

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Solothurn
Band: 3 (1904-1906)

Artikel: Mathematik in Natur und Kunst
Autor: Emch, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-543211>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>



Mathematik in Natur und Kunst

von

Prof. Dr. A. Emch.

I.

Schon Plato sagte, die Geometrie sei die Erkenntnis des ewig Seienden und dass ohne die Rechenkunst, die Messkunst und die Wägekunst wenig mehr von den Künsten übrigbleiben würde. Pythagoras und seine Schule reduzierten das Wesen aller Dinge auf die Zahl. Bei ihnen wird von der sinnlichen Konkretion der Materie abgesehen und die Quantität und die räumlichen Verhältnisse werden zur Hauptsache gemacht. Unterschiede der Quantität jedoch führen auf die Zahl, das Wesentliche der pythagoräischen Philosophie. Aristoteles in seiner Kritik der platonischen Theorien stellte vier Prinzipien auf, nach welchen das Universum klassifiziert werden könne: Stoff, Form, Bewegungsursache und Zweckmässigkeit. Von diesen sind Stoff und Form fundamental und schliessen die andern ein. Die bewegende Ursache ermöglicht die Verwandlung der unvollständigen Wirklichkeit oder Potentialität in Wirklichkeit, oder von Stoff in Form. Er nahm ferner an, dass in jeder Bewegung des Unvollständigen zum Vollständigen das letztere der Hauptbegriff und der Anstoss zu dieser Bewegung sei, so dass folglich bei Aristoteles die Form als die bewegende Ursache der Materie aufzufassen ist. Es spielen also hier Raumbetrachtungen, oder, abstrakt genommen, geometrische Prinzipien eine Hauptrolle.

Aber auch bei weniger hoch entwickelten Völkern des Altertums, ja sogar bei den halbwilden und wilden Völkerstämmen der Gegenwart zeigt es sich, dass gewisse Ordnungserscheinungen in der

Natur und im Leben als solche erkannt und abstrahiert werden. Man denke nur an die Arbeitsgesänge bei verschiedenen Beschäftigungen, an das Verhältnis zwischen Arbeit und Rhythmus, wie es von Dr. Karl Bücher in interessanter und lehrreicher Weise dargelegt wurde.¹⁾

Das regelmässige Wiederkehren gewisser Naturerscheinungen und Begebenheiten im menschlichen Leben, die regelmässige periodische Bewegung und das wiederholte Auftreten gruppenmässiger Anordnungen bilden Hauptfaktoren bei der Auffassung der Erfahrungswelt und der Gestaltung des geistigen Lebens.

Seit Plato und Pythagoras, seit dem schönen aristotelischen Denken und den geistreichen Spekulationen von Jahrhunderten der Philosophie haben wir gelernt, die Welt von ganz andern Gesichtspunkten zu betrachten, und in der menschlichen Erkenntnis hat sich vieles geändert und abgeklärt. Anstatt vier allgemeine Prinzipien anzunehmen, haben wir ein grosses Prinzip: die Erhaltung von Materie und Energie. Dasselbe gründet sich auf Kraft, Stoff und Bewegung, oder besser gesagt, es drückt eine konstante Beziehung zwischen denselben aus. Stoff beansprucht Raum und die Form erscheint als Grenzprozess in der Verschiebung oder Bewegung der Materie. Das Prinzip von der Erhaltung von Materie und Energie ist das oberste Gesetz der physischen Welt. Bis dahin ist es der Wissenschaft nicht gelungen, Gesetze von solcher Allgemeinheit für die Erscheinungen der organischen und psychischen Welt aufzustellen oder zu entdecken. Die Abstammungslehre mag als Ausnahme betrachtet werden, aber man darf nicht vergessen, dass die organische Evolution nur die historische Entwicklung der Lebewesen und nicht den Mechanismus des Lebens erklärt.

