

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn
<b>Herausgeber:</b>	Naturforschende Gesellschaft Solothurn
<b>Band:</b>	6 (1915-1919)
<b>Artikel:</b>	Über automorphe Funktionen die zu gewissen Untergruppen der Modulgruppe gehören
<b>Autor:</b>	Blaesi, Emil
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-543241">https://doi.org/10.5169/seals-543241</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

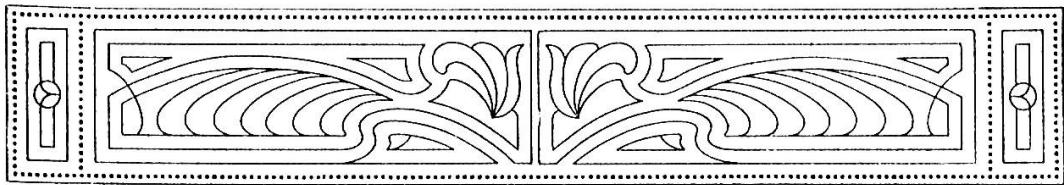
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



# Über automorphe Funktionen die zu gewissen Untergruppen der Modulgruppe gehören.

Von D<sup>r</sup> Emil Blaesi.



## Einleitung.



Die Anfänge der Entwicklung für die Theorie der automorphen Funktionen finden sich in den Werken von Riemann und Schwarz. Durch, von einander unabhängige, Arbeiten von Klein und Poincaré ist die Kenntnis dieser Funktionen rasch vertieft worden.

Wichtig für diese Theorie der automorphen Funktionen ist deren Festlegung durch analytische Ausdrücke, die die charakteristischen Eigenschaften leicht erkennen lassen. Diese Aufgabe wurde von Poincaré allgemein für Funktionen, die sich bei den Substitutionen der Fuchschen Gruppen nicht ändern, durch Aufstellen von Partialbruchreihen, den  $\Theta$ -Funktionen, gelöst.

R. Fueter<sup>1)</sup> hat für den Fall der zyklischen hyperbolischen Untergruppe der Modulgruppe ein spezielles Verfahren zur Konstruktion einer zugehörigen automorphen Funktion gegeben. Dazu werden nicht die Poincaréschen  $\Theta$ -Reihen benutzt, sondern unendliche Produkte, deren Bildung auf einem ähnlichen Prinzip be-

<sup>1)</sup> Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich LXIV (1919)  
pag. 680.

ruht, aber in natürlicher Weise eine zahlentheoretische Tatsache benutzt, nämlich die Theorie der Kettenbrüche, die mit den quadratischen Zahlen und somit auch mit den hyperbolischen Substitutionen in engem Zusammenhang steht.

Die Ausführung dieses Konstruktionsverfahrens ist der Zweck dieser Arbeit, die ich auf Anregung von Herrn Prof. Dr. R. Fueter im W.-S. 1918/19 in Angriff nahm und unter seiner Leitung zu Ende führte.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im I. Teil werden die gruppentheoretischen Grundlagen, soweit sie benutzt werden, entwickelt und der Zusammenhang mit den Kettenbrüchen hergestellt. Die Konstruktion der Grundinvarianten für die Substitutionen der zyklischen hyperbolischen Untergruppe mit reduzierten Fixpunkten wird im 1. Kapitel des II. Teils vollständig durchgeführt und auf ein spezielles Beispiel angewendet. Im 2. Kapitel wird bewiesen, dass die betrachteten Funktionen einen Körper bilden. Zum Schluss wird die Beschränkung auf reduzierte Fixpunkte fallen gelassen und gezeigt, dass in diesem Fall die automorphen Funktionen auf die schon konstruierten zurückgeführt werden können.

---

# I. Gruppentheoretischer Teil.

## § 1. Modulgruppe, hyperbolische Untergruppe; Zusammenhang mit den periodischen Kettenbrüchen.

Der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit ist die Modulgruppe. Sie wird gebildet durch die Transformationen

$$1) \quad z' = \frac{az + \beta}{\gamma z + \delta} = Sz,$$

in denen  $a, \beta, \gamma, \delta$  irgend welche positive oder negative ganze Zahlen. Aus dieser Gruppe können Untergruppen ausgesondert werden. Darunter sind, ausser den endlichen, sicher die zyklischen Gruppen hyperbolischer Substitutionen die einfachsten, da sie aus einer einzigen Erzeugenden 1)  $S = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  hervorgehen, deren Diskriminante

$$2) \quad m = (a + \delta)^2 - 4 > 1$$

ist. Ihre Fixpunkte, die Wurzeln  $\omega$  und  $\omega'$  der Gleichung

$$\omega = \frac{a\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

sind konjugierte, reelle, quadratische Irrationalzahlen. Umgekehrt ist jede solche Zahl Fixpunkt einer bestimmten unimodularen, hyperbolischen Substitution. Es gilt der fundamentale

**Satz.**<sup>1)</sup> Sind die irrationalen Punkte  $\omega$  und  $\omega'$  die Wurzeln einer ganzzahligen, quadratischen Gleichung, so gehört zu diesen Punkten als Fixpunkten jedesmal eine zyklische Gruppe hyperbolischer Modul-Substitutionen.

Die Substitution 1) lässt sich auf die Form bringen

$$3) \quad \frac{z' - \omega}{z' - \omega'} = \varrho \frac{z - \omega}{z - \omega'}.$$

Die Streckungskonstante

$$4) \quad \varrho = (a - \gamma\omega)^2 = \frac{a - \gamma\omega}{a - \gamma\omega'} = \frac{a + \delta - \sqrt{(a + \delta)^2 - 4}}{2} \\ = (\delta + \gamma\omega')^2$$

hat eine einfache zahlentheoretische Eigenschaft, sie ist nämlich die 2. Potenz der Grundeinheit  $\varepsilon$  des quadratischen Zahlkörpers  $k(\sqrt{m})$ .

<sup>1)</sup> Klein-Fricke Modulfunktionen I pag. 256.

Diese speziellen Gruppen hyperbolischer Modulsubstitutionen stehen also in naher Beziehung zum quadratischen Zahlkörper  $k(\sqrt{m})$ , ( $m = (a + \delta)^2 - 4$ ) und damit zur Theorie der periodischen Kettenbrüche, deren Teilnenner ganze rationale Zahlen sind, auf Grund der bekannten Tatsache, dass die Gesamtheit der reellen quadratischen Zahlen identisch mit der Gesamtheit der periodischen Kettenbrüche ist.

Für die Konstruktion der erwähnten automorphen Funktionen ist die Tatsache, dass die Fixpunkte reelle quadratische Zahlen sind, von fundamentaler Bedeutung. Zur Vereinfachung kann man zunächst diese quadratischen Zahlen speziell als reduziert voraussetzen, was keine wesentliche Einschränkung ist. Die erzeugende Substitution gewinnen wir, indem wir  $\omega$  in einen Kettenbruch entwickeln und die passende Potenz der ersten sich daraus ergebenden Substitution mit der Determinante  $+1$  wählen, die  $\omega$  ungeändert lässt.

Es seien hier noch ausführlicher die Grundtatsachen aus dem Gebiet der periodischen Kettenbrüche und der quadratischen Zahlen angeführt.<sup>1)</sup>

Eine reelle quadratische Irrationalzahl  $\omega = x + y\sqrt{m}$  heisst reduziert, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

$\omega$  ist positiv und grösser als 1

$\omega'$  ist negativ und absolut kleiner als 1,

wobei  $\omega'$  die zu  $\omega$  konjugierte Zahl ist. Es ist also

$$0 < y\sqrt{m} - x < 1 < y\sqrt{m} + x.$$

Jede reelle quadratische Irrationalzahl ist mit mindestens einer solchen reduzierten Zahl eigentlich äquivalent, d. h. durch eine unimodulare Substitution in sie überführbar. Wir betrachten immer nur eigentliche Äquivalenz.

Die quadratische Zahl  $\omega$  lässt sich nun in einen reinperiodischen Kettenbruch entwickeln:

$$5) \quad \omega = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{\nu-1} + \frac{1}{\omega}}}}$$

und es ist also

$$a_n = a_m \text{ für } n \equiv m \pmod{\nu}.$$

<sup>1)</sup> Betr. der Beweise c. f. Weber, Algebra, Bd. I. Braunschweig 1912, pag. 403 u. ff.

Die Gesamtheit der reduzierten quadratischen Irrationalzahlen ist mit der Gesamtheit der reinperiodischen Kettenbrüche identisch. Verwandeln wir den Kettenbruch 5) in einen gewöhnlichen Bruch, so erhalten wir, wenn wir nach  $r$  Gliedern abbrechen

$$6) \quad \omega = \frac{P_r \omega_r + P_{r-1}}{Q_r \omega_r + Q_{r-1}},$$

wo  $\omega_r$  wieder reduzierte Zahlen des Körpers  $k(\sqrt{m})$  und

$$l_r = \frac{P_r}{Q_r}$$

Näherungsbrüche sind. Berücksichtigen wir die Teilnenner bis und mit  $a_\nu$ , so ergibt sich

$$7) \quad \omega = \frac{P_\nu \omega + P_{\nu-1}}{Q_\nu \omega + Q_{\nu-1}} = \bar{S} \omega^1.$$

Auf diese Weise erhält man eine unimodulare Substitution, die  $\omega$  ungeändert lässt. Da ihre Determinante

$$P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1} = (-1)^\nu$$

ist, wählen wir für ungerades  $\nu$  als erzeugende Substitution der zyklischen Gruppe

$$8) \quad \begin{pmatrix} P_{2\nu} & P_{2\nu-1} \\ Q_{2\nu} & Q_{2\nu-1} \end{pmatrix} = S^2,$$

die wegen  $P_{2\nu} Q_{2\nu-1} - Q_{2\nu} P_{2\nu-1} = (-1)^{2\nu}$  wieder eine eigentliche Modulsubstitution ist.

**Satz.** Lässt die hyperbolische, unimodulare Substitution  $S$  die Fixpunkte  $\omega$  und  $\omega'$  ungeändert, so ist  $S$  eine gewisse Potenz der Substitution  $\bar{S}$ .

*Beweis.*<sup>2)</sup> Der Beweis stützt sich auf die Umkehrung des Lagrangeschen Satzes über Kettenbruchentwicklungen äquivalenter quadratischer Irrationalzahlen. Die Umkehrung lautet: Sind zwei quadratische Irrationalzahlen  $x$  und  $y$  ( $x = y$  inbegriffen) einander äquivalent

$$y = \frac{a x + \beta}{\gamma x + \delta} = S x \quad a \delta - \beta \gamma = \pm 1,$$

so lassen sich die Kettenbruchentwicklungen

$$I \begin{cases} x = (a_0, a_1, \dots, a_k, x_{k+1}) \\ y = (b_0, b_1, \dots, b_h, y_{h+1}) \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Die gruppentheoretische Symbolik wird so angewendet, dass man die Substitutionsbuchstaben links von der zu transformierenden Zahl der Reihe nach von rechts nach links schreibt.

<sup>2)</sup> Hurwitz, Vorlesungen über Zahlentheorie S.-S. 1914.

Weber, Algebra Bd. I, Braunschweig 1912, pag. 417.

so abbrechen, dass die Endungen  $x_{k+1} = y_{h+1}$  sind und die Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  durch Elimination der Endungen  $x_{k+1}$  und  $y_{h+1}$  aus den Gleichungen  $I)$  erhalten wird.

Dabei ist  $k$  nur an die Forderung  $x_{k+1} > 1$ ,  $k$  hinreichend gross aber sonst beliebig, gebunden.  $h$  ist durch  $k$  bestimmt.

Diesen Satz wenden wir folgendermassen an: Ist die Zahl  $\omega$ , vermöge einer beliebigen hyperbolischen unimodularen Substitution  $S$  mit den Fixpunkten  $\omega$  und  $\omega'$ , sich selbst eigentlich äquivalent, ist also

$$\omega = S\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

so lässt sich die Kettenbruchentwicklung von  $\omega$  auf zwei verschiedene Arten abbrechen

$$I' \begin{cases} \omega = (a_0, a_1, \dots, a_k, \omega_{k+1}) \\ \omega = (a_0, a_1, \dots, a_h, \omega_{h+1}^*) \end{cases}$$

so dass die Endungen  $\omega_{k+1} = \omega_{h+1}^*$  sind, und dass die Substitution  $S$  durch Elimination der Endungen aus  $I'$  erhalten wird.

Da  $\omega$  reduziert ist, ist  $\omega_{k+1} > 1$ . Ausserdem kann man  $k$  so gross wählen, dass

$$\omega_{k+1} = \omega_{h+1}^* = \omega$$

ist und dass  $k+1$  und  $h+1$  gerade sind.

Es ist dann  $k+1, h+1 \equiv 0 \pmod{v}$

und also  $k = 2rn-1, h = 2sn-1, n = \frac{v}{2}$  oder  $v$  je nachdem  $v$  gerade oder ungerade ist. Wir haben dann aus

$$I'' \begin{cases} \omega = (a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{2rn-1}, \omega_{2rn}) \\ \omega = (a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{2sn-1}, \omega_{2sn}^*) \end{cases}$$

die Endungen  $\omega_{2rn} = \omega_{2sn}^* = \omega$

zu eliminieren. Es ist aber

$$\omega = S^r \omega_{2rn}$$

$$\omega = \bar{S}^s \omega_{2sn}^*,$$

also

$$\omega_{2rn} = \bar{S}^{-r} \omega$$

$$\omega_{2sn}^* = \bar{S}^{-s} \omega$$

$$\bar{S}^{-r} \omega = \bar{S}^{-s} \omega.$$

Die Elimination ergibt

$$\omega = \bar{S}^{r-s} \omega = S^m \omega, \\ S = \bar{S}^m.$$

Daraus ergibt sich nach dem Lagrangeschen Satz, dass  $S$  mit  $\bar{S}^m$  identisch sein muss, wodurch der Satz bewiesen ist.

Bei der funktionentheoretischen Behandlung erledigen wir zuerst den Fall  $S = \bar{S}$ . Am Schluss wird dann gezeigt, dass die Konstruktion auch für beliebiges  $S$  ohne weiteres angewendet werden kann.

Die Kettenbruchentwicklung der nicht reduzierten quadratischen Irrationalzahlen  $\Omega$  ist auch periodisch, beginnt aber mit Vorziffern. Man hat

$$9) \quad \Omega = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_{\mu-1} + \frac{1}{\omega}}}}.$$

Daraus lässt sich der gewöhnliche Bruch bilden

$$10) \quad \Omega = \frac{p_{\mu} \omega + p_{\mu-1}}{q_{\mu} \omega + q_{\mu-1}} = S_*^{-1} \omega,$$

$$p_{\mu} q_{\mu-1} - q_{\mu} p_{\mu-1} = (-1)^{\mu}.$$

Ist  $\mu \not\equiv 0 \pmod{2}$  so verwenden wir

$$\Omega = \frac{p_{\mu-1} \omega_1 + p_{\mu}}{q_{\mu-1} \omega_1 + q_{\mu}},$$

wo  $\omega_1$  wieder eine reduzierte Zahl ist. Es gilt also

**Satz.** Es existiert immer eine Substitution  $S_*$ , sodass  $\Omega$  durch diese Substitution in eine reduzierte quadratische Zahl übergeführt wird, die mit ihr eigentlich äquivalent ist.

$$11) \quad \begin{aligned} S_* \Omega &= \omega \\ S_* \Omega' &= \omega' \quad a_* \delta_* - \beta_* \gamma_* = 1. \end{aligned}$$

Die Substitution  $S_*^{-1}$  führt daher  $\omega$  in  $\Omega$  über. Jede andere Substitution  $\bar{S}_*$ , die  $\omega$  in  $\Omega$  überführt, ist bestimmt durch

$$\bar{S}_* \omega = S_*^{-1} \omega = \Omega$$

also durch  $\omega = S_* \bar{S}_* \omega$ .

Die Substitutionen  $S_* \bar{S}_*$  haben  $\omega$  zum Fixpunkt, besitzen demnach die Form  $\bar{S}^{-n}$  ( $n$  beliebig), somit ist

$$\bar{S}_* = S_*^{-1} \bar{S}^{-n}.$$

Unter Benützung von  $\bar{S}$  erhalten wir

$$12) \quad S' \Omega = S_*^{-1} \bar{S} S_* \Omega = S_*^{-1} \omega = \Omega$$

und  $S'$  ist eine hyperbolische Modulsubstitution, die aus  $S$  durch Transformation mit  $S_*$  entsteht, also mit  $\bar{S}$  holoëdrisch isomorph ist. Sie lässt  $\Omega$  ungeändert.

Umgekehrt sei  $S'$  eine beliebige Substitution, die  $\Omega$  in sich überführt. Wegen

$$\begin{array}{ll} S_* \Omega = \omega \\ \text{folgt daraus} & S_* S' \Omega = \omega \\ \text{oder} & \Omega = S'^{-1} S_*^{-1} \omega. \end{array}$$

$S'^{-1} S_*^{-1}$  ist also eine Substitution  $\bar{S}_* = S_*^{-1} \bar{S}^{-n}$ , somit

$$S'^{-1} S_*^{-1} = S_*^{-1} \bar{S}^{-n}.$$

Lösen wir nach  $S'$  auf, so erhalten wir

$$\begin{array}{l} S_*^{-1} = S' S_*^{-1} \bar{S}^{-n}, \\ S' = S_*^{-1} \bar{S}^{-n} S_* . \end{array}$$

Jede Substitution  $S'$  mit den Fixpunkten  $\Omega$  und  $\Omega'$  ist also in der Form  $S_*^{-1} \bar{S}^{-n} S_*$  enthalten.

Wegen

$$S'_1 S'_2 z = S_*^{-1} \bar{S}_1 S_* S_*^{-1} \bar{S}_2 S_* z = S_*^{-1} S_1 S_2 S_*$$

ist  $S'$  wieder Erzeugende einer zyklischen hyperbolischen Gruppe.

Analog existiert zu jeder Gruppe mit der Erzeugenden  $S^r$  eine holoëdrisch isomorphe mit der Erzeugenden  $S_*^{-1} \bar{S}^r S_*$ .

