Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Solothurn

Band: 8 (1924-1928)

Artikel: Beziehung zwischen n+1 Punkten des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes, die auf einer Grenzfläche liegen

Autor: Dändliker, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-543242

Beziehung zwischen $n+1$ Punkten des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes, die auf einer Grenzfläche liegen.

Von Dr. K. DÄNDLIKER, *Solothurn.*

★

Zwischen den gegenseitigen Abständen von vier Punkten A_1, A_2, A_3 und A_4 einer Ebene besteht bekanntlich [1]) die Beziehung,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 1 & s_{21} & 0 & s_{23} & s_{24} \\ 1 & s_{31} & s_{32} & 0 & s_{34} \\ 1 & s_{41} & s_{42} & s_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei s_{pq} das Quadrat des Abstandes der Punkte $A_p A_q$ bedeutet.

Eine analoge Beziehung zwischen den Entfernungen von $n+2$ Punkten $A_0, A_1, \ldots A_{n+1}$ besteht für den n-dimensionalen Raum.

Es ist
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s_{pq} \end{vmatrix} = 0,$$

wo s_{pq} das Quadrat der Entfernung $A_p A_q$ ist. Diese Relation ist von Kroneker gefunden worden.[2])

In der hyperbolischen Geometrie des Raumes von drei Dimensionen nähert sich eine durch drei Punkte hindurchgehende Kugel bei wachsendem Radius nicht einer Ebene, sondern einer sog. Grenzfläche.[3]) Alle Geraden, welche die Grenzfläche unter rechtem Winkel schneiden, sind zueinander parallel, d. h. sie haben einen unendlich fernen Punkt gemeinsam, den unendlich fernen Punkt der Grenzfläche. Durch diesen unendlich fernen Punkt hindurch gehen auch die mittelnormalen Ebenen der Strecken, deren Endpunkte auf der Grenzfläche liegen. Durch drei Punkte sind zwei

---

[1]) Vergl. Kowalewsky, Einführung in die Determinantentheorie, p. 342.

[2]) Journ. f. Math. 72 (1870), p. 152 = Werke 1, p. 235.

[3]) Lobatschefsky-Engel, Zwei geom. Abhandlungen, p. 12 u. 191.

Grenzflächen bestimmt, die symmetrisch liegen bezüglich der durch die drei Punkte bestimmten Ebene. Liegen vier Punkte auf einer Grenzfläche, so besteht zwischen ihnen eine Beziehung.

Welche Beziehung besteht im n-dimensionalen hyperbolischen Raume zwischen $n+1$ Punkten, die auf einer $n-1$-dimensionalen Grenzfläche liegen?

Zur Einführung der allgemeinen Massbestimmung, die von Cayley-Klein im dreidimensionalen Raume eingeführt und von D'Ovideo auf den Raum von n-Dimensionen erweitert wurde, fixieren wir im Raume S_n von n-Dimensionen eine durch homogene Koordinaten dargestellte Hyperfläche zweiten Grades

$$Q\,(xx) = \sum_{h,\,i=0}^{n} a_{hi}\, x_h\, x_i$$

als absolutes Gebilde. Der Abstand zweier Punkte $A\,(x_i)$, $B\,(y_i)$ ist definiert durch

$$AB = k \cdot \lg\,(U_1\, U_2\, AB), \tag{1'}$$

wo k eine Konstante ist und wobei U_1 und U_2 die Punkte bedeuten, welche die Gerade AB mit dem absoluten Gebilde gemeinsam hat. Aus (1') folgt dann

$$\operatorname{ch} \frac{AB}{2\,k} = \frac{Q\,(xy)}{\sqrt{Q\,(xx)\; Q\,(yy)}}. \tag{1}$$

Eine n-1-dimensionale Grenzfläche G_{n-1} ist eine Hyperfläche, die mit der Fundamentalfläche eine n-2-dimensionale Hyperfläche zweiten Grades gemeinsam hat, die in einen Kegel degeneriert. Die Spitze dieses Kegels ist der unendlich ferne Punkt der G_{n-1}.

