

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn
<b>Herausgeber:</b>	Naturforschende Gesellschaft Solothurn
<b>Band:</b>	8 (1924-1928)
<b>Artikel:</b>	Beziehung zwischen n+1 Punkten des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes, die auf einer Grenzfläche liegen
<b>Autor:</b>	Dändliker, K.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-543242">https://doi.org/10.5169/seals-543242</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## **Beziehung zwischen $n+1$ Punkten des $n$ -dimensionalen hyperbolischen Raumes, die auf einer Grenzfläche liegen.**

---

Von Dr. K. DÄNDLICKER, Solothurn.

★

Zwischen den gegenseitigen Abständen von vier Punkten  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4$  einer Ebene besteht bekanntlich<sup>1)</sup> die Beziehung,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 1 & s_{21} & 0 & s_{23} & s_{24} \\ 1 & s_{31} & s_{32} & 0 & s_{34} \\ 1 & s_{41} & s_{42} & s_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei  $s_{pq}$  das Quadrat des Abstandes der Punkte  $A_p A_q$  bedeutet.

Eine analoge Beziehung zwischen den Entfernungen von  $n+2$  Punkten  $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$  besteht für den  $n$ -dimensionalen Raum.

Es ist

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s_{pq} \end{vmatrix} = 0,$$

wo  $s_{pq}$  das Quadrat der Entfernung  $A_p A_q$  ist. Diese Relation ist von Kronecker gefunden worden.<sup>2)</sup>

In der hyperbolischen Geometrie des Raumes von drei Dimensionen nähert sich eine durch drei Punkte hindurchgehende Kugel bei wachsendem Radius nicht einer Ebene, sondern einer sog. Grenzfläche.<sup>3)</sup> Alle Geraden, welche die Grenzfläche unter rechtem Winkel schneiden, sind zueinander parallel, d. h. sie haben einen unendlich fernen Punkt gemeinsam, den unendlich fernen Punkt der Grenzfläche. Durch diesen unendlich fernen Punkt hindurch gehen auch die mittelnormalen Ebenen der Strecken, deren Endpunkte auf der Grenzfläche liegen. Durch drei Punkte sind zwei

<sup>1)</sup> Vergl. Kowalewsky, Einführung in die Determinantentheorie, p. 342.

<sup>2)</sup> Journ. f. Math. 72 (1870), p. 152 = Werke 1, p. 235.

<sup>3)</sup> Lobatschefsky-Engel, Zwei geom. Abhandlungen, p. 12 u. 191.

Grenzflächen bestimmt, die symmetrisch liegen bezüglich der durch die drei Punkte bestimmten Ebene. Liegen vier Punkte auf einer Grenzfläche, so besteht zwischen ihnen eine Beziehung.

Welche Beziehung besteht im n-dimensionalen hyperbolischen Raum zwischen  $n+1$  Punkten, die auf einer  $n-1$ -dimensionalen Grenzfläche liegen?

Zur Einführung der allgemeinen Massbestimmung, die von Cayley-Klein im dreidimensionalen Raum eingeführt und von D'Ovideo auf den Raum von n-Dimensionen erweitert wurde, fixieren wir im Raum  $S_n$  von n-Dimensionen eine durch homogene Koordinaten dargestellte Hyperfläche zweiten Grades

$$Q(xx) = \sum_{h,i=0}^n a_{hi} x_h x_i$$

als absolutes Gebilde. Der Abstand zweier Punkte  $A(x_i)$ ,  $B(y_i)$  ist definiert durch

$$AB = k \cdot \lg(U_1 U_2 AB), \quad (1')$$

wo  $k$  eine Konstante ist und wobei  $U_1$  und  $U_2$  die Punkte bedeuten, welche die Gerade  $AB$  mit dem absoluten Gebilde gemeinsam hat. Aus (1') folgt dann

$$\operatorname{ch} \frac{AB}{2k} = \frac{Q(xy)}{\sqrt{Q(xx) Q(yy)}}. \quad (1)$$

Eine  $n-1$ -dimensionale Grenzfläche  $G_{n-1}$  ist eine Hyperfläche, die mit der Fundamentalfläche eine  $n-2$ -dimensionale Hyperfläche zweiten Grades gemeinsam hat, die in einen Kegel degeneriert. Die Spitze dieses Kegels ist der unendlich ferne Punkt der  $G_{n-1}$ .