## § 2. Zusammenstellung der benützten Tatsachen aus der Theorie der Kettenbrüche.

Zur Berechnung der Näherungsbrüche hat man bekanntlich die Rekursionsformel

$$\begin{array}{l} P_n = a_{n-1} P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = a_{n-1} Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{array} \quad P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n,$$

wobei zu setzen ist:

$$\begin{array}{l} P_0 = 1, \quad P_1 = a_0, \quad P_2 = a_0 a_1 + 1, \dots \\ Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = a_1, \dots \end{array}$$

Um später Einheitlichkeit in unserer Bezeichnung zu erhalten, erweitern wir diesen Algorithmus. Wir setzen nach rückwärts fort und erhalten für  $n < 0$

$$\begin{array}{l} P_n = P_{n+2} - a_{n+1} P_{n+1} \\ Q_n = Q_{n+2} - a_{n+1} Q_{n+1} \\ P_0 = 1, \quad P_{-1} = 0, \quad P_{-2} = 1, \quad P_{-3} = -a_{-2}, \dots \\ Q_0 = 0, \quad Q_{-1} = 1, \quad Q_{-2} = -a_{-1}, \quad Q_{-3} = a_{-1} a_{-2} + 1, \dots \end{array}$$

Für  $n < 0$  sind alle Näherungsbrüche negativ mit Ausnahme von  $P_{-1} = 0$ .

Nun beweisen wir eine Tatsache von fundamentaler Bedeutung, die der Ausgangspunkt der Konstruktion unserer Grundinvarianten sein wird.

Infolge der Periodizität ist

$$a_{n-1} = \frac{P_n - P_{n-2}}{P_{n-1}} = \frac{P_{n+\nu} - P_{n+\nu-2}}{P_{n+\nu-1}} = \dots$$

$$a_{n-1} = \frac{Q_n - Q_{n-2}}{Q_{n-1}} = \frac{Q_{n+\nu} - Q_{n+\nu-2}}{Q_{n+\nu-1}} = \dots$$

Daraus erhalten wir durch Rekursion und Anwendung eines bekannten Eliminationsverfahrens:

$$13) \begin{cases} P_n + \nu = P_\nu P_n + P_{\nu-1} Q_n, P_{n+\nu} = (-1)^\nu (P_n Q_{\nu-1} - P_{\nu-1} Q_n) \\ Q_n + \nu = Q_\nu P_n + Q_{\nu-1} Q_n, Q_{n+\nu} = (-1)^\nu (-P_n Q_\nu + P_\nu Q_n). \end{cases}$$

Durch Quotientenbildung ergibt sich

$$13') l_{n+\nu} = \frac{P_\nu l_n + P_{\nu-1}}{Q_\nu l_n + Q_{\nu-1}} = \bar{S} l_n, l_{n+\nu} = \frac{Q_{\nu-1} l_n - P_{\nu-1}}{-Q_\nu l_n + P_\nu} = S^{-1} l_n.$$

Bei Anwendung unserer Substitution  $\bar{S}$  werden Näherungsbrüche wieder in solche übergeführt.

Eine Tatsache, die auch benutzt wird, ist folgende:

$$14) -\frac{1}{\omega'} = a_{\nu-1} + \frac{1}{a_{\nu-2}} + \dots + \frac{1}{a_0} + \frac{1}{-\frac{1}{\omega'}}.$$

Wenn  $\omega'_r$  die zu der in 6) definierten Zahl  $\omega_r$  ( $r = 0, 1, 2 \dots \nu-1$ ) konjugierte Zahl ist, so gilt

$$15) -\frac{1}{\omega'_r} = a_{r-1} + \frac{1}{a_{r-2}} + \dots + \frac{1}{a_{\nu-1}} + \frac{1}{a_{\nu-2}} + \dots + \frac{1}{a_r} + \frac{1}{-\frac{1}{\omega'_r}}.$$

Die Näherungsbrüche der konjugierten Zahlen stehen in einfacher Beziehung zu einander. Seien die von  $\omega'$  mit  $l'_n$  bezeichnet, so ist

$$P'_n = (-1)^n Q_{-n-1} \quad Q_n = (-1)^{n+1} P'_{-n-1}$$

$$Q'_n = (-1)^n P_{-n-1} \quad P_n = (-1)^{n+1} Q'_{-n-1}$$

und daraus folgt

$$l'_n = -\frac{1}{l_{-n-1}}.$$

Betrachten wir noch die Näherungsbrüche  $L_n$  der nicht reduzierten Zahl  $\Omega$ . Es ist

$$\begin{aligned} p_\mu &= b_{\mu-1} p_{\mu-1} + p_{\mu-2} \\ p_{\mu+1} &= a_0 p_\mu + p_{\mu-1} = P_1 p_\mu + Q_1 p_{\mu-1} \\ \hline p_{\mu+n} &= a_{n-1} p_{\mu+n-1} + p_{\mu+n-2} \\ &= a_{n-1} (P_{n-1} p_\mu + p_{\mu-1} Q_{n-1}) + P_{n-2} p_\mu + Q_{n-2} p_{\mu-1} \\ &= p_\mu (a_{n-1} P_{n-1} + P_{n-2}) + p_{\mu-1} (a_{n-1} Q_{n-1} + Q_{n-2}) \\ &= p_\mu P_n + p_{\mu-1} Q_n, \end{aligned}$$

so dass wir erhalten:

$$\begin{aligned} p_{\mu+n} &= p_\mu P_n + p_{\mu-1} Q_n \\ q_{\mu+n} &= q_\mu P_n + q_{\mu-1} Q_n \end{aligned}$$

und daraus

$$16) \quad L_{\mu+n} = \frac{p_\mu l_n + p_{\mu-1}}{q_\mu l_n + q_{\mu-1}} = S_*^{-1} l_n.$$

$S_*$  führt also nicht nur  $\Omega$  in  $\omega$  über, sondern es gilt auch

$$17) \quad S_* L_n = l_{n-\mu},$$

wo  $\mu$  die Anzahl der Vorziffern bedeutet.

### § 3. Geometrische Darstellung.

Die betrachteten unimodularen hyperbolischen Substitutionen sollen wie üblich als Transformationen der Ebene in sich gedeutet werden. Es sei

$$S = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad a\delta - \beta\gamma = 1.$$

Die Fixpunkte  $\omega$  und  $\omega'$  sind die Wurzeln der Gleichung

$$\gamma z^2 - (a - \delta) z - \beta = 0,$$

also

$$\omega, \omega' = \frac{a - \delta \pm \sqrt{(a + \delta)^2 - 4}}{2\gamma} = \frac{a - \delta \pm \sqrt{m}}{2\gamma}.$$

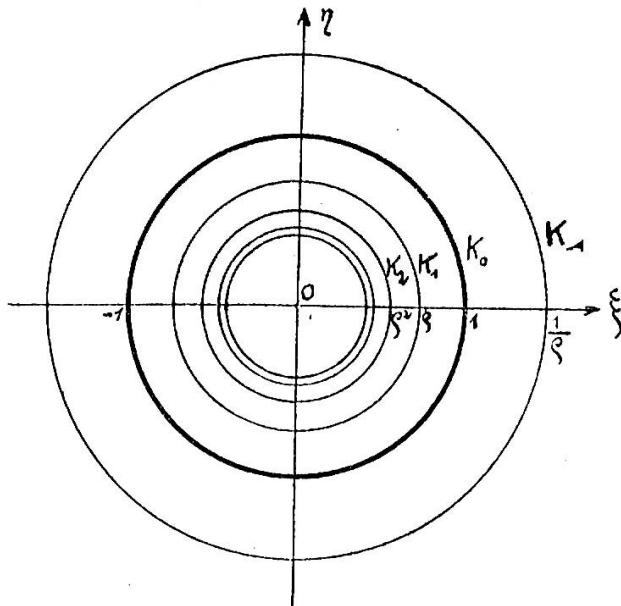
Es sind demnach Zahlen des quadratischen Zahlkörpers  $k(\sqrt{m})$ . Deuten wir sie auf der reellen Achse, so liegen sie in Bezug auf  $\frac{a - \delta}{2\gamma}$  symmetrisch. Die geometrische Deutung wird besonders einfach, wenn in der Fixpunktform 3) eine neue Variable eingeführt wird, wodurch die Fixpunkte nach  $0$  und  $\infty$  zu liegen kommen. Wir setzen

$$\zeta = Tz = \frac{z - \omega}{z - \omega'} \quad z = \frac{\omega' \zeta - \omega}{\zeta - 1}$$

und erhalten

$$18) \quad \xi' = \varrho \xi.$$

Diese Substitution bedeutet eine einfache Ähnlichkeitstransformation, also eine Streckung. Jede Gerade durch den Nullpunkt geht in sich über und die Kreise um  $z = 0$  vertauschen sich.



Die  $n^{\text{te}}$  Potenz der betrachteten Substitution wird in unserer Ebene dargestellt durch

$$\xi' = \varrho^n \xi.$$

Wegen  $\varrho' = \frac{a + \delta + \sqrt{(a + \delta)^2 - 4}}{2} > 1 \quad (a + \delta > 2)$

und

$$\varrho \varrho' = 1,$$

folgt  $0 < \varrho < 1$ .

Wir erhalten also unendlich viele von einander verschiedene Substitutionen. Unsere Gruppe ist deshalb von unendlich hoher Ordnung.

Betrachten wir den allgemeinen Fall, so liegen die Verhältnisse ähnlich. An Stelle von  $z = 0, \infty$  treten beliebige Fixpunkte. Statt des Systems der Geraden durch  $z = 0$  und des Systems der Kreise um  $z = 0$  treten die Kreisscharen auf, die durch die Abbildung

$$\xi' = \frac{z' - \omega}{z' - \omega'}, \quad \xi = \frac{z - \omega}{z - \omega'},$$

entstehen; also Kreise durch  $\omega$  und  $\omega'$  und dazu orthogonale.

Wir betrachten nun die durch unsere Erzeugende  $S$  entstandene Gruppe und bestimmen den Diskontinuitätsbereich. Wir gehen wieder aus von

$$\xi' = \varrho \xi.$$

Die Gruppe wird dann dargestellt durch

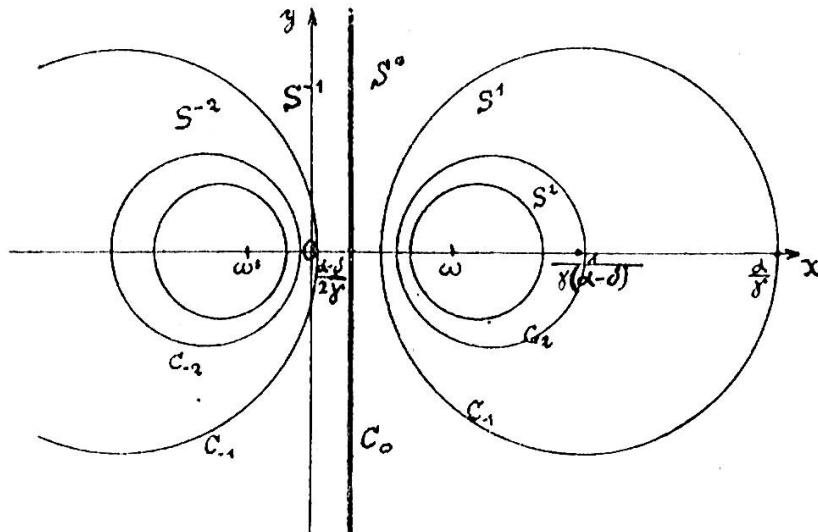
$$\zeta' = \varrho^n \zeta . \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ein beliebiger Kreis  $K_0$  um  $\zeta = 0$  wird bei Ausübung der Substitution in einen kleineren konzentrischen Kreis  $K_1$  transformiert.

Der Punktbereich zwischen den beiden Kreisen inkl.  $K_0$  (oder  $K_1$ ) bildet einen Diskontinuitätsbereich für unsere Gruppe.

Speziell wählen wir für  $K_0$  den Einheitskreis, dann ist  $K_1$  der Kreis mit dem Radius  $\varrho$ . Das Zwischengebiet samt dem Einheitskreis bildet dann den Diskontinuitätsbereich, während der Kreis mit dem Radius  $\varrho$  nicht mehr dazu gehören soll.

Dem Einheitskreis entspricht in der ursprünglichen, der  $z$ -Ebene, die Senkrechte  $C_0$  zur Abszissenachse, die diese im Punkte  $\frac{a-\delta}{2\gamma}$  schneidet.



Dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius  $\varrho$  entspricht der Kreis  $C_1$  der die Abszissenachse in den Punkten  $\frac{a}{\gamma}$  und  $\frac{a^2 + \beta\gamma - 1}{\gamma(a + \delta)}$  schneidet, was mit Hilfe der Substitution

$$\zeta = \frac{z - \omega}{z - \omega'} = Tz$$

leicht nachzuprüfen ist. Sein Mittelpunkt ist

$$\frac{\frac{a}{\gamma} - \frac{a^2 + \beta\gamma - 1}{\gamma(a + \delta)}}{2} = \frac{1}{\gamma(a + \delta)}$$

Das Gebiet zwischen der Geraden  $C_0$  und dem Kreis  $C_1$  bildet den Diskontinuitätsbereich. Die Gerade  $C_0$  wird dazu gerechnet.

Wird dieser Bereich durch eine Substitution  $S^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) unserer Gruppe transformiert, so erhalten wir einen neuen Diskontinuitätsbereich, der für  $n > 0$  innerhalb  $C_1$ , für  $n < 0$  links von  $C_0$  liegt.

Wir haben gesehen, dass man jede unimodulare hyperbolische Substitutionsgruppe mit reduzierten Fixpunkten auf eine Potenz  $S^k$ , der aus dem Kettenbruch sich ergebenden Substitution, zurückführen kann. Die Beziehung zwischen den repräsentierenden Figuren besteht in der Zusammenfassung der Diskontinuitätsbereiche, indem die Gruppe mit der Erzeugenden  $S$  eine Untergruppe der Gruppe mit der Erzeugenden  $\bar{S}$  ist.

Für den Fall, dass die Fixpunkte nicht reduziert sind, haben wir eingesehen, dass eine der vorgelegten Gruppe isomorphe Gruppe mit reduzierten Fixpunkten existiert. Unsere funktionentheoretische Aufgabe wird sich auf die Konstruktion der Funktion dieser isomorphen Gruppe mit reduzierten Fixpunkten reduzieren. Wir wollen noch überlegen, inwiefern unsere die Gruppe versinnlichende Kreisfigur (zwei zu einander orthogonale Büschel) durch den Übergang zur isomorphen Gruppe deformiert wird. Dazu führen wir ein Exzentrizitätsmass der Büschel ein. Wir gehen von der Formel aus, die den Mittelpunkt und den Radius eines Kreises festlegt, in den ein gegebener Kreis bei Inversion  $\omega = \frac{1}{z}$  übergeht.

$$\begin{aligned} \text{Mittelpunkt } c &\rightarrow \frac{\bar{c}}{|c|^2 - r^2} \quad (c \text{ konjugiert zu } \bar{c}) \\ \text{Radius } r &\rightarrow \frac{r}{|c^2| - r^2} \end{aligned}$$

und wenden das auf die in ihre Bestandteile zerlegten Substitution

$$z = T^{-1} \xi = \frac{\omega' \xi - \omega}{\xi - 1} \quad (z = x + iy)$$

an; so kann man leicht einsehen, dass die *Gleichung der Orthogonalkreise* folgendermassen lautet:

$$19) \quad x^2 + y^2 - 2x/\omega + \mu(\omega - \omega')/ + / \omega^2 + \mu(\omega^2 - \omega'^2) / = 0$$

$$\text{Mittelpunkt: } \frac{\omega - r^2 \omega'}{1 - r^2}$$

$$\text{Radius: } \frac{(\omega - \omega') r}{|1 - r^2|};$$

dabei ist der Parameter

$$\mu = \frac{r^2}{1-r^2},$$

wo  $r$  der Radius des entsprechenden Kreises in der  $\xi$ -Ebene ist. Man sieht z. B., dass dem Nullkreis  $r=0$  der Nullkreis

$$(x-\omega)^2 + y^2 = 0, \text{ d. h. } x = \omega, y = 0$$

und dem Nullkreis  $r=\infty$  der Kreis

$$(x-\omega')^2 + y^2 = 0, \text{ d. h. } x = \omega', y = 0,$$

also die Ponceletschen Nullkreise des hyperbolischen Büschels entsprechen.

Nebenbei sei bemerkt, dass *die Gleichung der Kreise durch  $\omega$  und  $\omega'$*  folgendermassen lautet:

$$20) \quad x^2 + y^2 - (\omega + \omega')x - (\omega - \omega')\nu y + \omega\omega' = 0,$$

wo der Parameter

$$\nu = \operatorname{ctg} a$$

und  $a$  die Neigung des entsprechenden Strahles gegen die Abszissenachse der  $\xi$ -Ebene ist. Diese Formel folgt daraus, dass bei Inversion eine Gerade mit dem Büschelzentrum  $z_0$  und mit der Neigung  $a$  in einen Kreis mit dem Mittelpunkt

$$\frac{1}{2} \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}}{\Re \left[ z_0 e^{i\left(\frac{\pi}{2}-a\right)} \right]}$$

und dem Radius

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\left| \Re \left[ z_0 e^{i\left(\frac{\pi}{2}-a\right)} \right] \right|}$$

übergeht, dabei bedeutet  $\Re \left[ z_0 e^{i\left(\frac{\pi}{2}-a\right)} \right]$  den reellen Teil des Klammerausdruckes.