Sind $A\,(x_i)$ und $B\,(y_i)$ zwei Punkte, die auf einer Grenzfläche G_{n-1} liegen und sind U_1 und U_2 die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit der Fundamentalfläche, so ist von den Doppelpunkten der Involution U_1U_2AB der eine $M\,(m_i)$ der Mittelpunkt, im nichteuklidischen Sinne, der Strecke AB und der andere $N\,(n_i)$ der Punkt, den die n-1-dimensionale Polarebene von M bezüglich $Q\,(xx)$ mit der Geraden AB gemeinsam hat. Machen wir den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} \mu\, m_i &= \lambda\, x_i + \chi\, y_i, \\ \nu\, n_i &= \lambda\, x_i - \chi\, y_i, \end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1, \ldots n$$

so ist

und es besteht die Bedingung $Q\,(mn) = 0$, oder

$$\lambda^2\, Q\,(xx) - \chi^2\, Q\,(yy) = 0.$$

Es ist daher $\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{Q\,(xx)}}$ und $\chi = \frac{\sigma}{\sqrt{Q\,(yy)}}$, wo σ eine Konstante ist. Der Punkt N hat demnach die Koordinaten

$$\varsigma\, n_i = \frac{x_i}{\sqrt{Q\,(xx)}} - \frac{y_i}{\sqrt{Q\,(yy)}}$$

Haben die $n+1$ Punkte $A_0, A_1 \ldots A_n$ der Grenzfläche G_{n-1} die Koordinaten $x_i^{(0)}$ bezw. $x_i^{(1)} \ldots\ldots x_i^{(n)}$, $i = 0,1 \ldots n$, so gehen die n-1-dimensionalen mittelnormalen Hyperebenen der n Strecken $A_0A_1, A_0A_2, \ldots\ldots A_0A_n$ durch den unendlich fernen Punkt von G_{n-1}. Die Pole $N^{(h)}$ dieser Ebenen mit den Koordinaten

$$n_i^{(oh)} = \frac{x_i^{(o)}}{\sqrt{Q\,(x^{(o)}\,x^{(o)}}} - \frac{x_i^{(h)}}{\sqrt{(Q\,x^{(h)}\,x^{(h)})}}, \quad \begin{array}{l} i = 0,1 \ldots n \\ h = 1,2 \ldots n, \end{array} \tag{2}$$

bestimmen eine n-1-dimensionale Hyperebene T_{n-1}, welche die Fundamentalfläche im unendlich fernen Punkte von G_{n-1} berührt. Sind

$$\tau\, t_i = \sum_{h=1}^{n} n_i^{(oh)}\, \xi_h, \quad i = 0,1 \ldots\ldots n,$$

die Koordinaten eines Punktes von T_{n-1}, so sind ξ_h die auf den Grundsimplex $N^{(1)}, N^{(2)} \ldots N^{(n)}$ bezogenen Koordinaten dieses Punktes. Die Gleichung der n-2-dimensionalen Fläche zweiten Grades, welche die Fundamentalfläche mit T_{n-1} gemeinsam hat, lautet dann $Q\,(tt) = 0$, d. h.

$$\sum_{p,q=1}^{n} Q\,(\xi_p\,\xi_q\,u^{(op)}\,u^{(oq)}) = \sum_{p,q=1}^{n} Q\,(u^{(op)}\,u^{(oq)})\,\xi_p\,\xi_q =$$

$$\sum_{p=1}^{n} \xi_p \sum_{q=1}^{n} Q\,(u^{(op)}\,u^{(oq)})\,\xi_q = 0. \tag{3}$$

