)^2$ erhält man als Gleichung der gesuchten Enveloppe des invertierten Hyperbelsystems:

$$\underline{d^2 \eta^2 (\xi^2 + \eta^2) - 2 d \eta^2 \xi - 2 d \xi^3 + \xi^2 = 0.} \qquad (3)$$

Wählt man den Pol 0 als Nullpunkt, sowie als Inversionszentrum, die Parallele zur Leitlinie durch ihn im Abstand p als x-Achse und somit die Senkrechte in 0 zur Leitlinie als y-Achse, so lautet die Gleichung der Inversen der Konchoide im Falle $l = p$:

$$p^2 x^2 (x^2 + y^2) - 2 p x^2 y - 2 p y^3 + y^2 = 0$$

Setzt man nun in dieser Gleichung $p = d$ und vertauscht zugleich noch die x- und y-Achse, so heisst die Gleichung:

$$\underline{d^2 y^2 (x^2 + y^2) - 2 d y^2 x - 2 d x^3 + x^2 = 0.} \qquad (4)$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt somit, dass die Inverse der Konchoide im Falle $l = p = d$ die Enveloppe des durch die Gleichung (2) dargestellten invertierten Hyperbelsystems ist.