Nun führen wir die absolute Abweichung eines Orthogonalkreismittelpunktes vom Nachbarnullkreis  $\omega$  bzw.  $\omega'$  als Mass der Exzentrizität ein:

$$e_\omega = \left| \frac{\omega - r^2 \omega'}{1 - r^2} - \omega \right| = \frac{(\omega - \omega')r^2}{1 - r^2} = r_* r,$$

wo  $r_*$  der Radius in der Modulfigur ist.

$$e_{\omega'} = \left| \frac{\omega - r^2 \omega'}{1 - r^2} - \omega' \right| = \frac{\omega - \omega'}{r^2 - 1}.$$

Es seien nun  $\Omega$  und  $\Omega'$  nicht reduzierte Fixpunkte einer hyperbolischen Substitutionsgruppe,  $\omega$  und  $\omega'$  die reduzierten der isomorphen Gruppe. Es ist dann

$$\begin{aligned}\Omega - \Omega' &= \frac{p_\mu \omega + p_{\mu-1}}{q_\mu \omega + q_{\mu-1}} - \frac{p_\mu \omega' + p_{\mu-1}}{q_\mu \omega' + q_{\mu-1}} \\ &= \frac{\omega - \omega'}{(q_\mu \omega + q_{\mu-1})(q_\mu \omega' + q_{\mu-1})}.\end{aligned}$$

Es handelt sich nun darum, zu  $r$  in der  $\xi$ -Ebene der zu  $\omega, \omega'$  gehörenden Figur das entsprechende  $R$  in der  $\xi$ -Ebene der zu  $\Omega, \Omega'$  gehörenden Figur zu bestimmen.

$$\begin{aligned}R &= T_1 S_*^{-1} T^{-1} r & T_1 z &= \frac{z - \Omega}{z - \Omega'} \\ R &= \frac{p_\mu \frac{\omega' r - \omega}{r - 1} + p_{\mu-1}}{q_\mu \frac{\omega' r - \omega}{r - 1} + q_{\mu-1}} - \Omega \\ R &= \frac{p_\mu \frac{\omega' r - \omega}{r - 1} + p_{\mu-1}}{q_\mu \frac{\omega' r - \omega}{r - 1} + q_{\mu-1}} - \Omega' \\ 21) \quad R &= \frac{q_\mu \omega' + q_{\mu-1}}{q_\mu \omega + q_{\mu-1}} r = c \cdot r,\end{aligned}$$

sodass jetzt das Exzentrizitätsmass ist:

$$\begin{aligned}e_\Omega &= \frac{\Omega - \Omega'}{1 - R^2} \cdot R^2 \\ &= \frac{\omega - \omega'}{(q_\mu \omega + q_{\mu-1})(q_\mu \omega' + q_{\mu-1})} \cdot \frac{\left(\frac{q_\mu \omega' + q_{\mu-1}}{q_\mu \omega + q_{\mu-1}}\right)^2 r^2}{1 - \left(\frac{q_\mu \omega' + q_{\mu-1}}{q_\mu \omega + q_{\mu-1}}\right)^2 r^2} \\ &= \frac{\omega - \omega'}{q_\mu \omega + q_{\mu-1}} \cdot \frac{(q_\mu \omega' + q_{\mu-1}) r^2}{(q_\mu \omega + q_{\mu-1})^2 - (q_\mu \omega' + q_{\mu-1})^2 r^2}.\end{aligned}$$

Als Verhältnis der beiden Exzentrizitäten ergibt sich

$$\frac{e_\Omega}{e_\omega} = \frac{q_\mu \omega' + q_{\mu-1}}{q_\mu \omega + q_{\mu-1}} \cdot \frac{1 - r^2}{(q_\mu \omega + q_{\mu-1})^2 - (q_\mu \omega' + q_{\mu-1})^2 r^2},$$

dabei ist  $r < 1$

$$\text{und } \frac{e_{\Omega'}}{e_{\omega'}} = \frac{q_\mu \omega + q_{\mu-1}}{q_\mu \omega' + q_{\mu-1}} \cdot \frac{r^2 - 1}{(q_\mu \omega' + q_{\mu-1})^2 r^2 - (q_\mu \omega + q_{\mu-1})^2}.$$

## II. Funktionentheoretischer Teil.

### 1. Kapitel.

#### Die Grundinvariante und ihre analytische Darstellung.

##### § 1. Gedanken der Konstruktion der Grundinvarianten und Vergleich mit andern Konstruktionsmethoden.

Das Ziel der funktionentheoretischen Aufgabe ist, alle Funktionen zu gewinnen, die gegenüber der hyperbolischen zyklischen Modulgruppe invariant sind und ausser in den beiden Fixpunkten, in denen sie wesentlich singulär sind, höchstens Pole besitzen. Zunächst ist unsere Absicht, eine einfache Grundinvariante zu konstruieren. Es soll nun das Verfahren erläutert werden, von dem wir Gebrauch machen, um diese einfachste automorphe Funktion unserer Gruppe zu gewinnen.

Die Tatsache, dass zu jeder quadratischen Zahl nur endlich viele reduzierte gehören, die mit ihr im weitern Sinne äquivalent sind, wurde schon betont. Diese dienen sozusagen als Repräsentanten der Zahl. Das ermöglicht uns, bei der Konstruktion der automorphen Funktion zunächst die Fixpunkte als reduzierte Zahlen anzunehmen. Es wird dann gezeigt, dass bei nicht reduzierten Fixpunkten die Konstruktion ohne weiteres mit Hilfe der schon gefundenen Funktionen ausgeführt werden kann.

Allgemein besteht das Prinzip, automorphe Funktionen durch analytische Ausdrücke festzulegen darin, dass man Reihen oder Produkte herstellt, in denen sich bei Ausführung der Transformationen der Gruppe einfach die Glieder vertauschen, wobei eventuell gewisse Faktoren ausgesondert werden, die dann entweder durch Quotientenbildung oder logarithmische Differentiation weggeschafft werden.

Ganz prinzipiell und in allgemeiner Form ist diese Konstruktion von Poincaré<sup>1)</sup> zur Bildung der  $\Theta$ -Reihen angewandt worden. Aber dasselbe Prinzip ist natürlich auch in der Jacobischen, wie

<sup>1)</sup> Poincaré, Acta mathematica Bd. 1, pag. 193 (1882).

in der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen und ebenso zur Bildung der Eisensteinschen Reihen der Modulfunktionen benutzt worden. Indem man die  $\vartheta$ -Funktionen als Produkte konstruiert, geht man bewusst von diesem Prinzip aus und wählt die Faktoren entsprechend aus. In der Weierstraßschen Theorie ist das unmittelbar ersichtlich bei der Bildung von  $\varphi'(z)$ . Es ist

$$\varphi'(z) = -2 \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{(z - (m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2))^3},$$

was der Poincaréschen  $\Theta$ -Reihe

$$\Theta(z) = \sum \frac{1}{\left( \frac{a_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} \right)^3} \cdot \frac{1}{(\gamma_\nu z + \delta_\nu)^4}, \quad \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$$

entspricht, die aber nicht nur  $\Theta$ -Reihe, sondern zugleich auch automorphe Funktion ist. Von weniger grosser Wichtigkeit ist bei diesen Konstruktionen, dass die sich verschiebenden Faktoren, wie z. B. bei der  $\sigma(u)$ -Funktion, die Nullstellen der Funktion liefern.

Ausgangspunkt für die zu betrachtenden Funktionen ist

$$1) \quad E_k(z, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \frac{z}{l_{\nu n+2k}}}{1 - \frac{z}{l_{\nu n+2k+1}}}; \quad k = 0, 1, \dots, \frac{\nu}{2} - 1.$$

Falls  $l_{-1} = 0$  auftritt setzen wir als Faktor  $\frac{l_{-2} - z}{-z}$ .

Diese Funktion besitzt  $l_{\nu n+2k}$  zu Nullstellen,  $l_{\nu n+2k+1}$  zu Polen und besitzt in  $\omega$  und  $\omega'$  je eine wesentliche Singularität. Die bestimmenden Elemente  $l_{\nu n+2k}$  und  $l_{\nu n+2k+1}$  der Funktion  $E_k(z, \omega)$  sollen ähnlich wie bei der  $\sigma(u)$ -Funktion zu Polen der automorphen Funktion werden. Im gruppentheoretischen Teil haben wir gesehen, dass die erzeugende Substitution  $\bar{S}$ , die  $\omega$  in sich überführt, zugleich auch die Näherungsbrüche  $l_n$  untereinander vertauscht. Es gilt folgendes

<sup>1)</sup> Verschiedene  $k$  entsprechen verschiedene Funktionen, die durch dasselbe Verfahren konstruiert werden können. Dadurch werden alle Näherungsbrüche ausgenutzt.

Fundamentallemma: Jeder Faktor  $\frac{1 - \frac{z}{l_{vn+2k}}}{1 - \frac{z}{l_{vn+2k+1}}}$  der Funktion  $E_k(z, \omega)$  geht bei Ausübung einer Substitution der Gruppe auf  $z$  bis auf einen konstanten Faktor in einen Ausdruck über, in dem die inverse Substitution ausgeführt wird, aber nicht auf  $z$ , sondern auf  $l_n$ .

Es ist

$$2) \quad \frac{1 - \frac{Sz}{l_{vn+2k}}}{1 - \frac{Sz}{l_{vn+2k+1}}} = k \frac{1 - \frac{z}{S^{-1}l_{vn+2k}}}{1 - \frac{z}{S^{-1}l_{vn+2k+1}}} \quad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Hier sind  $S^{-1}l_i$  wieder Näherungsbrüche, und es ist

$$k = \frac{l_{vn+2k+1}}{l_{vn+2k}} \cdot \frac{\delta l_{vn+2k} - \beta}{\delta l_{vn+2k+1} - \beta}.$$

Die Faktoren sind also so gebildet, dass sie bei Ausübung einer Substitution der Gruppe einfach unter sich vertauscht werden.

Üben wir in  $E_k(z, \omega)$  auf  $z$  eine Substitution der Gruppe aus, so wird ein konstanter Faktor abgesondert. Es ist nicht nötig, im Produkt noch konvergenzerzeugende Faktoren hinzuzufügen. Seine Konvergenz ist leicht nachzuweisen, indem man je einen Quotienten zusammenfasst und benutzt, dass  $P_n$  und  $Q_n$  stärker wachsen als  $n$  selbst,<sup>1)</sup> eine Tatsache, die bei allen unsern Konvergenzbeweisen benutzt wird.

Im weitern ist das Prinzip, das benutzt wird, um mit Hilfe von  $E_k(z, \omega)$  die Grundinvariante zu bilden, logarithmische Differentiation. Dabei fällt der, bei Ausübung einer Substitution unserer Gruppe auf  $z$  auftretende, konstante Faktor fort. Es ist aber zu beachten, dass die Ableitung einer automorphen Funktion im allgemeinen selbst nicht automorph ist, sodass noch Faktoren hinzugefügt werden müssen, um gewisse, durch Differentiation der Substitutionsausdrücke entstandene, Faktoren aufzuheben.

Allgemein kann aus einer automorphen Funktion mit zwei im Endlichen liegenden, wesentlich singulären Punkten, durch Verlegen dieser Punkte nach  $0$  und  $\infty$  eine multiplikativperiodische Funktion hergestellt werden.

<sup>1)</sup> Weber, Algebra Bd. I. Braunschweig 1912, p. 405.

Sei nämlich  $A(z)$  eine automorphe Funktion mit den beiden Grenzpunkten  $z_1$  und  $z_2$ , so ist also

$$3) \quad A(Sz) = A(z), \quad S = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Machen wir nun die Substitution

$$x = \frac{z - z_1}{z - z_2} = Tz,$$

so entsprechen den Punkten  $z = z_1$ ,  $z = z_2$   
die Punkte  $x = 0$ ,  $x = \infty$

und es sei

$$4) \quad A(z) = U(x) = U(Tz).$$

Nun sei ferner  $w = Sz$ , dann besteht die Beziehung

$$Tw = \frac{w - z_1}{w - z_2} = \varrho \frac{z - z_1}{z - z_2} = \varrho x = \varrho Tz.$$

Da  $z = T^{-1}x$  ist, erhalten wir schliesslich

$$U(\varrho x) = U(\varrho Tz) = U(Tw) = A(w)$$

und da nach 3) und 4)

$$A(w) = A(Sz) = A(z) = U(x)$$

ist, ergibt sich

$$5) \quad U(\varrho x) = U(x).$$

$U(x)$  ist also eine multiplikativperiodische Funktion. In unserem Falle haben wir es mit einer besondern Art dieser Funktionen zu tun. Sie entstehen aus den automorphen Funktionen der zyklischen hyperbolischen Untergruppe der Modulgruppe. Ihre Periode ist das Quadrat der Grundeinheit im quadratischen Zahlkörper  $k(\sqrt{m})$ .

## § 2. Durchführung des Konstruktionsplanes. Partialbruchzerlegung.

Wie bereits erwähnt wurde, gehen wir aus von der Funktion

$$E_k(z, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \frac{z}{l_{\nu n+2k}}}{1 - \frac{z}{l_{\nu n+2k+1}}}; \quad k=0, 1, \dots, \frac{\nu}{2}-1.$$

Der Faktor  $\frac{1 - \frac{z}{l_{-2}}}{1 - \frac{z}{l_{-1}}}$  verschwindet wegen  $l_{-1} = 0$ . Er ist vor-  
kommenden Falls durch  $\frac{l_{-2} - z}{-z}$  zu ersetzen. Im I. Teil § 2 13')  
haben wir gesehen, dass

$$l_{\nu-2k} = \bar{S} l_{2k}$$

$$l_{\nu\nu-2k} = \bar{S}^n l_{2k}$$

ist. Aus diesem Grund können wir schreiben:

$$6) \quad E_k(z, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \frac{z}{\bar{S}^n l_{2k}}}{1 - \frac{z}{l_{\nu n-2k-1}}}.$$

Dieses unendliche Produkt konvergiert absolut und gleichmäßig für jeden Bereich, der die Punkte  $\omega, \omega'$  und  $\bar{S}^n l_{2k-1}$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) nicht enthält.

**Konvergenzbeweis.** Nach dem Weierstraßschen Konvergenzkriterium<sup>1)</sup> ist das obige Produkt absolut und gleichmäßig konvergent, da auf Grund der Eigenschaften der Kettenbrüche

$$\left| \frac{1 - \frac{z}{l_{\nu n-2k}}}{1 - \frac{z}{l_{\nu n-2k-1}}} - 1 \right| = |z| \left| \frac{\frac{1}{l_{\nu n-2k}} - \frac{1}{l_{\nu n-2k-1}}}{1 - \frac{z}{l_{\nu n-2k-1}}} \right|$$

$$\leq \frac{|z|}{M} \left| \frac{P_{\nu n-2k-1} Q_{\nu n-2k} - P_{\nu n-2k} Q_{\nu n-2k-1}}{P_{\nu n-2k} P_{\nu n-2k-1}} \right| < \frac{|z|}{Mn^2} \text{ ist.}$$

Damit ist die Konvergenz bewiesen.

Üben wir nun in 6) auf  $z$  die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} P_\nu & P_{\nu-1} \\ Q_\nu & Q_{\nu-1} \end{pmatrix}$$

aus, so erhalten wir nach dem Fundamentallemma:

$$E_k(\bar{S}z, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \frac{\bar{S}z}{\bar{S}^n l_{2k}}}{1 - \frac{\bar{S}z}{S^n l_{2k-1}}}$$

<sup>1)</sup> Osgood Lehrbuch der Funktionentheorie I, Leipzig 1912, pag. 532

$$= \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{S}^n l_{2k+1} (Q_{\nu-1} S^n l_{2k} - P_{\nu-1})}{\bar{S}^n l_{2k} (Q_{\nu-1} S^n l_{2k+1} - P_{\nu-1})} \frac{\frac{1}{I} - \frac{z}{\bar{S}^{-1} S^n l_{2k}}}{} \frac{\frac{1}{I} - \frac{z}{\bar{S}^{-1} S^n l_{2k+1}}}{}$$

und wegen § 2, I. Teil 13) ergibt sich

$$E_k(Sz, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{P_{\nu n+2k+1} P_{\nu(n-1)+2k}}{P_{\nu n+2k} P_{\nu(n-1)+2k+1}} \frac{\frac{1}{I} - \frac{z}{\bar{S}^{(n-1)} l_{2k}}}{\frac{1}{I} - \frac{z}{\bar{S}^{(n-1)} l_{2k+1}}},$$

woraus leicht zu ersehen ist, dass die Faktoren, die  $z$  enthalten, sich einfach verschieben. Es ist also

$$7) \quad E_k(Sz, \omega) = C \cdot \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{I} - \frac{z}{\bar{S}^n l_{2k}}}{\frac{1}{I} - \frac{z}{\bar{S}^n l_{2k+1}}} = C \cdot E_k(z, \omega)$$

$$C = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{P_{\nu n+2k+1} P_{\nu(n-1)+2k}}{P_{\nu n+2k} P_{\nu(n-1)+2k+1}}.$$

Dieses unendliche Produkt ist wegen der erwähnten Eigenschaft der Kettenbrüche und wegen der Beziehung 13) in § 2, I. Teil konvergent. Für den Fall, dass  $l_0 = \infty$  und  $l_{-1} = 0$  vorkommen, sind die Faktoren, in denen diese Werte auftreten, abzusondern und besonders zu untersuchen. Es ergeben sich aber daraus keine weiteren Schwierigkeiten.

Es handelt sich nun darum, die Konstante  $C$  zu bestimmen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir das Produkt:

$$C = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{P_{\nu n+2k+1} P_{\nu(n-1)+2k}}{P_{\nu n+2k} P_{\nu(n-1)+2k+1}} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{P_{-\nu(n+1)+2k+1} P_{-\nu(n+2)+2k}}{P_{-\nu(n+1)+2k} P_{-\nu(n+2)+2k+1}} = C_1 \cdot C_2.$$

Nun ist:

$$C_1 = \frac{P_{-\nu+2k}}{P_{-\nu+2k+1}} \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{P_{\nu n+2k+1}}{P_{\nu n+2k}} = - \frac{1}{\omega_{2k+1}} \cdot \frac{P_{-\nu+2k}}{P_{-\nu+2k+1}},$$

nach 15) § 2, I. Teil.

Ebenso ergibt sich für

$$C_2 = \frac{P_{-\nu+2k+1}}{P_{-\nu+2k}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{-\nu(n+2)+2k}}{P_{-\nu(n+2)+2k+1}} = - \omega_{2k+1} \frac{P_{-\nu+2k+1}}{P_{-\nu+2k}};$$

sodass wir schliesslich erhalten:

$$8) \quad C = \frac{\omega_{2k-1}}{\omega'_{2k-1}} .$$

Die Funktion  $E_k(z, \omega)$  genügt der Funktionalgleichung

$$9) \quad E_k(\bar{S}z, \omega) = \frac{\omega_{2k-1}}{\omega'_{2k-1}} E_k(z, \omega) .$$

Sie besitzt die einfachen Pole:  $\lambda_{n-2k-1}$  ( $n = -\infty, \dots +\infty$ ) und die einfachen Nullstellen:  $\lambda_{n-2k}$ .

In  $z = \omega$  und  $\omega'$  besitzt sie wesentlich singuläre Stellen.