Da diese Fläche ein n-2-dimensionaler Kegel ist, so sind die n linearen Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{n} Q\,(u^{(op)}\,u^{(oq)})\,\xi_q = 0, \quad p = 1,2 \ldots\ldots n,$$

die man erhält, wenn man für ξ_p die Werte der Grundpunkte $N^{(1)}$ $N^{(2)} \ldots N^{(n)}$ in (3) einsetzt, voneinander linear abhängig, denn diese n Gleichungen charakterisieren die n-2-dimensionalen Polarebenen der Pole $N^{(1)}, N^{(2)} \ldots\ldots N^{(n)}$ bezüglich der Kegelfläche (3). Es ist also die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} Q(u^{(01)}u^{(01)}); & Q(u^{(01)}u^{(02)}); & Q(u^{(01)}u^{(03)}) \dots & Q(u^{(01)}u^{(0n)}) \\ Q(u^{(02)}u^{(01)}); & Q(u^{(02)}u^{(02)}); & Q(u^{(02)}u^{(03)}) \dots & Q(u^{(02)}u^{(0n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q(u^{(0n)}u^{(01)}); & Q(u^{(0n)}u^{(02)}); & Q(u^{(0n)}u^{(03)} \dots & Q(u^{(0n)}u^{(0n)}) \end{vmatrix} = 0$$

Setzt man für $u^{(0p)}$ und $u^{(0q)}$ die Ausdrücke (2) ein, so erhält man

$$Q\,(u^{(0p)}u^{(0q)})$$

$$= Q\left(\frac{x^{(0)}}{\sqrt{Q\,(x^{(0)}x^{(0)})}} - \frac{x^{(p)}}{\sqrt{Q\,(x^{(p)}x^{(p)})}};\ \frac{x^{(0)}}{\sqrt{Q\,(x^{(0)}x^{(0)})}} - \frac{x^{(q)}}{\sqrt{Q\,(x^{(q)}x^{(q)})}}\right)$$

$$= \frac{Q\,(x^{(0)}x^{(0)})}{Q\,(x^{(0)}x^{(0)})} - \frac{Q\,(x^{(0)}x^{(p)})}{\sqrt{Q\,(x^{(0)}x^{(0)})\cdot Q\,(x^{(p)}x^{(p)})}}$$

$$- \frac{Q\,(x^{(0)}x^{(q)})}{\sqrt{Q\,(x^{(0)}x^{(0)})\cdot Q\,(x^{(q)}x^{(q)})}} + \frac{Q\,(x^{(p)}x^{(q)})}{\sqrt{Q\,(x^{(p)}x^{(p)})\cdot Q\,(x^{(q)}x^{(q)})}}$$

Nach (1) ist also

$$Q\,(u^{(0p)}u^{(0q)}) = 1 - \mathrm{ch}\,\frac{A_0 A_p}{2\,k} - \mathrm{ch}\,\frac{A_0 A_q}{2\,k} + \mathrm{ch}\,\frac{A_p A_q}{2\,k}$$

$$= 2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{A_p A_q}{4\,k} - 2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{A_0 A_p}{4\,k} - 2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{A_0 A_q}{4\,k},$$

$$\text{da } \mathrm{ch}\,a - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{a}{2} \text{ ist.}$$

Setzt man $$r_{pq} = \mathrm{sh}^2\,\frac{A_p A_q}{4\,k},$$

so ist $$Q\,(u^{(0p)}u^{(0q)}) = 2\,r_{(pq)} - 2\,r_{(0p)} - 2\,r_{(0q)}$$

und $$Q\,(u^{(0p)}u^{(0p)}) = -4\,r_{(0p)}\,.$$

Setzt man in die Determinante ein, so erhält man, nachdem man jede Zeile durch 2 dividiert hat,