Sind  $A(x_i)$  und  $B(y_i)$  zwei Punkte, die auf einer Grenzfläche  $G_{n-1}$  liegen und sind  $U_1$  und  $U_2$  die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit der Fundamentalfläche, so ist von den Doppelpunkten der Involution  $U_1 U_2 AB$  der eine  $M(m_i)$  der Mittelpunkt, im nichteuclidischen Sinne, der Strecke  $AB$  und der andere  $N(n_i)$  der Punkt, den die  $n-1$ -dimensionale Polarebene von  $M$  bezüglich  $Q(xx)$  mit der Geraden  $AB$  gemeinsam hat. Machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \mu m_i &= \lambda x_i + \chi y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \\ \text{so ist} \quad \nu n_i &= \lambda x_i - \chi y_i, \end{aligned}$$

und es besteht die Bedingung  $Q(mn) = 0$ , oder

$$\lambda^2 Q(xx) - \chi^2 Q(yy) = 0.$$

Es ist daher  $\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{Q(xx)}}$  und  $\chi = \frac{\sigma}{\sqrt{Q(yy)}}$ , wo  $\sigma$  eine Konstante ist. Der Punkt N hat demnach die Koordinaten

$$\zeta n_i = \frac{x_i}{\sqrt{Q(xx)}} - \frac{y_i}{\sqrt{Q(yy)}}$$

Haben die  $n+1$  Punkte  $A_0, A_1 \dots A_n$  der Grenzfläche  $G_{n-1}$  die Koordinaten  $x_i^{(0)}$  bzw.  $x_i^{(1)} \dots x_i^{(n)}$ ,  $i=0,1 \dots n$ , so gehen die  $n-1$ -dimensionalen mittelnormalen Hyperebenen der  $n$  Strecken  $A_0A_1, A_0A_2, \dots A_0A_n$  durch den unendlich fernen Punkt von  $G_{n-1}$ . Die Pole  $N^{(h)}$  dieser Ebenen mit den Koordinaten

$$n_i^{(oh)} = \frac{x_i^{(0)}}{\sqrt{Q(x^{(0)} x^{(0)})}} - \frac{x_i^{(h)}}{\sqrt{Q(x^{(h)} x^{(h)})}}, \quad i=0,1 \dots n, \quad h=1,2 \dots n, \quad (2)$$

bestimmen eine  $n-1$ -dimensionale Hyperebene  $T_{n-1}$ , welche die Fundamentalfläche im unendlich fernen Punkte von  $G_{n-1}$  berührt. Sind

$$\tau t_i = \sum_{h=1}^n n_i^{(oh)} \xi_h, \quad i=0,1 \dots n,$$

die Koordinaten eines Punktes von  $T_{n-1}$ , so sind  $\xi_h$  die auf den Grundsimplex  $N^{(1)}, N^{(2)} \dots N^{(n)}$  bezogenen Koordinaten dieses Punktes. Die Gleichung der  $n-2$ -dimensionalen Fläche zweiten Grades, welche die Fundamentalfläche mit  $T_{n-1}$  gemeinsam hat, lautet dann  $Q(tt)=0$ , d. h.