Aus  $E_k(z, \omega)$  erhalten wir eine in Bezug auf die Substitutionen der zyklischen Gruppe automorphe Funktion durch logarithmische Differentiation, unter Benützung der Tatsache, dass die Ableitung selbst nicht automorph ist. Wegen

$$E_k(\bar{S}z, \omega) = C E_k(z, \omega) ,$$

ist

$$\frac{E'_k(\bar{S}z, \omega) d\bar{S}z}{E_k(\bar{S}z, \omega)} = \frac{E'_k(z, \omega)}{E_k(z, \omega)} dz .$$

Da

$$\frac{\bar{S}z - \omega}{\bar{S}z - \omega'} = \varrho \frac{z - \omega}{z - \omega'} ,$$

ist, folgt durch Differentiation

$$\frac{\omega - \omega'}{(\bar{S}z - \omega')^2} d\bar{S}z = \varrho \frac{\omega - \omega'}{(z - \omega')^2} dz$$

und wegen

$$\varrho = \frac{\bar{S}z - \omega}{\bar{S}z - \omega'} \frac{z - \omega'}{z - \omega} ,$$

ergibt sich

$$\frac{\omega - \omega'}{(\bar{S}z - \omega)(\bar{S}z - \omega')} d\bar{S}z = \frac{\omega - \omega'}{(z - \omega)(z - \omega')} dz .$$

Durch Division erhält man schliesslich

$$\frac{(\bar{S}z - \omega)(\bar{S}z - \omega')}{\omega - \omega'} \frac{E'_k(\bar{S}z, \omega)}{E_k(\bar{S}z, \omega)} = \frac{(z - \omega)(z - \omega')}{\omega - \omega'} \frac{E'_k(z, \omega)}{E_k(z, \omega)} .$$

In

$$10) \quad A_k(z, \omega) = \frac{(z - \omega)(z - \omega')}{\omega - \omega'} \frac{E'_k(z, \omega)}{E_k(z, \omega)}$$

haben wir somit eine automorphe Funktion. Die Grundinvariante ist damit analytisch konstruiert.

Es handelt sich nun darum, ausser dem analytischen Ausdruck, der zur Konstruktion der Funktion dient, nämlich der Produktdarstellung, die in mancher Beziehung die Eigenschaften der Funktion nicht deutlich genug hervortreten lässt, noch andere analytische Darstellungen zu gewinnen. (Die zur Rechnung geeignete Darstellung werden wir allerdings erst später mit Hilfe der doppelt-periodischen Funktionen gewinnen.)

Eine erste solche Darstellung haben wir in der Partialbruchzerlegung. Um sie herzuleiten, werden wir der Einfachheit halber zu der, der automorphen Funktion entsprechenden, multiplikativ-periodischen Funktion übergehen, wie dies im § 1 dieses Kapitels beschrieben wurde. In der Tat entspricht unserer Klasse der automorphen Funktionen eine besondere Klasse der multiplikativ-periodischen Funktionen, die nicht alle solchen umfasst, auf die Weise, dass wir alle Eigenschaften der automorphen Funktion mit Hilfe dieser multiplikativ-periodischen Funktion studieren können. Der Übergang von einer Funktionsklasse zur andern ist dabei, wie wir in § 3, I. Teil gesehen haben, durch eine einfache konforme Abbildung gegeben.

Der Übergang wird noch einfacher, wenn die Substitution

$$\xi = Tz = \frac{z - \omega}{z - \omega'},$$

schon in der Funktion  $E_k(z, \omega)$  ausgeführt wird. Es ist dann

$$z = \frac{\omega' \xi - \omega}{\xi - 1}.$$

Der in § 3, I. Teil angeführte Beweis gilt hier fast ohne Änderung. Es ist nämlich

$$11) \quad E_k(z, \omega) = H_k(\xi, \omega) = H_k(Tz, \omega).$$

Wegen  $Tz' = \varrho Tz$

ist  $H_k(\varrho \xi, \omega) = H_k(\varrho Tz, \omega) = H_k(Tz', \omega)$

$$= E_k(z', \omega) = \frac{\omega_{2k-1}}{\omega'_{2k-1}} E_k(z, \omega)$$

und deshalb gilt die Funktionalbeziehung

$$12) \quad H_k(\varrho \xi, \omega) = \frac{\omega_{2k+1}}{\omega'_{2k-1}} H_k(\xi, \omega).$$

Dabei ist  $\varrho$  wie erwähnt das Quadrat der Grundeinheit des Körpers  $k$  ( $\sqrt{m}$ ).

Aus dieser Funktion  $H_k(z, \omega)$  gewinnen wir auf bekannte Weise, durch logarithmische Differentiation, die multiplikativperiodische Funktion

$$13) \quad U_k(z, \omega) = z \frac{H'_k(z, \omega)}{H_k(z, \omega)},$$

die der Funktionalgleichung genügt:

$$U_k(\varrho z, \omega) = U_k(z, \omega).$$

Führen wir jetzt im analytischen Ausdruck für die Funktion  $E_k(z, \omega)$  die Substitution

$$\xi = \frac{z - \omega}{z - \omega'} = Tz \quad z = T^{-1} \xi$$

aus, so erhalten wir:

$$E_k(z, \omega) = H_k(\xi, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \frac{T^{-1} \xi}{S^n l_{2k}}}{1 - \frac{T^{-1} \xi}{S^n l_{2k+1}}}$$

Nach dem Fundamentallemma erhalten wir

$$H_k(\xi, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1 - \frac{\xi}{T S^n l_{2k}}}{1 - \frac{\xi}{T S^n l_{2k+1}}},$$

wobei sich für  $c_n$  folgender Wert ergibt:

$$c_n = \frac{\bar{S}^n l_{2k+1}}{\bar{S}^n l_{2k}} \cdot \frac{\bar{S}^n l_{2k} - \omega}{\bar{S}^n l_{2k+1} - \omega}.$$

Benutzen wir, dass

$$T \bar{S}^n l_{2k} = \frac{\bar{S}^n l_{2k} - \omega}{\bar{S}^n l_{2k} - \omega'} = \varrho^n \frac{l_{2k} - \omega}{l_{2k} - \omega'}$$

ist und setzen zur Abkürzung

$$14) \quad \frac{l_n - \omega}{l_n - \omega'} = \lambda_n,$$

wobei  $\lambda_n$  wieder Zahlen sind, die dem Körper  $k(\sqrt[m]{\lambda})$  angehören, so erhalten wir die einfachere Darstellung:

$$15) \quad H_k(z, \omega) = C \prod_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n \frac{1 - \frac{z}{\varrho^n \lambda_{2k}}}{1 - \frac{z}{\varrho^n \lambda_{2k+1}}};$$

dabei ist  $C = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{S}^n l_{2k+1}}{\bar{S}^n l_{2k}}$  gesetzt, ein unendliches Produkt,

das auf Grund der erwähnten Eigenschaft der Zähler und Nenner der Näherungsbrüche absolut konvergiert. In der Form 15) ist das Produkt zu logarithmischer Differentiation geeignet, sobald nachgewiesen ist, dass es gleichmässig und absolut konvergiert.<sup>1)</sup> Nach dem Weierstraßschen Kriterium ist dies der Fall, da

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\bar{S}^n l_{2k} - \omega}{\bar{S}^n l_{2k+1} - \omega} \cdot \frac{1 - \frac{z}{\varrho^n \lambda_{2k}}}{1 - \frac{z}{\varrho^n \lambda_{2k+1}}} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{\bar{S}^n l_{2k} - \omega}{\bar{S}^n l_{2k+1} - \omega'} \cdot \frac{\frac{\bar{S}^n l_{2k} - \omega}{\bar{S}^n l_{2k} - \omega'} - z}{\frac{\bar{S}^n l_{2k+1} - \omega}{\bar{S}^n l_{2k+1} - \omega'} - z} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{1 - z}{(\bar{S}^n l_{2k+1} - \omega) - z(\bar{S}^n l_{2k+1} - \omega')} \cdot (\bar{S}^n l_{2k} - \bar{S}^n l_{2k+1}) \right| \\ &\leq \left| \frac{M}{Q_{n+2k} Q_{n+2k+1}} \right| \leq \frac{M}{n^2} \end{aligned}$$

ist. Da  $M$ , ausser in den kritischen Punkten, immer endlich ist, ist die Konvergenz nachgewiesen.

Bilden wir nun die logarithmische Ableitung von  $H_k(z, \omega)$  und multiplizieren mit  $z$ , so erhalten wir

$$16) \quad U_k(z, \omega) = z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{z - \varrho^n \lambda_{2k}} - \frac{1}{z - \varrho^n \lambda_{2k+1}} \right\}.$$

<sup>1)</sup> Knopp, Funktionentheorie II, Göschen 1913, pag. 22.  
Goursat, Cours d'analyse math. II. 3. Aufl. 1918, pag. 100.

Die Summe ist wieder absolut und gleichmässig konvergent. Bei Trennung in  $\sum \frac{1}{z - \varrho^n \lambda_{2k}} - \sum \frac{1}{z - \varrho^n \lambda_{2k+1}}$  konvergieren die einzelnen Summen nur für negatives  $n$  absolut und gleichmässig. Um eine zur Rechnung vollständig geeignete Form zu erhalten, formen wir die Summe  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z - \varrho^n \lambda_{2k}} - \frac{1}{z - \varrho^n \lambda_{2k+1}} \right\}$  so um, dass auch für positive  $n$  die Summe getrennt werden kann.

$$\begin{aligned} z \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z - \varrho^n \lambda_{2k}} - \frac{1}{z - \varrho^n \lambda_{2k+1}} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z \varrho^n \lambda_{2k} - z \varrho^n \lambda_{2k+1}}{(z - \varrho^n \lambda_{2k})(z - \varrho^n \lambda_{2k+1})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \varrho^n \lambda_{2k} - \varrho^n \lambda_{2k} \lambda_{2k+1}) - (z \varrho^n \lambda_{2k+1} - \varrho^n \lambda_{2k} \lambda_{2k+1})}{(z - \varrho^n \lambda_{2k})(z - \varrho^n \lambda_{2k+1})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n \lambda_{2k}}{z - \varrho^n \lambda_{2k}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n \lambda_{2k+1}}{z - \varrho^n \lambda_{2k+1}}. \end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraktion von  $\varrho^n \lambda_{2k} \lambda_{2k+1}$  im Zähler der Summe für positive  $n$  haben wir also erhalten:

$$\begin{aligned} 17) \quad U_k(z, \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n \lambda_{2k}}{z - \varrho^n \lambda_{2k}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n \lambda_{2k+1}}{z - \varrho^n \lambda_{2k+1}} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{z - \frac{\lambda_{2k}}{\varrho^{n+1}}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{z - \frac{\lambda_{2k+1}}{\varrho^{n+1}}}. \end{aligned}$$

In dieser Form ist jede einzelne Summe absolut und gleichmässig konvergent.

### § 3. Laurentsche Reihe.

Um die Laurentsche Reihe abzuleiten, müssen wir noch einige Folgerungen über die Pole und Residuen der Funktion  $U_k(z, \omega)$  machen. Aus der Partialbruchzerlegung ist ersichtlich, dass  $U_k(z)$  die einfachen Pole

$$\varrho^n \lambda_{2k} = \varrho^n \frac{l_{2k} - \omega}{l_{2k} - \omega'},$$

$$\varrho^n \lambda_{2k+1} = \varrho^n \frac{l_{2k+1} - \omega}{l_{2k+1} - \omega'}$$

mit den entsprechenden Residuen

$$\varrho^n \lambda_{2k} \text{ und } -\varrho^n \lambda_{2k+1}$$

besitzt. Wir beweisen nun folgenden

**Satz:** Hat eine multiplikativperiodische Funktion mit der Periode  $\varrho$  im Kreisring  $(I, \varrho)$  die einfachen Pole  $\lambda_{2k}$  und  $\lambda_{2k+1}$  mit den Residuen  $\lambda_{2k}$  und  $-\lambda_{2k+1}$ , so hat sie für  $\lambda_{2k} < |z| < \frac{\lambda_{2k+1}}{\varrho}$  die Laurentsche Entwicklung.

$$18) \quad U_k(z, \omega) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^n} \frac{\lambda_{2k}^n - \lambda_{2k+1}^n}{1 - \varrho^n}.$$

Der Strich an  $\Sigma$  bedeutet, dass der Ausdruck für  $n = 0$  auszulassen ist.

Wir beweisen das mit der Methode des Herumintegrierens. Im konzentrischen Kreisring  $\lambda_{2k} < |z| < \frac{\lambda_{2k+1}}{\varrho}$  ist die Funktion  $U_k(z, \omega)$  regulär und eindeutig und lässt deshalb in diesem Gebiet die Laurentsche Entwicklung zu:

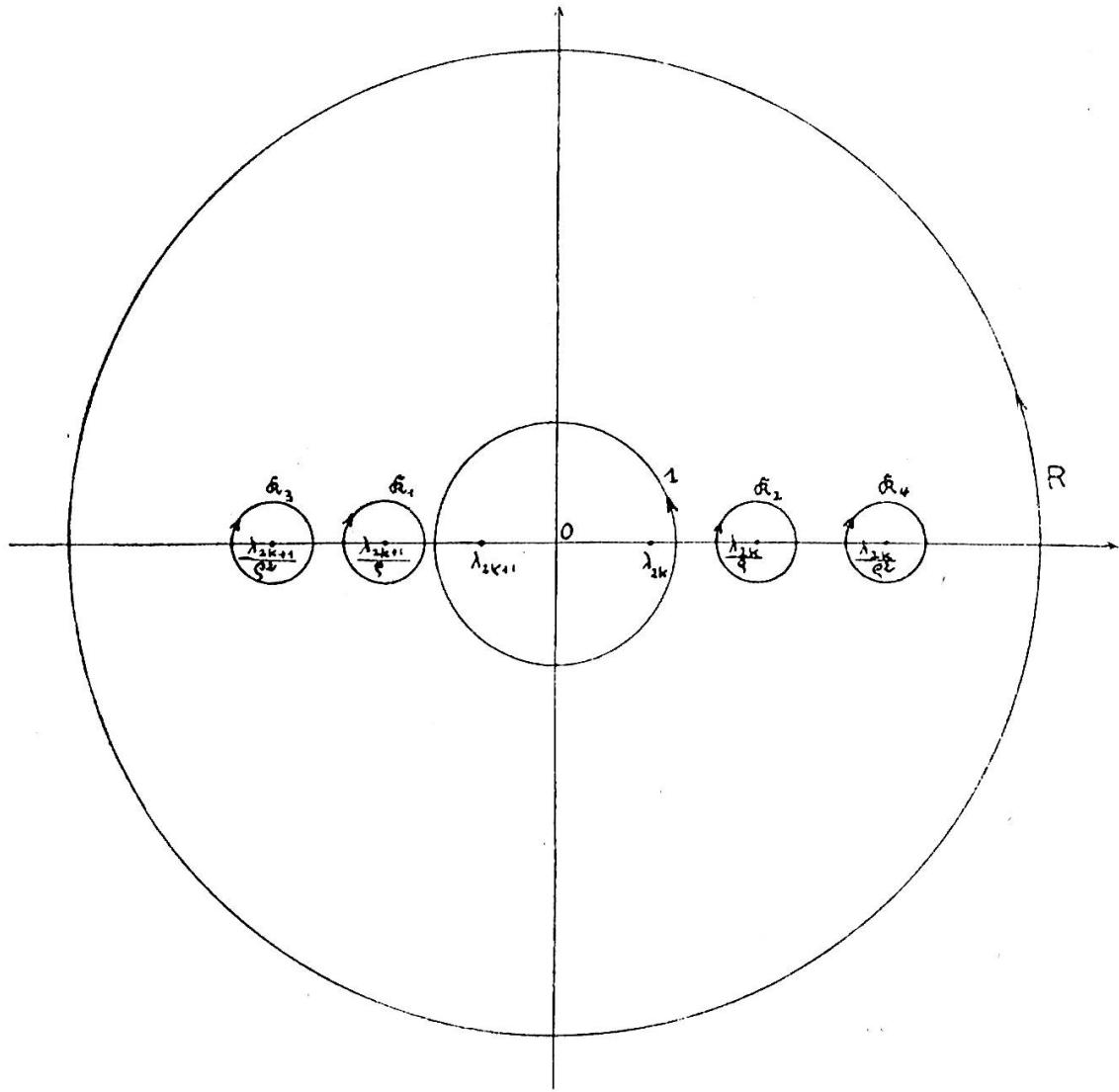
$$U_k(z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{U_k(\zeta, \omega)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Das Integral ist dabei über eine reguläre, geschlossene, den Punkt  $n = 0$  enthaltende, im Kreisring verlaufende Kurve  $C$  zu erstrecken. Im vorliegenden Fall wählen wir den Einheitskreis  $(I)$  als Integrationsweg. Es ist dann für positives  $n$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{U_k(\zeta, \omega)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Man kann dieses Integral ausdrücken durch ein Integral über einen Kreis mit beliebig grossem Radius, vermindert um die Summe

der Integrale über die Umläufe um die Pole. Der Richtungssinn ist wie üblich entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers.