$$\begin{vmatrix} -2\,r_{01} & ;\ r_{12} - r_{01} - r_{02}; & r_{13} - r_{01} - r_{03}; \dots & r_{1n} - r_{01} - r_{0n} \\ r_{21} - r_{02} - r_{01}; & -2\,r_{02} & ;\ r_{23} - r_{02} - r_{03}; \dots & r_{2n} - r_{02} - r_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} - r_{0n} - r_{01}; & r_{n2} - r_{0n} - r_{02}; & r_{n3} - r_{0n} - r_{03}; \dots & -2\,r_{0n} \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ r_{01}; & -2\,r_{01}; & r_{12}-r_{01}-r_{02}; & \ldots\ldots & r_{1n}-r_{01}-r_{0n} \\ r_{02}; & r_{21}-r_{02}-r_{01}; & -2\,r_{02}; & \ldots\ldots & r_{2n}-r_{02}-r_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{0n}; & r_{n1}-r_{0n}-r_{01}; & r_{n2}-r_{0n}-r_{02}; & \ldots\ldots & -2\,r_{0n} \end{vmatrix}$$

Addiert man die erste Spalte zu den übrigen, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_{01}; & -r_{01}; & r_{12}-r_{02}; & \ldots & r_{1n}-r_{0n} \\ r_{01}; & r_{21}-r_{01}; & -r_{02}; & \ldots & r_{2n}-r_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{0n}; & r_{n1}-r_{01}; & r_{n2}-r_{02}; & \ldots & -r_{0n} \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0; & r_{01}; & r_{03}; & \ldots & r_{0n} \\ 0 & 1; & 1; & 1; & \ldots & 1 \\ 0 & r_{10}; & -r_{01}; & r_{12}-r_{02}; & \ldots & r_{1n}-r_{0n} \\ 0 & r_{20}; & r_{21}-r_{01}; & -r_{02}; & \ldots & r_{2n}-r_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & r_{n0}; & r_{n1}-r_{0n}; & r_{n2}-r_{02}; & \ldots & -r_{0n} \end{vmatrix}$$

Addiert man die erste Zeile zu den übrigen, ausgenommen die zweite, und vertauscht man nachher die beiden ersten Zeilen, so folgt:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & r_{01} & r_{02} & r_{03} & \ldots & r_{0n} \\ 1 & r_{10} & 0 & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & r_{n0} & r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Liegen die $n+1$ Punkte A_0, $A_1 \ldots A_n$ des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes auf einer Grenzfläche von n-1 Dimensionen, so besteht zwischen ihnen die Beziehung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \operatorname{sh}^2 \dfrac{s_{pq}}{4\,k} \end{vmatrix} = 0,$$

wobei s_{pq} der Abstand der Punkte $A_p\,A_q$ ist.

Setzt man in der allgemeinen Massbestimmung [vergl. (1')] die Konstante $k = \infty$, so erhält man die euklidische Massbestimmung. Die Grenzflächen des hyperbolischen Raumes gehen dann über in die Ebenen gleicher Dimension des euklidischen Raumes.

Entwickelt man

$$r_{pq} = sh^2 \frac{A_p A_q}{4k} = \left[\frac{A_p A_q}{4k} + \frac{(A_p A_q)^3}{(4k)^3 3!} + \ldots\ldots\right]^2$$
$$= \left(\frac{A_p A_q}{4k}\right)^2 + \frac{R}{k^4},$$

wo R eine ganze rationale Funktion von $\frac{1}{k}$ ist, und setzt man in (4) ein, so erhält man nachdem jede Zeile mit $16k^2$ multipliziert und hernach $k = \infty$ gesetzt worden ist:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 0 & s_{01} & s_{02} & \ldots\ldots & s_{0n} \\ 1 & s_{10} & 0 & s_{12} & \ldots\ldots & s_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 1 & s_{n0} & s_{n1} & s_{n2} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo s_{pq} das Quadrat der Strecke $A_p A_q$ ist. Das ist die von Kronecker [2]) gefundene Bedingung, welche $n + 1$ Punkte des n-dimensionalen euklidischen Raumes zu erfüllen haben, wenn sie auf einer Hyperebene von n-1 Dimensionen liegen.