$$\begin{aligned} \sum_{p,q=1}^n Q(\xi_p \xi_q u^{(op)} u^{(oq)}) &= \sum_{p,q=1}^n Q(u^{(op)} u^{(oq)}) \xi_p \xi_q = \\ \sum_{p=1}^n \xi_p \sum_{q=1}^n Q(u^{(op)} u^{(oq)}) \xi_q &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Da diese Fläche ein  $n-2$ -dimensionaler Kegel ist, so sind die  $n$  linearen Gleichungen

$$\sum_{q=1}^n Q(u^{(op)} u^{(oq)}) \xi_q = 0, \quad p=1,2 \dots n,$$

die man erhält, wenn man für  $\xi_p$  die Werte der Grundpunkte  $N^{(1)}, N^{(2)} \dots N^{(n)}$  in (3) einsetzt, voneinander linear abhängig, denn diese  $n$  Gleichungen charakterisieren die  $n-2$ -dimensionalen Polarebenen der Pole  $N^{(1)}, N^{(2)} \dots N^{(n)}$  bezüglich der Kegelfläche (3). Es ist also die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} Q(u^{(01)} u^{(01)}) & Q(u^{(01)} u^{(02)}) & Q(u^{(01)} u^{(03)}) & \dots & Q(u^{(01)} u^{(0n)}) \\ Q(u^{(02)} u^{(01)}) & Q(u^{(02)} u^{(02)}) & Q(u^{(02)} u^{(03)}) & \dots & Q(u^{(02)} u^{(0n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q(u^{(0n)} u^{(01)}) & Q(u^{(0n)} u^{(02)}) & Q(u^{(0n)} u^{(03)}) & \dots & Q(u^{(0n)} u^{(0n)}) \end{vmatrix} = 0$$

Setzt man für  $u^{(0p)}$  und  $u^{(0q)}$  die Ausdrücke (2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & Q(u^{(0p)} u^{(0q)}) \\ &= Q\left(\frac{x^{(0)}}{\sqrt{Q(x^{(0)} x^{(0)})}} - \frac{x^{(p)}}{\sqrt{Q(x^{(p)} x^{(p)})}}, \frac{x^{(0)}}{\sqrt{Q(x^{(0)} x^{(0)})}} - \frac{x^{(q)}}{\sqrt{Q(x^{(q)} x^{(q)})}}\right) \\ &= \frac{Q(x^{(0)} x^{(0)})}{Q(x^{(0)} x^{(0)})} - \frac{Q(x^{(0)} x^{(p)})}{\sqrt{Q(x^{(0)} x^{(0)})} \cdot Q(x^{(p)} x^{(p)})} \\ &\quad - \frac{Q(x^{(0)} x^{(q)})}{\sqrt{Q(x^{(0)} x^{(0)})} \cdot Q(x^{(q)} x^{(q)})} + \frac{Q(x^{(p)} x^{(q)})}{\sqrt{Q(x^{(p)} x^{(p)})} \cdot Q(x^{(q)} x^{(q)})} \end{aligned}$$

Nach (1) ist also

$$\begin{aligned} Q(u^{(0p)} u^{(0q)}) &= 1 - \operatorname{ch} \frac{A_0 A_p}{2k} - \operatorname{ch} \frac{A_0 A_q}{2k} + \operatorname{ch} \frac{A_p A_q}{2k} \\ &= 2 \operatorname{sh}^2 \frac{A_p A_q}{4k} - 2 \operatorname{sh}^2 \frac{A_0 A_p}{4k} - 2 \operatorname{sh}^2 \frac{A_0 A_q}{4k}, \end{aligned}$$

$$\text{da } \operatorname{ch} a - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2} \text{ ist.}$$

Setzt man  $r_{pq} = \operatorname{sh}^2 \frac{A_p A_q}{4k}$ ,

so ist  $Q(u^{(0p)} u^{(0q)}) = 2 r_{(pq)} - 2 r_{(0p)} - 2 r_{(0q)}$

und  $Q(u^{(0p)} u^{(0p)}) = -4 r_{(0p)}$ .