Der Kreis vom Radius  $R$  sei so gewählt, dass er einem Kreise im Kreisring äquivalent ist, auf dem  $U_k(\zeta, \omega)$  endlich bleibt. Es ist dann für

$$|z| = R \quad |U_k(z, \omega)| \leq M.$$

Nun ist, wenn  $2m$  die Anzahl der zwischen  $(I)$  und  $(R)$  gelegenen Pole ist:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{U_k(\zeta, \omega)}{\zeta^{n+1}} d\zeta - \sum_{\nu=1}^{2m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_\nu} \frac{U_k(\zeta, \omega)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

und nach dem Residuensatz

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{U_k(\xi, \omega)}{\xi^{n+1}} d\xi = \sum_{\nu=1}^m \frac{\lambda_{2k}}{\left(\frac{\varrho^\nu}{\lambda_{2k}}\right)^{n+1}} + \sum_{\nu=1}^m \frac{\lambda_{2k+1}}{\left(\frac{\varrho^\nu}{\lambda_{2k+1}}\right)^{n+1}}.$$

Lassen wir nun  $R$  gegen  $\infty$  konvergieren, so ist

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{U_k(\xi, \omega)}{\xi^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{M}{R^n} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

Schliesslich erhalten wir

$$-c_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\varrho^\nu}{\lambda_{2k}} \right)^n - \left( \frac{\varrho^\nu}{\lambda_{2k+1}} \right)^n \right\} = \frac{\left( \frac{\varrho}{\lambda_{2k}} \right)^n - \left( \frac{\varrho}{\lambda_{2k+1}} \right)^n}{1 - \varrho^n}.$$

Analog erhalten wir für

$$c_{-(n+1)} = \frac{\lambda_{2k}^{n+1} - \lambda_{2k+1}^{n+1}}{1 - \varrho^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nun handelt es sich noch darum, die Konstante  $c_0$  zu bestimmen, die durch Angabe der Pole und Residuen unbestimmt gelassen wird. Ihren Wert entnehmen wir der Partialbruchzerlegung, die wir in folgender Form benutzen:

$$19) \quad U_k(z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n \lambda_{2k}}{z - \varrho^n \lambda_{2k}} - \sum_{0}^{\infty} \frac{\varrho^n \lambda_{2k+1}}{z - \varrho^n \lambda_{2k+1}} \\ + \sum_{0}^{\infty} \frac{\varrho^{n+1} z}{-\lambda_{2k} + \varrho^{n+1} z} - \sum_{0}^{\infty} \frac{\varrho^{n+1} z}{-\lambda_{2k+1} + \varrho^{n+1} z}.$$

Entwickeln wir die einzelnen Summen, so erhalten wir

$$\frac{\lambda_{2k}}{z} + \left( \frac{\lambda_{2k}}{z} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\lambda_{2k}}{z} \right)^\nu + \dots \\ + \varrho \frac{\lambda_{2k}}{z} + \varrho^2 \left( \frac{\lambda_{2k}}{z} \right)^2 + \dots + \varrho^\nu \left( \frac{\lambda_{2k}}{z} \right)^\nu + \dots \\ + \dots \\ + \varrho^n \frac{\lambda_{2k}}{z} + \varrho^{2n} \left( \frac{\lambda_{2k}}{z} \right)^2 + \dots + \varrho^{n\nu} \left( \frac{\lambda_{2k}}{z} \right)^\nu + \dots \\ + \dots$$

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ \frac{\lambda_{2k+1}}{z} + \left( \frac{\lambda_{2k+1}}{z} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\lambda_{2k+1}}{z} \right)^\nu + \dots \right\} \\
 & - \left\{ \begin{aligned}
 & \varrho \frac{z}{\lambda_{2k}} + \varrho^2 \left( \frac{z}{\lambda_{2k}} \right)^2 + \dots + \varrho^\nu \left( \frac{z}{\lambda_{2k}} \right)^\nu + \dots \\
 & + \varrho^2 \frac{z}{\lambda_{2k}} + \varrho^4 \left( \frac{z}{\lambda_{2k}} \right)^2 + \dots + \varrho^{2\nu} \left( \frac{z}{\lambda_{2k}} \right)^\nu + \dots \\
 & + \dots \\
 & + \varrho^n \frac{z}{\lambda_{2k}} + \varrho^{2n} \left( \frac{z}{\lambda_{2k}} \right)^2 + \dots + \varrho^{\nu n} \left( \frac{z}{\lambda_{2k}} \right)^\nu + \dots \\
 & + \dots
 \end{aligned} \right\} \\
 & + \left\{ \begin{aligned}
 & \varrho \frac{z}{\lambda_{2k+1}} + \dots + \varrho^\nu \left( \frac{z}{\lambda_{2k+1}} \right)^\nu + \dots \\
 & + \dots
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

In dieser Entwicklung sind die Bedingungen des Doppelreihensatzes erfüllt. Es ergibt sich daraus ohne weiteres, dass  $c_0 = 0$  ist, und die Laurentsche Reihe für  $U_k(z, \omega)$  lautet deshalb:

$$20) \quad U_k(z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^n} \frac{\lambda_{2k}^n - \lambda_{2k+1}^n}{1 - \varrho^n}; \quad \lambda_{2k} < |z| < \frac{\lambda_{2k+1}}{\varrho}.$$

Analoge Entwicklungen können wir für jeden Ring aufstellen, in dem die Funktion regulär ist.

Aus der Entwicklung für  $U_k(z, \omega)$  erhalten wir für  $z$   $U'_k(z, \omega)$  die Reihe

$$21) \quad z U'_k(z) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{z^n} \frac{\lambda_{2k}^n - \lambda_{2k+1}^n}{1 - \varrho^n}; \quad \lambda < |z| < \frac{\lambda_{2k+1}}{\varrho}.$$

Dabei bedeutet der Strich an  $\Sigma$  immer, dass der Wert für  $n=0$  auszulassen ist.

#### § 4. Allgemeine Sätze.

Die Definition der Funktionsgesamtheit, die der Gegenstand dieser Betrachtung ist und der Nachweis, dass sie ein Funktionenkörper ist, wird uns im Kapitel über die allgemeine funktionentheoretische Aufgabe beschäftigen. Die automorphen Funktionen, mit denen wir hier zu tun haben, können, wie erwähnt wurde, auf eine gewisse Klasse multiplikativperiodischer Funktionen zurückgeführt und mit Hilfe dieser studiert werden. Es gelten über diese multiplikativperiodischen Funktionen allgemeine Sätze, die gar nicht an den besondern Charakter dieser Funktionen, nämlich an die Wahl von  $\varrho$  gebunden und den bekannten Sätzen über die doppeltpériodischen Funktionen vollständig analog sind. Da diese Sätze ausserdem fortwährend benutzt werden, sollen sie hier kurz Erwähnung finden. Sie werden, so weit sie für beliebige automorphe Funktionen gelten, möglichst allgemein formuliert.

Sucht man irgendwelche allgemeine Aussagen über die Nullstellen, Pole und Residuen einer analytischen Funktion  $f(z)$  zu formulieren, so kommt man natürlicherweise auf folgende Sätze:

Seien  $\mu_i$  die Nullstellen,  $\nu_i$  die Pole und  $r_i$  die Residuen in einem Bereich mit der Berandung  $C$ , so haben wir

##### 1. Aussage über Residuen:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{(i)} r_i ,$$

##### 2. Aussage über Nullstellen und Pole:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{(i)} \varphi(\mu_i) - \sum_{(i)} \varphi(\nu_i) + \frac{1}{2\pi i} [\lg f(z)] [\varphi(z)].$$

Dabei ist  $\varphi(z)$  allgemein analytisch und mehrdeutig angenommen;  $[\varphi(z)]$  bedeutet den Sprung dieser Funktion auf dem Schnitt, durch den der Bereich einfach zusammenhängend gemacht wird und  $[\lg f(z)]$  die Änderung des Logarithmus auf dem Schnitt.

Die naheliegendsten Spezialfälle für  $\varphi(z)$  in der Formel 2. liefern Aussagen über:

##### a) Anzahl für $\varphi(z) = 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P ,$$

dabei bedeutet  $N$  die Anzahl der Nullstellen,  $P$  die der Pole;

b) **Summe** für  $\varphi(z) = z$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{(i)} \mu_i - \sum_{(i)} \nu_i ,$$

c) **Produkt** für  $\varphi(z) = \lg z$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \lg z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \lg \prod_i \frac{\mu_i}{\nu_i} + \frac{1}{2\pi i} [\lg f(z)] [\lg z] \\ &= \lg \prod_i \frac{\mu_i}{\nu_i} + [\lg f(z)] . \end{aligned}$$

Es handelt sich nun darum, die links stehenden Integrale für gegebene Funktionen auch direkt zu berechnen, nämlich mit Hilfe der besondern Eigenschaften der vorliegenden Funktion. Bei den doppeltpériodischen Funktionen hat man ohne weiteres

$$f(Sz) dSz = f(z) dz , \quad (Sz = z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2).$$

Infolgedessen ist

$$\int_C f(z) dz = 0 ,$$

was den bekannten Satz über die Residuen liefert. Wollte man eine analoge Tatsache für beliebige Fuchsche Funktionen gewinnen, so würde man zu keinem einfachen Resultat gelangen. Statt dessen kann bei den multiplikativperiodischen Funktionen das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z} dz$$

eingeführt werden, das infolge der Eigenschaft

$$\frac{f(\varrho z)}{\varrho z} d(\varrho z) = \frac{f(z)}{z} dz ,$$

gleich Null ist, wobei das Integral immer über die Berandung des Fundamentalbereiches zu erstrecken ist. Die allgemeine Berechnung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z} dz$$

liefert für den Fall einfacher Pole

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z} dz = \sum \frac{r_i}{\pi_i} ,$$

wo  $\pi_i$  die Stellen bedeutet, an denen die Funktion  $f(z)$  einfache Pole besitzt. Diese Überlegung liefert uns sofort

**Satz 1.** Hat eine multiplikativperiodische Funktion  $V(z)$  im Fundamentalbereich nur einfache Pole für

$$z = \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$$

mit den Residuen  
so ist

$$22) \quad \frac{r_1}{\pi_1} + \frac{r_2}{\pi_2} + \dots + \frac{r_n}{\pi_n} = 0.$$

Was nun das Integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  anbetrifft, so gilt für jede automorphe Funktion, infolge

$$\frac{f'(Sz)}{f(Sz)} dz = \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

unter der Voraussetzung eindeutiger Ränderzuordnung,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Es gilt deshalb

**Satz 2.** Jede nicht durchwegs konstante automorphe Funktion mit  $n$  einfachen Polen im Fundamentalbereich nimmt jeden Wert  $n$  Mal an.

Daraus folgt: Eine automorphe Funktion ohne Pole ist eine Konstante.

Speziell für multiplikativperiodische Funktionen gilt

**Satz 3.** Es gibt keine multiplikativperiodische Funktion 1. Ordnung.

Das ergibt sich auf Grund von Satz 1; denn sonst müsste das Residuum den Wert Null haben.

Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

ist bei den doppelperiodischen Funktionen leicht direkt zu berechnen; denn es ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int (z + \omega) \frac{f'(z + \omega)}{f(z + \omega)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \omega [lg f(z)],$$

dabei bedeutet  $\omega$  die Periode und  $[\lg f(z)]$  die Änderung zwischen zwei Gegenseiten. Das Integral liefert den bekannten Satz, dass

$$\sum_i \nu_i = \sum_i \mu_i$$

ist.

Ganz analog verhält es sich beim Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \lg z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

für multiplikativperiodische Funktionen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int \lg \varrho z \frac{f'(\varrho z)}{f(\varrho z)} d\varrho z &= \frac{1}{2\pi i} \int \lg z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \lg \varrho [\lg f(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \lg z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + k \lg \varrho; \end{aligned}$$

$[\lg f(z)]$  bedeutet die Änderung zwischen zwei zugeordneten Rändern des Fundamentalbereiches. Vergleicht man dieses Resultat mit der allgemeinen Ausrechnung, so ergibt sich

$$k \lg \varrho = \lg \prod_i \frac{\mu_i}{\nu_i} + 2 k' \pi i,$$

also

$$\lg \prod_i \frac{\mu_i}{\nu_i} = k \lg \varrho - 2 k' \pi i.$$

Wir erhalten also schliesslich

$$\prod_i \frac{\mu_i}{\nu_i} = \varrho^k.$$

**Satz 4.** Nimmt die multiplikativperiodische Funktion  $f(z)$  an den Stellen  $\mu_i$  einen beliebigen festen Wert  $c$  an und wird jede Stelle  $\mu_i$  so oft gezählt, als ihre Ordnung beträgt, so ist

$$23) \quad \prod_i \frac{\mu_i}{\nu_i} = \varrho^k.$$

Ausserdem gebrauchen wir noch

**Satz 5.** Ist  $V_1(z)$  eine multiplikativperiodische Funktion  $n_1$ -ter,  $V_2(z)$  eine solche  $n_2$ -ter Ordnung, so besteht zwischen  $V_1(z)$  und  $V_2(z)$  eine algebraische Gleichung von  $n_2$ -tem Grad in  $V_1(z)$  und von  $n_1$ -tem Grad in  $V_2(z)$ .

Der Beweis für diesen Satz kann analog geführt werden wie bei Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie I, 2. Aufl., p. 478.

### § 5. Die Hauptfunktionen.

Bis jetzt wurden folgende Funktionen eingeführt:

$E_k(z, \omega)$  und entsprechend  $H_k(z, \omega)$

$A_k(z, \omega) \rightarrow \rightarrow U_k(z, \omega)$ .

Es sollen nun einige Eigenschaften dieser Funktionen untersucht werden. Vor allem soll der Zusammenhang der Funktion  $A_k(z, \omega)$  mit  $U_k(\zeta, \omega)$  festgestellt werden.  $U_k(\zeta, \omega)$  hat im Fundamentalbereich die Pole  $\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}$  mit den Residuen  $\lambda_{2k}, -\lambda_{2k+1}$ . Aus

$$U_k(\zeta, \omega) = U_k(Tz, \omega) = A_k(z, \omega)$$

folgt für die Residuen der Pole  $l_{2k}, l_{2k+1}$  von  $A_k(z, \omega)$

Residuum von  $A_k(z, \omega)$  in  $l_{2k} = \lim_{z \rightarrow l_{2k}} (z - l_{2k}) A_k(z, \omega)$

$$= \lim_{z \rightarrow l_{2k}} (\zeta - \lambda_{2k}) U_k(\zeta, \omega) \frac{1}{\frac{\zeta - \lambda_{2k}}{z - l_{2k}}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{z - \omega}{z - \omega'}\right)_{z=l_{2k}}} \lambda_{2k} = \frac{(l_{2k} - \omega)(l_{2k} - \omega')}{\omega - \omega'}.$$

Über die Funktion  $U_k(z, \omega)$  und die aus ihrer Ableitung gebildete Funktion  $U_1 = z U'_k(z, \omega)$  wollen wir die für uns wichtigsten Sätze ableiten.

**Satz 1.** Die Funktion  $U_k(z, \omega)$  ist ausser der eigentlichen Gruppe noch gegenüber der elliptischen Substitution  $z \rightarrow \frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}$  invariant.

$$24) \quad U_k\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}\right) = U_k(z, \omega).$$

Der Gedanke, die Transformation

$$z \rightarrow \frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}$$

auszuführen, stammt von der Gleichung

$$\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{\mu_1 \mu_2} = \varrho^k,$$

in der  $\mu_1, \mu_2$  die Nullstellen von  $U_k(z, \omega)$  bedeuten.  $U_k(z, \omega)$  und  $U_k\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}, \omega\right)$  sind beide multiplikativperiodisch. Sie haben dieselben Pole 1. Ordnung mit denselben Residuen; denn wenn

$r_1, r_2$  die Residuen von  $U_k(z, \omega)$  in  $\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}$  und  $R_1, R_2 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow U_k\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}, \omega\right)$  in  $\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}$  sind, so ist nach Satz 1 § 4

$$\frac{r_1}{\lambda_{2k}} + \frac{r_2}{\lambda_{2k+1}} = 0, \quad r_1 : r_2 = -\lambda_{2k} : \lambda_{2k+1}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{z \rightarrow \lambda_{2k}} (z - \lambda_{2k}) U_k\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}, \omega\right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \lambda_{2k}} \frac{z - \lambda_{2k}}{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1} - z} \cdot \left( \frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+2}}{z} - \lambda_{2k+1} \right) U_k\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}, \omega\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_{2k+1}} \lim_{z \rightarrow \lambda_{2k}} (-z) \lim_{z' \rightarrow \lambda_{2k+1}} (z' - \lambda_{2k+1}) U_k(z', \omega) = -\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k+1}} r_2 \\ &= -r_1. \end{aligned}$$

Es ist also

$$U_k(z, \omega) - U_k\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}, \omega\right) = \text{Konst.}$$

Da aber  $\mu_1$  Nullstelle der beiden Funktionen ist, wird  $\text{Konst.} = 0$ ; denn es ist  $\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{\mu_1} = q^k \mu_2$ .

Im Zusammenhang beweisen wir noch den analogen Satz über die Funktion  $H(z)$ , die nur die Nullstelle  $\mu$  und den Pol  $\nu$  besitzt. Es gilt

$$\text{Satz 2.} \quad 25) \quad H(z) H\left(\frac{\mu \nu}{z}\right) = C \neq 0.$$

Auf diese Funktionalgleichung werden wir aus dem Grunde geführt, weil  $\frac{\mu \nu}{z}$  für  $z = \nu$  in  $\mu$  übergeht und umgekehrt. Die Funktion  $H(z) H\left(\frac{\mu \nu}{z}\right)$  ist multiplikativperiodisch ohne Pole, da sich Nullstelle und Pol zerstören.

Aus dem Satz 2 können wir noch eine Folgerung ziehen. Machen wir die Substitution  $z = u z$ , wo  $u$  ein Parameter ist, so erhalten wir

$$H(u z) H\left(\frac{\mu \nu}{u z}\right) = C.$$

Dividieren wir durch die Gleichung 25), so erhalten wir:

$$26) \quad \frac{H(u z)}{H(z)} = \frac{H\left(\frac{u v}{z}\right)}{H\left(\frac{u v}{u z}\right)}.$$

Das können wir auch direkt beweisen.  $\frac{H(u z)}{H(z)}$  ist multiplikativ-periodisch und besitze in  $\frac{v}{u}$  und  $\mu$  die Residuen  $r_1, r_2$ ,

$$\text{ebenso } \frac{H\left(\frac{u v}{z}\right)}{H\left(\frac{u v}{u z}\right)} \text{ in } \frac{v}{u} \Rightarrow \mu \Rightarrow R_1, R_2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \text{Res. von } \frac{H\left(\frac{u v}{z}\right)}{H\left(\frac{u v}{u z}\right)} \text{ in } \mu &= \lim_{z \rightarrow \mu} (z - \mu) \frac{H\left(\frac{u v}{z}\right)}{H\left(\frac{u v}{u z}\right)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \mu} \frac{z - \mu}{\frac{u v}{u z} - \frac{v}{u}} \lim_{z' \rightarrow \frac{v}{u}} \left(z' - \frac{v}{u}\right) \frac{H(u z')}{H(z')} \\ &= \frac{-\mu}{\frac{v}{u}} = r_2 - r_1; \end{aligned}$$

wegen  $\frac{r_1}{\mu} + \frac{r_2}{\frac{v}{u}} = 0$ , wenn  $z' = \frac{u v}{u z}$  gesetzt ist.

Durch Differentiation der Funktionalgleichung aus Satz 1 erhält man

**Satz 3.** Die Funktion  $z U'(z) := U_1(z)$  genügt der Funktionalgleichung

$$27) \quad U_1(z) = U_1\left(\frac{u v}{z}\right).$$

Die Funktion  $U_1(z)$  besitzt an den Stellen  $\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}$  Pole 2. Ordnung.

Die Nullstellen seien bei  $z = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ .

Wenden wir die Beziehung

$$\prod_i \frac{\nu_i}{\mu_i} = Q^k$$

auf  $U_1(z)$  an, so erhalten wir:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = Q^k \lambda_{2k}^2 \lambda_{2k+1}^2.$$

Da aber  $U(z) = U(\mu_r)$  ( $r = 1, 2, 3, 4$ ) nur die Nullstelle 2. Ordnung  $\mu_r$  besitzt, so ist

$$\mu_r^2 = \varrho^{q_s} \lambda_{2k} \lambda_{2k+1}, \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

$$\text{also } \mu_r = \varepsilon^{q_s} \sqrt{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}.$$

Nun ist wegen

$$\omega' < \lambda_{2k+1} < \omega$$

das Produkt  $\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}$  sicher negativ, also  $\mu_r$  rein imaginär:

$$\mu_r = \pm \varepsilon^{q_s} i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|}.$$

Damit sämtliche Nullstellen im Fundamentalbereich liegen, ist  $q_s$  so zu bestimmen, dass folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\varepsilon < \varepsilon^{q_1} |\sqrt{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}| < 1;$$

dann erhalten wir

$$\mu_1 = \varepsilon^{q_1} \cdot i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|}, \quad \mu_2 = -\varepsilon^{q_1} \cdot i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|}$$

$$\mu_3 = \varepsilon^{q_1+1} i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|}, \quad \mu_4 = -\varepsilon^{q_1+1} i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|}$$

und es ist  $q = 2 q_1 + 1$ .

Einfacher ergeben sich die Nullstellen aus den Gleichungen

$$U_1(z) = -U_1\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}\right).$$

In der Umgebung eines Poles hat  $U_1(z)$  die Entwicklung

$$U_1(z) = \frac{a_{-2}}{(z - \lambda_{2k})^2} + \frac{a_{-1}}{z - \lambda_{2k}} + \mathfrak{P}(z - \lambda_{2k}).$$

Aus der Partialbruchentwicklung

$$U_1(z) = -\sum_{(n)} \left\{ \frac{(\varrho^n \lambda_{2k})^2}{(z - \varrho^n \lambda_{2k})^2} + \frac{\varrho^n \lambda_{2k}}{z - \varrho^n \lambda_{2k}} - \frac{(\varrho^n \lambda_{2k+1})^2}{(z - \varrho^n \lambda_{2k+1})^2} - \frac{\varrho^n \lambda_{2k+1}}{z - \varrho^n \lambda_{2k+1}} \right\}$$

ergibt sich:

$$a_{-2} = -\lambda_{2k}^2.$$

$$a_{-1} = -\lambda_{2k}$$

## § 6. Umkehrproblem. Differentialgleichung.

Wir kommen auf den Zusammenhang mit der Integralrechnung. Es handelt sich darum zu ermitteln, von welchen unbestimmten Integralen unsere Funktion die Umkehrung darstellt.

Auf Grund des Satzes 5 § 4 wissen wir, dass die Funktion  $U_k(z, \omega) = U(z)$  der Differentialgleichung 1. Ordnung genügt:

$$28) \quad \left( \xi \frac{d U(\xi)}{d \xi} \right)^2 + R_1(U(\xi)) \cdot \xi \frac{d U(\xi)}{d \xi} + R_2(U(\xi)) = 0,$$

wo  $R_1$  und  $R_2$  rationale Funktionen höchstens 4. Grades sind. Diese quadratische Gleichung kann man nach  $\xi U'(\xi)$  auflösen und kommt so auf eine Quadratur:

$$U_1(\xi) = \xi U'(\xi) = -\frac{R_1(U(\xi))}{2} \pm \sqrt{\frac{R_1(U(\xi))^2}{4} - R_2(U(\xi))},$$

$$\frac{d \xi}{\xi} = \frac{d U(\xi)}{-\frac{R_1(U(\xi))}{2} \pm \sqrt{\frac{R_1(U(\xi))^2}{4} - R_2(U(\xi))}}.$$

Die quadratische Funktion im Nenner wollen wir aus unseren Ergebnissen näher bestimmen und zeigen, dass für die vorliegende Funktion

$$R_1(U(\xi)) = 0$$

ist. Wir benutzen dabei die Methode der Identifizierung zweier multiplikativperiodischer Funktionen auf Grund der Kenntnis ihrer Nullstellen. Wir sind dazu in der Lage, weil wir die Nullstellen der Funktion  $\xi U'(\xi)$  kennen. Im Bereich  $(I, \varrho)$  sind es die Stellen

$$z = \pm i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|}, \pm \varepsilon i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|}.$$

$U(\xi)$  hat die Pole 1. Ordnung  $\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}$ ,  
 $\xi U'(\xi)$  die Pole 2. Ordnung  $\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}$ .

Der Fundamentalbereich ist für beide Funktionen der gleiche. Die Funktion

$$\varphi(U(\xi)) = (U(\xi) - U(i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|})) (U(\xi) - U(-i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|})) \\ \cdot (U(\xi) - U(\varepsilon i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|})) (U(\xi) - U(-\varepsilon i \sqrt{|\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|}))$$

wird zweimal Null in jedem der vier Punkte, in denen  $\xi U'(\xi)$  Null wird und viermal unendlich in jedem der Punkte  $\lambda_{2k}$  und  $\lambda_{2k+1}$ . Wir können also die Funktion mit  $\xi U'(\xi)$  vergleichen und erhalten

$$(\xi U'(\xi))^2 = C \varphi(U(\xi)).$$

Zur Bestimmung von  $C$  bilden wir

$$\lim_{z \rightarrow \lambda_{2k}} (\xi - \lambda_{2k})^4 \cdot (\xi U'(\xi))^2 = C \lambda_{2k}^4;$$

daraus ergibt sich

$$C = 1.$$

Die Funktion  $\varphi(U(\xi))$  hat keine überflüssigen Nullstellen, weil die elliptische Substitution  $z \rightarrow \frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}$  die Klammerausdrücke ineinander überführt. Das Umkehrproblem führt schliesslich auf folgende Quadratur

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{dU(\xi)}{\sqrt{\varphi(U(\xi))}}$$

Die Konstanten unter der Wurzel können wir aus der Partialbruchzerlegung bestimmen. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip ergibt sich übrigens, dass sie paarweise konjugiert sind; es ist

$$U(-i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|}) = \bar{U}(i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|})$$

$$U(-\varepsilon i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|}) = \bar{U}(\varepsilon i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|}).$$

Bezeichnen wir  $U(i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|})$  mit  $p = a + i b$

$$U(\varepsilon i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|}) \text{ mit } q = c + i d$$

so ist

$$p = i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|} - \zeta^n \lambda_{2k}} - \frac{1}{i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|} - \zeta^n \lambda_{2k+1}} \right\}$$

$$q = \varepsilon i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\varepsilon i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|} - \zeta^n \lambda_{2k}} - \frac{1}{\varepsilon i\sqrt{|\lambda_{2k}\lambda_{2k+1}|} - \zeta^n \lambda_{2k+1}} \right\}.$$

Das Integral lautet dann

$$29) \quad \int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{dU(\xi)}{\sqrt{(U(\xi) - p)(U(\xi) - \bar{p})(U(\xi) - q)(U(\xi) - \bar{q})}}$$

$$\xi = e^{\int \frac{dU(\xi)}{\sqrt{(U(\xi) - p)(U(\xi) - \bar{p})(U(\xi) - q)(U(\xi) - \bar{q})}}}.$$

Dem Umkehrproblem kann noch eine einfachere Form gegeben werden. Für den Integranden erhalten wir nämlich

$$(U^2 - 2aU + |p|^2)(U^2 - 2cU + |q|^2) = \{(U-a)^2 + b^2\}\{(U-c)^2 + d^2\}.$$

Führt man jetzt die Variable

$$U = \frac{a+c}{2} = x \quad , \quad \frac{a-c}{2} = a$$

ein, so erhält man schliesslich:

$$30) \quad \frac{d \xi}{\xi} = \frac{dx}{\sqrt{[(x-a)^2 + b^2][(x+a)^2 + d^2]}}$$

Das Umkehrproblem besteht nun darin, zu gegebenen  $a, b, d$  die drei aus  $p$  und  $q$  für diese Grössen hergestellten Gleichungen nach  $\varrho, \lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}$  aufzulösen.

### § 7. Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen.

Der Übergang von einer elliptischen Funktion  $f(w)$  zu einer multiplikativperiodischen wird bekanntlich<sup>1)</sup> dadurch erreicht, dass man statt der Variablen  $w$  ihren Logarithmus substituiert; denn dann werden alle Summeneigenschaften zu Produkteigenschaften:

$$f(\lg z_1 + \lg z_2) = f(\lg z_1 z_2).$$

Da der Logarithmus eine mehrdeutige Funktion ist, weist man nach, dass infolge der doppelten Periodizität alle Zweige der resultierenden Funktion identisch sind, sodass man sie zu einer einzigen eindeutigen Funktion verschmelzen kann. Ausgenommen sind natürlich die wesentlich singulären Punkte  $0$  und  $\infty$ .

Sei  $f(w)$  eine doppeltperiodische Funktion mit den Perioden  $2K$  und  $2K'i$ , so lautet die Substitution

$$31) \quad w = \frac{2K}{2\pi i} \lg z.$$

Das Argument der Funktion  $f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg z\right)$  erhält beim Zuwachs  $2k\pi i$  des Logarithmus den Zuwachs einer ganzen Zahl von Perioden  $2K$ ; der Funktionswert bleibt also ungeändert, was die Grundlage für die Verschmelzung bildet.

<sup>1)</sup> Über multiplikativperiodische Funktion cf. Rausenberger, Lehrbuch der period. Funktionen. Leipzig 1884, pag. 221 u. ff.

Damit die Funktion multiplikativperiodisch ist, muss ferner

$$f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg \varrho z\right) = f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg z\right) = f(w)$$

sein. Für die 2. Periode erhalten wir deshalb

$$2K' i = -\frac{2K}{2\pi i} \lg \varrho;$$

denn dann ist:

$$f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg \varrho + \frac{2K}{2\pi i} \lg z\right) = f(-2K' i + w) = f(w).$$

Als Periodenverhältnis ergibt sich:

$$32) \quad \frac{2K'}{2K} = -\frac{1}{2\pi} \lg \varrho,$$

ein Verhältnis, das wegen  $\varrho < 1$  positiv ist.

Zu unsrern multiplikativperiodischen Funktionen kann man also auch doppeltperiodische Funktionen bilden. Der Zusammenhang zwischen den Polen und Residuen von  $U_k(z, \omega) = U(z)$  und  $f(w)$  ist offenbar folgender:

Hat  $U(z)$  die Pole  $\lambda_{2k}$  und  $\lambda_{2k+1}$  mit den Residuen  $\lambda_{2k}$  und  $-\lambda_{2k+1}$ , so sind

$$\frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}, \quad \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k+1} = \frac{2K}{2\pi i} \lg |\lambda_{2k+1}| + K \text{ die Pole,}$$

$$\frac{2K}{2\pi i}, \quad -\frac{2K}{2\pi i} \text{ die entsprechenden Residuen der zugehörigen doppeltperiodischen Funktion } f(w); \text{ denn es ist}$$

Residuum von  $U(z)$  in  $\lambda_{2k} = \lambda_{2k}$ ;

$$\text{Residuum von } f(w) \text{ in } \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} = \lim_{w \rightarrow \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}} (w - \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}) f(w)$$

$$= \lim_{w \rightarrow \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}} (w - \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}) \left\{ \frac{\frac{\lambda_{2k}}{2\pi i}}{e^{\frac{2K}{2\pi i} w} - \lambda_{2k}} + \mathfrak{P}(w) \right\}$$

$$= \frac{\lambda_{2k}}{\left( \frac{d}{dw} e^{\frac{2K}{2\pi i} w} \right)_{w=\frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}}} = \frac{2K}{2\pi i},$$

$$\left( \frac{d}{dw} e^{\frac{2K}{2\pi i} w} \right)_{w=\frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}}$$

und ebenso

$$\text{Residuum von } f(w) \text{ in } \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k+1} = -\frac{2K}{2\pi i}.$$

Jetzt suchen wir für unsere doppeltperiodischen Funktionen eine Darstellung durch bekannte Funktionen. Für meromorphe Funktionen gibt es zweierlei Haupttypen: Produkt- und Partialbruchdarstellung, indem eben für die Faktoren oder Partialbrüche nicht algebraische Ausdrücke genommen werden, wie das in der Weierstraßschen und Mittag-Lefflerschen Darstellung der Fall ist, sondern Elemente von demselben Charakter wie die darzustellende Funktion, also hier bekannte doppeltperiodische Funktionen.

I. Die wichtigste Produktdarstellung der meromorphen doppeltperiodischen Funktionen ist die Darstellung durch  $\sigma$ - und  $\vartheta$ -Faktoren. Da wir nur Pole und keine Nullstellen unserer Funktion kennen, können wir eine solche Darstellung nur für eine Differenz zwischen

$$U\left(e^{\frac{2\pi i}{2K}w}\right) = f(w)$$

und einem ihrer speziellen Werte finden. Als solchen Wert können wir etwa

$$f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} + K\right)$$

wählen, der z. B. für die Funktionen, die einem zweigliedrigen Kettenbruch entspringen, gleich  $-\frac{1}{2}$  ist. Nun kennt man von der erwähnten Differenz die Pole und durch die elliptische Substitution auch die beiden Nullstellen. Aus

$$U(z) = U\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}\right)$$

folgt nämlich

$$33) \quad f(w) = f\left(-w + \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} \lambda_{2k+1}\right).$$

Als 2. Nullstelle ergibt sich also

$$\frac{2K}{2\pi i} (\lg \lambda_{2k} \lambda_{2k+1} - \lg \lambda_{2k}) - K = \frac{2K}{2\pi i} \lg |\lambda_{2k+1}|.$$

Das führt unmittelbar zu der Relation

$$\begin{aligned}
 34) \quad U(z) - U(-\lambda_{2k}) &= f(w) - f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} + K\right) \\
 &= \frac{\vartheta_1(0)}{2\pi i} \frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{\lambda_{2k}}{|\lambda_{2k+1}|} + \frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\right)} \frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{z}{\lambda_{2k}} + \frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{z}{\lambda_{2k}}\right)} \frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{z}{|\lambda_{2k+1}|} + \frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{z}{|\lambda_{2k+1}|}\right)}
 \end{aligned}$$

wobei  $\vartheta_1$  die ungerade  $\vartheta$ -Funktion<sup>1)</sup> ist. Die Konstante bestimmt sich ohne weiteres durch Multiplikation mit  $\left(w - \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}\right)$  und Grenzübergang, unter Benutzung des Residuums von  $f(w)$ .

II. Eine andere wichtige Art von Produktdarstellung ist die durch die  $sn$ -Funktion. Hier muss man darauf achten, dass  $sn$  u zwei getrennte Nullstellen und Pole hat. Durch eine Verschiebung des Parallelogrammnetzes um  $a$ , erzielt man, dass die beiden Nullstellen und Pole an die richtige Stelle kommen.<sup>2)</sup> Die Funktion

$$\frac{sn(w+a)}{sn(w)} = \frac{sn(\mu_1+a)}{sn(\nu_1+a)}$$

soll die Nullstellen  $\mu_1, \mu_2$   
und die Pole  $\nu_1, \nu_2$   
und nur diese besitzen. Nun ist hier

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} + K \\
 \mu_2 &= \frac{2K}{2\pi i} \lg |\lambda_{2k+1}| \\
 \nu_1 &= \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} \\
 \nu_2 &= \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k+1} = \frac{2K}{2\pi i} \lg |\lambda_{2k+1}| + K.
 \end{aligned}$$

Wir suchen nun  $a$  so zu bestimmen, dass

$$K - (\mu_1 + a) \equiv \mu_2 + a \pmod{2K, 2K'i}$$

ist, also auch

$$K - (\nu_1 + a) \equiv \nu_2 + a \pmod{2K, 2K'i}.$$

<sup>1)</sup> Goursat, Cours d'analyse mathématique II, 3. Aufl., 1918, pag. 203.

<sup>2)</sup> Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1874, pag. 350.

Daraus folgt

$$a = \frac{K}{2} - \frac{r_1 + r_2}{2} \pmod{2K, 2K' i}.$$

Setzen wir unsere Werte ein, so erhalten wir

$$a = \frac{K}{2} - \frac{K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} \lambda_{2k+1} = -\frac{K}{2\pi i} \lg |\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|,$$

$$U(z) = U(-\lambda_{2k}) = f(w) = f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} + K\right)$$

$$c \frac{\operatorname{sn}\left(w - \frac{K}{2\pi i} \lg |\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|)\right) + \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2\pi i} \lg \left|\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k+1}}\right|\right)}{\operatorname{sn}\left(w - \frac{K}{2\pi i} \lg |\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}|\right) - \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2\pi i} \lg \left|\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k+1}}\right|\right)}.$$

Die Konstante bestimmen wir auf die gleiche Art:

$$\lim_{w \rightarrow \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}} \left( w - \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} \right) \left\{ f(w) - f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} + K\right) \right\}$$

$$= \lim_{w \rightarrow \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k}} \left( w - \frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} \right) c \frac{\operatorname{sn}(w+a) + \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn}(w+a) - \operatorname{sn} a};$$

es ist also  $\frac{2K}{2\pi i} = c \frac{2 \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn}' a}$ , wobei  $a = \frac{K}{2\pi i} \lg \left|\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k+1}}\right|$  ist.