Setzt man in die Determinante ein, so erhält man, nachdem man jede Zeile durch 2 dividiert hat,

$$\begin{vmatrix} -2 r_{01} & ; & r_{12} - r_{01} - r_{02}; & r_{13} - r_{01} - r_{03}; & \dots & r_{1n} - r_{01} - r_{0n} \\ r_{21} - r_{02} - r_{01}; & -2 r_{02} & ; & r_{23} - r_{02} - r_{03}; & \dots & r_{2n} - r_{02} - r_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} - r_{0n} - r_{01}; & r_{n2} - r_{0n} - r_{02}; & r_{n3} - r_{0n} - r_{03}; & \dots & -2 r_{0n} \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{01}; & -2r_{01} & r_{12} - r_{01} - r_{02}; & \dots & r_{1n} - r_{01} - r_{0n} \\ r_{02}; & r_{21} - r_{02} - r_{01}; & -2r_{02} & \dots & r_{2n} - r_{02} - r_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{0n}; & r_{n1} - r_{0n} - r_{01}; & r_{n2} - r_{0n} - r_{02}; & \dots & -2r_{0n} \end{vmatrix}$$

Addiert man die erste Spalte zu den übrigen, so ergibt sich

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_{01}; & -r_{01} & r_{12} - r_{02}; & \dots & r_{1n} - r_{0n} \\ r_{01}; & r_{21} - r_{01} & -r_{02}; & \dots & r_{2n} - r_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{0n}; & r_{n1} - r_{01} & r_{n2} - r_{02}; & \dots & -r_{0n} \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0; & r_{01} & ; & r_{03} & ; & \dots & r_{0n} \\ 0 & 1; & 1 & ; & 1 & ; & \dots & 1 \\ 0 & r_{10}; & -r_{01} & ; & r_{12} - r_{02}; & \dots & r_{1n} - r_{0n} \\ 0 & r_{20}; & r_{21} - r_{01} & ; & -r_{02} & ; & \dots & r_{2n} - r_{0n} \\ \dots & \dots \\ 0 & r_{n0}; & r_{n1} - r_{0n} & ; & r_{n2} - r_{02}; & \dots & -r_{0n} \end{vmatrix}$$

Addiert man die erste Zeile zu den übrigen, ausgenommen die zweite, und vertauscht man nachher die beiden ersten Zeilen, so folgt:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & r_{01} & r_{02} & r_{03} & \dots & r_{0n} \\ 1 & r_{10} & 0 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & r_{n0} & r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Liegen die  $n + 1$  Punkte  $A_0, A_1 \dots A_n$  des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes auf einer Grenzfläche von  $n-1$  Dimensionen, so besteht zwischen ihnen die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \operatorname{sh}^2 \frac{s_{pq}}{4k} \end{vmatrix} = 0,$$

wobei  $s_{pq}$  der Abstand der Punkte  $A_p A_q$  ist.

Setzt man in der allgemeinen Massbestimmung [vergl. (1')] die Konstante  $k = \infty$ , so erhält man die euklidische Massbestimmung. Die Grenzflächen des hyperbolischen Raumes gehen dann über in die Ebenen gleicher Dimension des euklidischen Raumes.

Entwickelt man

$$\begin{aligned} r_{pq} = \operatorname{sh}^2 \frac{A_p A_q}{4k} &= \left[ \frac{A_p A_q}{4k} + \frac{(A_p A_q)^3}{(4k)^3 3!} + \dots \right]^2 \\ &= \left( \frac{A_p A_q}{4k} \right)^2 + \frac{R}{k^4}, \end{aligned}$$

wo  $R$  eine ganze rationale Funktion von  $\frac{1}{k}$  ist, und setzt man in (4) ein, so erhält man nachdem jede Zeile mit  $16k^2$  multipliziert und hernach  $k = \infty$  gesetzt worden ist:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & s_{01} & s_{02} & \dots & s_{0n} \\ 1 & s_{10} & 0 & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & s_{n0} & s_{n1} & s_{n2} & \dots & 0 \end{array} \right| = 0,$$

wo  $s_{pq}$  das Quadrat der Strecke  $A_p A_q$  ist. Das ist die von Kronecker<sup>2)</sup> gefundene Bedingung, welche  $n+1$  Punkte des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes zu erfüllen haben, wenn sie auf einer Hyperebene von  $n-1$  Dimensionen liegen.