Schliesslich ergibt sich

$$c = \frac{K}{2\pi i} \left( \frac{\operatorname{sn}' w}{\operatorname{sn} w} \right)_w = \frac{K}{2\pi i} \lg \left| \frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k+1}} \right|.$$

Unsere Darstellung lautet also:

$$35) \quad U(z) = U(-\lambda_{2k}) = f(w) = f\left(\frac{2K}{2\pi i} \lg \lambda_{2k} + K\right)$$

$$\frac{K}{2\pi i} \left[ \frac{d \lg \operatorname{sn} w}{d w} \right]_w = \frac{K}{2\pi i} \lg \left| \frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k+1}} \right| \cdot \frac{\operatorname{sn}(w+a) + \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn}(w+a) - \operatorname{sn} a}.$$

III. Die wichtigste Darstellung vom 2. Typus ist die Partialbruchdarstellung von Hermite<sup>1)</sup> durch  $\zeta$ -Partialbrüche. Sie lautet hier ohne weiteres auf Grund der Hauptteile und Pole:

<sup>1)</sup> Goursat, Cours d'analyse mathématique, II. 3. Aufl., 1918, pag. 197.

$$36) \quad U(z) = f(w) = c + \frac{2K}{2\pi i} \xi \left( \frac{2K}{2\pi i} \lg \frac{z}{\lambda_{2k}} \right) - \frac{2K}{2\pi i} \xi \left( \frac{2K}{2\pi i} \lg \frac{z}{\lambda_{2k+1}} \right) \\ = c + \frac{K}{\pi i} \left\{ \xi \left( w - \frac{K}{\pi i} \lg \lambda_{2k} \right) - \xi \left( w - \frac{K}{\pi i} \lg \lambda_{2k+1} \right) \right\}.$$

Die Konstante bestimmt man wieder durch Grenzübergang:

$$c = U(-\lambda_{2k}) + \frac{K}{\pi i} \left\{ \xi \left( \frac{K}{\pi i} \lg \left| \frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k+1}} \right| \right) - \xi(K) \right\}.$$

Übrigens ist ihre Kenntnis nicht wichtig für die weitere Darstellung, da sie durch Differentiation verschwindet.

IV. Eine Darstellung für die Funktion  $z \cdot U'(z) = U_1(z)$  erhält man durch Differentiation aus der  $\xi$ -Darstellung für  $U(z)$ . Es ist für

$$f(w) = U \left( e^{\frac{2\pi i}{2K} w} \right)$$

$$f'(w) = \frac{2\pi i}{2K} \cdot e^{\frac{2\pi i}{2K} w} U' \left( e^{\frac{2\pi i}{2K} w} \right) = \frac{2\pi i}{2K} U_1 \left( e^{\frac{2\pi i}{2K} w} \right);$$

$$37) \quad U_1(z) = \frac{K}{\pi i} f'(w)$$

$$= \left( \frac{K}{\pi i} \right)^2 \left\{ \wp \left( w - \frac{K}{\pi i} \lg \lambda_{2k+1} \right) - \wp \left( w - \frac{K}{\pi i} \lg \lambda_{2k} \right) \right\}.$$

Diese Relation ist übrigens leicht unmittelbar aus den Eigenschaften von  $U_1(z)$  abzulesen.  $U_1(z)$  hat  $\lambda_{2k}$  und  $\lambda_{2k+1}$  als Doppelpole. Berechnet man durch sukzessive Subtraktion und Grenzübergang die Residuen von  $\frac{K}{\pi i} f'(w)$ , so verschwinden die Koefizienten der 1. Potenz, und

für den Pol  $\frac{K}{\pi i} \lg \lambda_{2k}$  ist  $-\left(\frac{K}{\pi i}\right)^2$  Koefizient der 2. Potenz und ebenso für  $\frac{K}{\pi i} \lg \lambda_{2k+1}$  ist  $\left(\frac{K}{\pi i}\right)^2$  Koefizient der 2. Potenz.

### § 8. Anwendung auf zweigliedrige Kettenbrüche.

Die Konstruktion soll für den einfachsten Fall, indem sich  $\omega$  in den Kettenbruch

$$\omega = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

entwickeln lässt, vollständig durchgeführt werden. Dieser Fall ist vor allem dadurch ausgezeichnet, dass  $k$  nur den Wert Null annehmen kann und deshalb nur eine Funktion

$$U_k(z, \omega) = U_0(z, \omega)$$

existiert.

Es ist

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$$

$$\varrho = \varepsilon^2 = \frac{P_2 - Q_2 \omega}{P_2 - Q_2 \omega'} = \frac{l_2 - \omega}{l_2 - \omega'} = (P_2 - Q_2 \omega)^2,$$

$$\text{oder } \varrho = \varepsilon^2 = (Q_2 \omega' + Q_1)^2.$$

Die quadratischen Zahlen, die als Pole der einzigen Funktion  $U_0(z, \omega)$  auftreten, sind

$$\lambda_0 = \frac{l_0 - \omega}{l_0 - \omega'} = 1$$

$$\text{und } \lambda_1 = \frac{l_1 - \omega}{l_1 - \omega'} = -\frac{\omega}{\omega'} \frac{P_2 - Q_2 \omega}{P_2 - Q_2 \omega'} = -(P_2 - Q_2 \omega) = -\varepsilon,$$

wegen  $l_1 = P_1 = Q_2 \omega^2 - (P_2 - Q_1) \omega$ .

Infolgedessen lautet die Partialbruchentwicklung:

$$38) \quad U_0(z, \omega) = z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{z - \varrho^n} - \frac{1}{z + \varrho^n \varepsilon} \right\},$$

oder in der 2. Form:

$$U_0(z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{z - \varrho^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n \varepsilon}{z + \varrho^n \varepsilon} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^{n+1} z}{\varrho^{n+1} z - 1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^{n+1} z}{\varrho^{n+1} z + \varepsilon}.$$

Daraus ergibt sich für  $z = -1$

$$U_0(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Wir erhalten folgenden

**Satz.** Lässt sich  $\omega$  in einen zweigliedrigen Kettenbruch entwickeln, so nimmt die Funktion  $U_0(z, \omega)$  an den Stellen  $z = -1, \varepsilon$  den Wert  $-\frac{1}{2}$  an, also

$$39) \quad U_0(-I) = U_0(\varepsilon) = -\frac{1}{2}.$$

Die Entwicklung der Funktion  $U_0(z, \omega)$  in eine Laurentsche Reihe lautet:

$$40) \quad U_0(z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^n} \frac{I - (-\varepsilon)^n}{I - \varrho^n}.$$

Infolge der, im obigen Satz ausgesprochenen, Eigenschaft der Funktion  $U_0(z, \omega)$  vereinfacht sich die Darstellung durch doppelperiodische Funktionen. Sie lautet:

$$U_0(z, \omega) + \frac{1}{2} = \frac{K}{2\pi i} \frac{\operatorname{sn}'\left(-\frac{K}{2\pi i} \lg \varepsilon\right) \operatorname{sn}\left(w - \frac{K}{2\pi i} \lg \varepsilon\right) - \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2\pi i} \lg \varepsilon\right)}{-\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2\pi i} \lg \varepsilon\right) \operatorname{sn}\left(w - \frac{K}{2\pi i} \lg \varepsilon\right) + \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2\pi i} \lg \varepsilon\right)}$$

$$\text{und wegen } \frac{K'}{K} = -\frac{\lg \varepsilon}{\pi}, \quad 2K'i = \frac{2K}{\pi i} \lg \varepsilon$$

$$41) \quad U_0(z, \omega) + \frac{1}{2} = \frac{K}{2\pi i} \frac{\operatorname{sn}'\left(-\frac{K'i}{2}\right) \operatorname{sn}\left(w - \frac{K'i}{2}\right) - \operatorname{sn}\left(\frac{K'i}{2}\right)}{-\operatorname{sn}\left(\frac{K'i}{2}\right) \operatorname{sn}\left(w - \frac{K'i}{2}\right) + \operatorname{sn}\left(\frac{K'i}{2}\right)}.$$

Für  $z U'_0(z, \omega)$  erhalten wir:

$$z U'_0(z, \omega) = \left(\frac{K}{\pi i}\right)^2 \left\{ \wp(w) - \wp(w - iK') \right\}.$$

Benutzen wir die Beziehung

$$\wp(u + v) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2 - \wp(u) - \wp(v),$$

$$\wp(w - iK') = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(w)}{\wp(w) - e_2} \right)^2 - \wp(w) - e_2,$$

so erhalten wir:

$$42) \quad z U'_0(z) = \left(\frac{K}{\pi i}\right)^2 \left\{ 2\wp(w) + e_2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(w)}{\wp(w) - e_2} \right)^2 \right\}.$$

## 2. Kapitel.

**Allgemeine funktionentheoretische Aufgabe.****§ 1. Nachweis der Körpereigenschaften der Funktionsgesamtheit.**

Die allgemeinste Funktion, die wir betrachten, ist die Funktion  $A^*(z)$ , die gegenüber der zyklischen hyperbolischen Untergruppe der Modulgruppe invariant bleibt und im Fundamentalbereich nur Pole als Singularitäten besitzt.

Die einfachste Funktion dieser Art, die im Fundamentalbereich nur zwei Pole hat, wurde im vorhergehenden Kapitel analytisch konstruiert. Unsere weitere Aufgabe ist nun den allgemeinen Satz zu beweisen, dass jede Funktion  $A^*(z)$  eine rationale Funktion der Grundinvarianten  $A(z)$  und der aus ihrer Ableitung gewonnenen Funktion  $\frac{(z-\omega)(z-\omega')}{\omega-\omega'} A'(z)$  ist, dass also die Gesamtheit unserer Funktionen  $A^*(z)$  einen Funktionenkörper bildet.

Wir haben bereits erwähnt, dass unsere Betrachtungen sich einfacher gestalten, wenn wir statt der automorphen Funktion, die daraus durch Ausführung der Substitution

$$1) \quad \xi = \frac{z-\omega}{z-\omega'} = Tz$$

erhaltene multiplikativperiodische Funktion einführen. Es ist dann

$$\begin{aligned} A^*(z) &= U^*(\xi) \\ A(z) &= U(\xi) \\ \frac{(z-\omega)(z-\omega')}{\omega-\omega'} A'(z) &= \xi U'(\xi) = U_1(\xi), \end{aligned}$$

und wir haben nur den Satz zu beweisen, dass jede multiplikativ-periodische Funktion  $U^*(z)$ , die im Fundamentalbereich nur endlich viele Pole besitzt, eine rationale Funktion der beiden Funktionen  $U(z)$  und  $U_1(z)$  ist.

Den Beweis gliedern wir. Zunächst kommen wir zu einigen einfachen Problemstellungen, die uns ein paar für sich interessante Tatsachen liefern. Als erste erhalten wir das Multiplikationstheorem, indem wir  $U(zu)$  durch  $U(z)$  rational ausdrücken. Das gelingt durch die Methode der Hermiteschen Partialbruch-Darstellung und

durch die Produkt-Darstellung. Die Partialbruch-Darstellung liefert uns eine Methode

$$U(zu) + U\left(\frac{z}{u}\right) \text{ rational durch } U(z) \text{ und } U_1(z)$$

auszudrücken. Die Methode der Produkt-Darstellung wenden wir nicht auf  $U(zu)$  selbst an, sondern auf

$$E(z, u) = \frac{H(zu)}{H(z)}$$

und erhalten eine Produkt-Darstellung für

$$E(tz, u) \cdot E\left(\frac{z}{ut}, u\right) \text{ durch } U(z).$$

Durch logarithmische Differentiation und Grenzübergang für  $t \rightarrow 1$  erhalten wir daraus eine Partialbruch-Darstellung für

$$U(zu) = U\left(\frac{z}{u}\right).$$

Addieren wir diese beiden Darstellungen für Summe und Differenz, so erhalten wir das allgemeine Multiplikationstheorem, d. h. eine Relation, die gestattet,  $U(zu)$  rational durch  $U(z)$  und  $U_1(z)$  auszudrücken. Die Methode der Produkt-Darstellung erlaubt es auch, die Funktion  $E(z, u)$  rational durch  $U(u'z)$  auszudrücken, wo also das Argument  $z$  mit einem Faktor multipliziert ist.

Zum Beweis des allgemeinen Theorems ist dann nur noch nachzuweisen, dass jede multiplikativperiodische Funktion durch  $E$ -Produkte ausgedrückt werden kann, was zu einem Analogon der  $\xi$ -Darstellung der elliptischen Funktionen führt.

### I. Ableitung einer Relation für $U(zu) + U\left(\frac{z}{u}\right)$ durch die Methode der Partialbruchzerlegung.

Es handelt sich also darum, ein Multiplikationstheorem zu gewinnen. Seien  $\mu$  und  $\nu$  nunmehr Pole von  $U(z)$ , so besteht die Beziehung

$$2) \quad U(zu) + U\left(\frac{z}{u}\right) = U(\nu u) + U\left(\frac{\nu}{u}\right) + \frac{U_1\left(\frac{\mu}{u}\right)}{U(z) - U\left(\frac{\mu}{u}\right)} - \frac{U_1\left(\frac{\nu}{u}\right)}{U(z) - U\left(\frac{\nu}{u}\right)}.$$

Diese Beziehung erhalten wir, wenn wir die Funktion  $U(zu)$  mit Hilfe der Hermiteschen Partialbruchmethode darstellen wollen.

Da  $U(zu)$  die einfachen Pole  $\frac{\nu}{u}$ ,  $\frac{\mu}{u}$  besitzt, haben wir diese Funktion mit

$$\frac{C_1}{U(z) - U\left(\frac{\mu}{u}\right)} + \frac{C_2}{U(z) - U\left(\frac{\nu}{u}\right)} = P(z)$$

zu vergleichen. Es ist aber zu beachten, dass  $U(z) - U\left(\frac{\mu}{u}\right)$  ausser der Nullstelle  $\frac{\mu}{u}$  auf Grund der elliptischen Substitution noch die Nullstelle  $\nu u$  besitzt, ein Umstand, der schon bei der Darstellung durch  $sn u$  aufgetreten ist. Ebenso hat  $U(z) - U\left(\frac{\nu}{u}\right)$  ausser der Nullstelle  $\frac{\nu}{u}$  noch eine andere in  $\mu u$ . Die Pole  $\nu u$  und  $\mu u$ , die infolgedessen in  $P(z)$  auftreten, sind gerade die Pole der Funktion  $U\left(\frac{z}{u}\right)$ . Es ist also

$$U(zu) + U\left(\frac{z}{u}\right) \text{ mit } P(z)$$

zu vergleichen. Beide Funktionen haben dieselben Pole und es sind noch die Residuen in Übereinstimmung zu bringen. Die Funktion  $U(zu) + U\left(\frac{z}{u}\right)$  hat entsprechend den Polen

$$\frac{\nu}{u}, \quad \frac{\mu}{u}, \quad \nu u, \quad \mu u$$

die Residuen  $-\frac{\nu}{u}, \quad \frac{\mu}{u}, \quad -\nu u, \quad \mu u$ .

Die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  von  $P(z)$  sind also so zu bestimmen, dass  $P(z)$  dieselben Residuen hat. Es ist deshalb zu verlangen,

dass Residuum von  $U(zu) + U\left(\frac{z}{u}\right)$  in  $\frac{\mu}{u} = \frac{C_1}{U'\left(\frac{\mu}{u}\right)} = \frac{\mu}{u}$  ist

und ebenso

Residuum von  $U(zu) + U\left(\frac{z}{u}\right)$  in  $\frac{\nu}{u} = \frac{C_2}{U'\left(\frac{\nu}{u}\right)} = -\frac{\nu}{u}$ .

Daraus ergibt sich

$$C_1 = U_1\left(\frac{\mu}{u}\right), \quad C_2 = -U_1\left(\frac{\nu}{u}\right).$$

Wegen

$$U_1\left(\frac{\mu}{u}\right) = -U_1(\nu u)$$

$$U_1\left(\frac{\nu}{u}\right) = -U_1(\mu u)$$

stimmen auch die andern Residuen miteinander überein. Die Funktionen  $U(z u) + U\left(\frac{z}{u}\right)$  und  $P(z)$  sind also beide multiplikativ-periodisch von der betrachteten Art und haben dieselben Pole und Hauptteile (Residuen). Ihre Differenz ist also nach allgemeinen Sätzen der Funktionentheorie eine Konstante. Um diese in

$$U(z u) + U\left(\frac{z}{u}\right) = P(z) + K$$

zu bestimmen, haben wir für  $z$  eine Nullstelle von  $P(z)$ , also einen Pol von  $U(z)$  zu setzen. Sei z. B.  $z = \nu$ , so ergibt sich

$$K = U(\nu u) + U\left(\frac{\nu}{u}\right).$$

## II. Ableitung einer Relation für $U(z u) - U\left(\frac{z}{u}\right)$ durch die Methode der Produkt-Darstellung.

Ganz analog können wir das Problem des Multiplikationstheorems mit Hilfe der Produkt-Darstellung erledigen.

Bis jetzt haben wir zur Bildung der multiplikativperiodischen Funktionen einzig die logarithmische Differentiation einer  $H_k(z, \omega)$ -Funktion benutzt und die Division, wie sie von Jacobi zur Bildung der  $sn u$ -Funktion angewandt wurde, noch gar nicht verwendet. Als einfachste solche Funktion erhalten wir

$$\frac{H(u z)}{H(z)} = E(z, u).$$

$H(z)$  habe die Nullstelle  $\mu$  und den Pol  $\nu$ .  $E(z, u)$  ist eine Funktion, deren logarithmische Ableitung auf eine Differenz zweier Funktionen  $U(z)$  führt. Es ist nämlich

$$z \frac{d \lg E(z, u)}{d z} = z \frac{d \lg H(z u)}{d z} - z \frac{d \lg H(z)}{d z} = U(u z) - U(z),$$

so dass man von einer Produkt-Darstellung für  $E(z, u)$  zu einer neuen Partialbruch-Darstellung für  $U(z)$  gelangen kann. Entsprechend der Funktionalgleichung

$$U\left(\frac{\lambda_{2k} \lambda_{2k+1}}{z}\right) = U(z)$$

ergibt sich hier, auf Grund der Gleichung

$$\frac{H(u z)}{H(z)} = \frac{H\left(\frac{\mu \nu}{z}\right)}{H\left(\frac{\mu \nu}{u z}\right)},$$

die elliptische Substitution

$$3) \quad z' = \frac{\mu \nu}{u z} ,$$

so dass wir die Funktionalgleichung erhalten:

$$4) \quad E \left( \frac{\mu \nu}{u z} , u \right) = E(z, u) .$$

Jetzt nehmen wir die Fragestellung des Multiplikationstheorems wieder auf, indem wir suchen  $E(tz, u)$  rational durch  $U(z)$  auszudrücken. Bei der Funktion  $U(z)$  haben wir die Partialbruch-Zerlegung angewendet, weil wir die Nullstellen von  $U(z)$  nicht kennen. Da wir von der Funktion  $E(z, u)$  die Nullstellen ohne weiteres angeben können, es sind nämlich die Stellen

$$\nu \text{ und } \frac{\mu}{u} ,$$

so ist für  $E(z, u)$  die Produkt-Darstellung die natürlichste. Die Pole von  $E(z, u)$  sind

$$\frac{\nu}{u} \text{ und } \mu .$$

Es ist klar, dass man davon ausgehend durch logarithmische Differentiation wieder eine Partialbruchzerlegung erhält.

$E(tz, u)$  hat die Nullstellen  $\frac{\nu}{t}$ ,  $\frac{\mu}{u t}$  und die Pole  $\frac{\nu}{u t}$ ,  $\frac{\mu}{t}$ .

Indem wir von  $E(tz, u)$  ausgehen und die überflüssigen Nullstellen berücksichtigen, die bei den  $U(z)$ -Differenzen auftreten, erhalten wir:

$$5) \quad E(tz, u) E \left( \frac{z}{u t} , u \right) = E(t\nu, u) E \left( \frac{\nu}{u t} , u \right) \frac{U(z) - U \left( \frac{\nu}{t} \right)}{U(z) - U \left( \frac{\mu}{t} \right)} \cdot \frac{U(z) - U \left( \frac{\mu}{u t} \right)}{U(z) - U \left( \frac{\nu}{u t} \right)} .$$

Für  $E(tz, u)$  hat man nämlich auf Grund der erwähnten Nullstellen und Pole den Ansatz:

$$\frac{U(z) - U \left( \frac{\nu}{t} \right)}{U(z) - U \left( \frac{\mu}{t} \right)} \cdot \frac{U(z) - U \left( \frac{\mu}{u t} \right)}{U(z) - U \left( \frac{\nu}{u t} \right)} .$$

Auf Grund der elliptischen Substitution treten im Zähler die überflüssigen Nullstellen  $\mu t, \nu u t$  auf, im Nenner  $\nu t, \mu u t$ . Das sind gerade die Nullstellen und Pole von  $E\left(\frac{z}{u t}, u\right)$ . Das Verhältnis des Produktes  $E(t z, u) E\left(\frac{z}{u t}, u\right)$  zu dem gemachten Ansatz ist also konstant. Die Konstante können wir wieder bestimmen, indem wir für  $z$  einen Pol der Funktion  $U(z)$  setzen.

Die Formel 5) eignet sich zur logarithmischen Differentiation. Wir kommen dann leicht zu  $U(z)$ , indem wir noch mit  $z$  multiplizieren. Differenziert man nach  $z$ , so erhält man:

$$U(t z u) - U(t z) + U\left(\frac{z}{t}\right) - U\left(\frac{z}{u t}\right) = \\ U_1(z) \cdot \left[ \frac{1}{U(z) - U\left(\frac{\nu}{t}\right)} - \frac{1}{U(z) - U\left(\frac{\mu}{t}\right)} + \frac{1}{U(z) - U\left(\frac{\mu}{u t}\right)} - \frac{1}{U(z) - U\left(\frac{\nu}{u t}\right)} \right],$$

wobei aber ursprünglich  $t \neq 1$  vorausgesetzt war. Machen wir den Grenzübergang für  $t \rightarrow 1$ , so erhalten wir

$$6) \quad U(z u) - U\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{U_1(z)}{U(z) - U\left(\frac{\mu}{u}\right)} - \frac{U_1(z)}{U(z) - U\left(\frac{\nu}{u}\right)}.$$

### III. Allgemeines Multiplikationstheorem für $U(z)$ .

Nun haben wir zwei Darstellungen erhalten, die uns Summe und Differenz von  $U(z u)$  und  $U\left(\frac{z}{u}\right)$  durch  $U(z)$  ausdrücken. Durch Addition erhalten wir das allgemeine Multiplikationstheorem

$$7) \quad U(z u) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_1(z) + U_1\left(\frac{\mu}{u}\right)}{U(z) - U\left(\frac{\mu}{u}\right)} - \frac{U_1(z) + U_1\left(\frac{\nu}{u}\right)}{U(z) - U\left(\frac{\nu}{u}\right)} + U(\nu u) + U\left(\frac{\nu}{u}\right) \right\}.$$

Wir können also  $U(z u)$  rational durch  $U(z)$  und  $U_1(z)$  ausdrücken.

Man kann nun für  $E(z, u)$  eine Produkt-Darstellung durch  $U(u' z)$  erhalten.  $E(z, u)$  hat die Nullstellen  $\nu, \frac{\mu}{u}$  und die Pole  $\mu, \frac{\nu}{u}$ .

Von vornherein wäre man geneigt, folgenden Ansatz zu machen:

$$\frac{U(z) - U(\nu)}{U(z) - U(\mu)} \cdot \frac{U(z) - U\left(\frac{\mu}{u}\right)}{U(z) - U\left(\frac{\nu}{u}\right)}.$$

Nun ist aber  $U(\nu) = U(\mu) = \infty$ , so dass der erste Quotient gleich eins wird. In dem übrigbleibenden Ausdruck haben aber Zähler und Nenner noch die überflüssigen Nullstellen  $\nu u$  und  $\mu u$ , die nicht wegzubringen sind. Wir machen deshalb den Ansatz

$$\frac{U(a z) - U(a \nu)}{U(a z) - U(a \mu)}.$$

Dieser Ausdruck hat die Nullstelle  $\nu$  und den Pol  $\mu$ . Die Konstante  $a$  bestimmen wir nun so, dass die Nullstellen und Pole bei Ausführung der elliptischen Substitution in die noch fehlenden Nullstellen und Pole übergehen. Im Zähler ist die zweite Nullstelle gegeben auf Grund der elliptischen Substitution durch

$$a z = \frac{\mu \nu}{a \nu}, \quad z = \frac{\mu}{a^2};$$

im Nenner durch

$$a z = \frac{\mu \nu}{a \mu}, \quad z = \frac{\nu}{a^2}.$$

Damit die Nullstelle im Zähler zu  $\frac{\mu}{u}$  und im Nenner zu  $\frac{\nu}{u}$  wird, muss offenbar  $a = \sqrt{u}$  sein. Beiderseits hat man also wiederum multiplikativperiodische Funktionen mit denselben Nullstellen und Polen, ihr Verhältnis ist also eine Konstante:

$$E(z, u) = K \frac{U(\sqrt{u} z) - U(\sqrt{u} \nu)}{U(\sqrt{u} z) - U(\sqrt{u} \mu)}.$$

Zur Bestimmung von  $K$  kann man offenbar etwa  $z = \frac{\nu}{\sqrt{u}}$  setzen, wodurch der Quotient rechts zu 1 wird, und sich für

$$K = E\left(\frac{\nu}{\sqrt{u}}, u\right)$$

ergibt. Sodass wir also haben:

$$8) \quad E(z, u) = E\left(\frac{\nu}{\sqrt{u}}, u\right) \frac{U(\sqrt{u} z) - U(\sqrt{u} \nu)}{U(\sqrt{u} z) - U(\sqrt{u} \mu)}.$$

Aus der Zusammenstellung dieser Darstellung mit dem allgemeinen Multiplikationstheorem 7) für  $U(z)$  folgt, dass  $E(z, u)$  rational durch  $U(z)$  und  $U_1(z)$  ausgedrückt werden kann.

Damit wir nun unsern funktionen-theoretischen Hauptsatz in seiner Allgemeinheit beweisen können, müssen wir nur noch beweisen, dass jede multiplikativperiodische Funktion von der hier betrachteten Art sich rational durch  $E(z, u)$  ausdrücken lässt. Dieser Satz ist aber nichts anderes als ein Analogon zur Hermiteschen Partialbruch-Darstellung durch  $\xi$ -Partialbrüche. Statt der Summe von  $\xi$ -Ausdrücken treten hier Produkte von  $E$ -Quotienten auf.

Für die Funktionen 2. Ordnung mit den Polen  $\nu_1, \nu_2$  und den Nullstellen  $\mu_1, \mu_2$  ist der Satz ohne weiteres richtig; denn

$$H^*(z) = \frac{H\left(\frac{\nu}{\nu_1} z\right)}{H\left(\frac{\nu}{\nu_2} z\right)}$$

hat die gleichen Pole. Eine richtige Nullstelle könnte man er-

zielen, wenn man die Konstante  $\frac{H\left(\frac{\nu}{\nu_1} \mu_1\right)}{H\left(\frac{\nu}{\nu_2} \mu_1\right)}$  subtrahiert. Die 2.

Nullstelle ist aber auf Grund der allgemeinen Sätze schon mitbestimmt, sodass die Funktionen 2. Ordnung sicher proportional dem hergestellten Ausdruck  $H^*(z)$  sind.

Für eine Funktion  $U^*(z)$  beliebiger Ordnung ergibt sich die Richtigkeit des Satzes durch vollständige Induktion. Man bildet

$$9) \quad V(z) = \frac{U^*(z)}{H^*(z)},$$

wo  $H^*(z)$  mit zwei Polen und einer Nullstelle von  $U^*(z)$  konstruiert ist.  $V(z)$  hat dann  $n-1$  Pole, nämlich:

$$\nu_3, \nu_4 \dots \nu_n \text{ und dazu noch } \mu_2 = \varrho^k \frac{\nu_1 \nu_2}{\mu_1}.$$

$\mu_2$  ist eine Nullstelle von  $H^*(z)$ .  $V(z)$  ist eine Funktion  $n-1$  Ordnung, und für die haben wir den Satz als richtig angenommen.

## § 2. Konstruktion für den Fall, dass die Erzeugende der Gruppe eine Potenz von $\bar{S}$ ist.

Es soll gezeigt werden, dass in diesem Fall das Konstruktionsprinzip ungeändert angewendet werden kann und zu wesentlich denselben Resultaten führt.

Sei  $S - \bar{S}^r$  die Erzeugende der Gruppe, dann wird die Funktion auf folgende Art gebildet:

$$E_k(z, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \frac{z}{S^n l_{2k}}}{1 - \frac{z}{S^n l_{2k+1}}} , \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \frac{r\nu}{2} - 1).$$

Die grundlegenden Tatsachen, Fundamentallemma und Kettenbruchbeziehungen, gelten hier ungeändert. Speziell erhalten wir als Verallgemeinerung von 13) und 13') in § 2, I. Teil:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} P_{r\nu} | n = P_{r\nu} P_n + P_{r\nu-1} Q_n \\ Q_{r\nu} | n = Q_{r\nu} P_n + Q_{r\nu-1} Q_n \end{cases} \\ \text{und} \quad & \begin{cases} P_{n-r\nu} = (-1)^{r\nu} \{ Q_{r\nu-1} P_n - P_{r\nu-1} Q_n \} \\ Q_{n-r\nu} = (-1)^{r\nu} \{ -Q_{r\nu} P_n + P_{r\nu} Q_n \} , \end{cases} \\ & l_{r\nu} | n = S^{-1} l_n = \bar{S}^r l_n \\ & l_{r\nu-1} | n = S^{-1} l_n = \bar{S}^{-r} l_n . \end{aligned}$$

Wendet man in  $E_k(z, \omega)$  auf  $z$  die Substitution  $S$  an, so ergibt sich nach dem Fundamentallemma

$$E_k(Sz, \omega) = \frac{\omega_{2k+1}}{\omega_{2k-1}} E_k(z, \omega) .$$

Daraus kann wie früher die automorphe Funktion durch logarithmische Differentiation gebildet werden. Ebenso können wir wie früher zu den multiplikativperiodischen Funktionen übergehen.

Die weitere Entwicklung, namentlich über das funktionentheoretische Hauptproblem, gilt, wie bereits erwähnt wurde, ohne Änderung auch für den Funktionenkörper mit den hier angegebenen Grundinvarianten.

Ausser durch logarithmische Differentiation können wir hier mit Hilfe des Divisionsverfahrens automorphe Funktionen bilden. Infolge

$$\omega_h = \omega_{h'} \quad h \equiv h' \pmod{\nu}$$

sind die Funktionen

$$\frac{E_0(z, \omega)}{E_{(r-1)\frac{\nu}{2}}(z, \omega)} , \quad \frac{E_{\frac{\nu}{2}}(z, \omega)}{E_{(r-1)\frac{\nu}{2}}(z, \omega)} , \quad \dots , \quad \frac{E_{(r-1)\frac{\nu}{2}}(z, \omega)}{E_{(r-1)\frac{\nu}{2}}(z, \omega)}$$

automorph.

### § 3. Fall nicht reduzierter Fixpunkte.

Nachdem die Funktion mit reduzierten Fixpunkten konstruiert ist, ist noch zu ergänzen, wie eine Funktion zu einer hyperbolischen zyklischen Gruppe konstruiert werden kann, deren Fixpunkte nicht reduzierte quadratische Zahlen sind. Im gruppentheoretischen Teil (§ 1, 10) wurde gezeigt, wie man aus der Kettenbruchentwicklung von nicht reduzierten Fixpunkten  $\Omega$  eine Substitution  $S_*$  gewinnen kann, so dass

$$10) \quad S_* \Omega = \omega$$

$$S_*^{-1} = \begin{pmatrix} p_{\mu} & p_{\mu-1} \\ q_{\mu} & q_{\mu-1} \end{pmatrix} \quad p_{\mu} q_{\mu-1} - q_{\mu} p_{\mu-1} = 1.$$

Der Substitutionsgruppe, erzeugt durch  $\bar{S}^r$  mit den reduzierten Fixpunkten  $\omega, \omega'$ , entspricht hier eine holoëdrisch isomorphe mit der Erzeugenden

$$11) \quad S_*^{-1} \bar{S}^r S_* = S'$$

deren Fixpunkte  $\Omega$  und  $\Omega'$  sind. Ist eine automorphe Funktion  $A_k(z, \omega)$  der Gruppe mit der Erzeugenden  $\bar{S}^r$  konstruiert, so kann man sofort einsehen, dass die Funktion

$$12) \quad \mathfrak{A}_k(z, \Omega) = A_k(S_* z, \omega)$$

eine automorphe Funktion der Gruppe mit nicht reduzierten Fixpunkten ist; denn es ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_k(S' z, \Omega) &= \mathfrak{A}_k(S_*^{-1} \bar{S}^r S_* z, \Omega) = A_k(S_* S_*^{-1} \bar{S}^r S_* z, \omega) = A_k(\bar{S}^r S_* z, \omega) \\ &= A_k(S_* z, \omega) \end{aligned}$$

und wegen 12) ist  $A_k(S_* z, \omega) = \mathfrak{A}_k(z, \Omega)$ .

Die Funktion  $\mathfrak{A}_k(z, \Omega)$  ist also invariant gegenüber der Substitution  $S'$ :

$$\mathfrak{A}_k(S' z, \Omega) = \mathfrak{A}_k(z, \Omega).$$

Im I. Teil § 2 17) haben wir gesehen, dass bei dieser Funktion genau wie bei der aus dem Kettenbruch konstruierten, die Näherungsbrüche

$$L_n = S_*^{-1} l_{n-\mu}$$

die Pole der Funktion sind. Im geometrischen Teil haben wir den Zusammenhang zwischen dem Kreisbüschel mit den Nullkreisen  $\omega, \omega'$  und demjenigen mit den Nullkreisen  $\Omega$  und  $\Omega'$  untersucht.

Die Residuen von  $\mathfrak{A}_k(z, \Omega)$  unterscheiden sich von den Residuen von  $A_k(z, \omega)$  durch den Faktor  $\frac{1}{(q_{\mu} l_{2k} + q_{\mu-1})^2}$ , wenn

$\lambda_{2k}$  Pol von  $A_k(z, \omega)$  ist. Es ist also

Residuum von  $\mathfrak{A}_k(z, \Omega)$  in  $L_{2k}$  = [Res. von  $A_k(z, \omega)$  in  $\lambda_{2k}$ ]  $\cdot \frac{1}{(q_{\mu} \lambda_{2k} + q_{\mu-1})^2}$ .

Jetzt ist noch der Zusammenhang mit den multiplikativperiodischen Funktionen zu untersuchen. Der Übergang wird hergestellt durch

$$\mathfrak{U}_k(z, \Omega) = \mathfrak{A}_k(T_1^{-1} z, \Omega). \quad \left( T_1 z = \frac{z - \Omega}{z - \Omega'} \right).$$

Von  $\mathfrak{U}_k(z, \Omega)$  gelangen wir zu  $U_k(z, \omega)$  durch

$$\mathfrak{U}_k(T_1 S_*^{-1} T_1^{-1} z, \Omega) = U_k(z, \omega).$$

Es ist also

$$\mathfrak{U}_k(z, \Omega) = U_k(T S_* T_1^{-1} z, \omega) = U_k(v, \omega),$$

wo  $T_1$  die Substitution bedeutet:

$$\left( \frac{1 - \Omega}{1 - \Omega'} \right).$$

Die Substitution  $T S_* T_1^{-1}$  haben wir im geometrischen Teil ausgerechnet und gesehen, dass

$$v = \frac{q_{\mu} \omega + q_{\mu-1}}{q_{\mu} \omega' + q_{\mu-1}} z = \frac{z}{c}$$

ist.

$$c = \frac{q_{\mu} \omega' + q_{\mu-1}}{q_{\mu} \omega + q_{\mu-1}}.$$

Wir erhalten also schliesslich:

$$\mathfrak{U}_k(z, \Omega) = U_k\left(\frac{z}{c}, \omega\right).$$

In dieser Form sieht man ohne weiteres, dass  $\mathfrak{U}_k(z, \Omega)$  multiplikativperiodisch mit derselben Periode  $\varrho$  ist. Der Zusammenhang zwischen den Polen und Residuen ist der folgende:

Pole von  $U_k(z, \omega)$  :  $\lambda_{2k}, \lambda_{2k-1}$

Pole von  $\mathfrak{U}_k(z, \Omega)$  :  $\lambda_{2k} \cdot c, \lambda_{2k-1} \cdot c$

Res. von  $\mathfrak{U}_k(z, \Omega)$  in  $\lambda_{2k} \cdot c = \lambda_{2k} \cdot c$

Res. von  $\mathfrak{U}_k(z, \Omega)$  in  $\lambda_{2k-1} \cdot c = -\lambda_{2k-1} \cdot c$

Damit ist die Aufgabe, die Funktionen zur zyklischen hyperbolischen Untergruppe der Modulgruppe zu konstruieren und alle Funktionen zu bestimmen, die im Fundamentalbereich bis auf Pole regulär sind, erledigt.