Obschon Plato die Mathematik von der Philosophie ausgeschlossen hatte, so betrachtete er sie doch als unentbehrliche Hilfswissenschaft zum philosophischen Studium. Heute jedoch ist es rein unmöglich, in vernünftiger Weise in das Wesen des Raumes und der Zeit einzudringen, ohne dass das bezügliche Studium ebensowohl mathematisch als philosophisch genannt werden kann. Wer mit dem Inhalte der nichteuclidischen und mehrdimensionalen Geometrien vertraut ist, weiss, dass die Forschungen eines Lobatschewsky, eines Bolyai und einer ganzen Anzahl neuerer Mathematiker notwendig waren, um Licht in das Wesen des Raumes zu bringen.

¹⁾ *Arbeit und Rhythmus*, Leipzig, Teubner, 1902.

Als Hauptsatz darf aufgestellt werden, dass unsere Rauman-schauung nicht a priori nach Kantschem Muster bedingt ist, sondern dass sie sich allmählig aus der Erfahrung herausgebildet hat. Infolge dieser Erkenntnis lässt sich denn auch der Raum, der Ort, wo sich die Naturgegenstände befinden und wo sich die Vorgänge der Natur abspielen, geometrisch durch verschiedene Bilder darstellen ¹⁾ und es darf nicht behauptet werden, dass nur ein bestimmtes unter diesen Bildern der Wirklichkeit entspreche.

Hatten die antiken Völker das Bedürfnis, in ihren Betrachtungen das Gesetzmässige, die Zahl und die Form herauszuschälen, so ist das heute um so mehr der Fall. Neben dem wissenschaftlichen Selbstzweck, der dabei verfolgt wird, stellt sich aus praktischen Gründen die absolute Notwendigkeit heraus, solche Studien zu unternehmen, um in viele Gebiete der menschlichen Erkenntnis tiefer eindringen zu können und um vieles besser zu begreifen. ²⁾

Wenn nun von Mathematik in der Natur die Rede ist, so wird man nach dem, was vorausgeht, nicht mehr über eine solche Prä-tention erstaunt sein. Um so leichter wird die Erklärung zu der folgenden diskreten Auswahl von Beispielen sein, welche gesetzmässig formuliert ein mathematisches Gepräge an sich tragen. Von da aus ergibt sich dann der Übergang zur Mathematik in der Kunst von selbst.

II.

Es würde zu weit führen, auch nur auf die Hauptgesetze der physikalischen und chemischen Erscheinungen und ihre mathematische Formulierung einzutreten und es genügt, hier in Erinnerung zu rufen, dass die grössten Triumphe der Astronomie und teilweise auch der Physik aus mathematischen Berechnungen hervorgingen. Die Kristall-systeme- und -Formen liefern geradezu ein typisches Beispiel rein geometrischer Zusammenhänge. Alle kristallographischen Grund-formen können aus der geometrischen Bewegungslehre und der Spiegelung abgeleitet werden und es zeigt sich dabei, dass es theoretisch 230 verschiedene regelmässige Punktgruppen gibt, welche sämtlichen möglichen Kristallformen entsprechen. ³⁾ Interessant und

¹⁾ Poincaré: *La Science et l'Hypothèse*.

²⁾ Siehe Henri Poincaré: *Der Wert der Wissenschaft*, Leipzig, Teubner, 1906.

³⁾ P. Groth: *Physikalische Kristallographie*, Leipzig, W. Engelmann, 1895. A. Schoenflies: *Kristallsysteme und Kristallstruktur*, Leipzig, Teubner, 1891.

für die Zuverlässigkeit mathematischer Forschung charakteristisch ist es jedoch, dass umgekehrt nicht alle Kristallformen, welche theoretisch möglich sind, in der Natur bekannt sind und man ist geneigt anzunehmen, dass die vermissten Formen wirklich existieren und später gefunden werden möchten.

Bei der Bewegung der Gletscher in normaler Gestaltung springen dem Beobachter auf den ersten Blick die Strömungslinien und Gletscher-spalten in die Augen, welche in mathematischem Sinne ein System

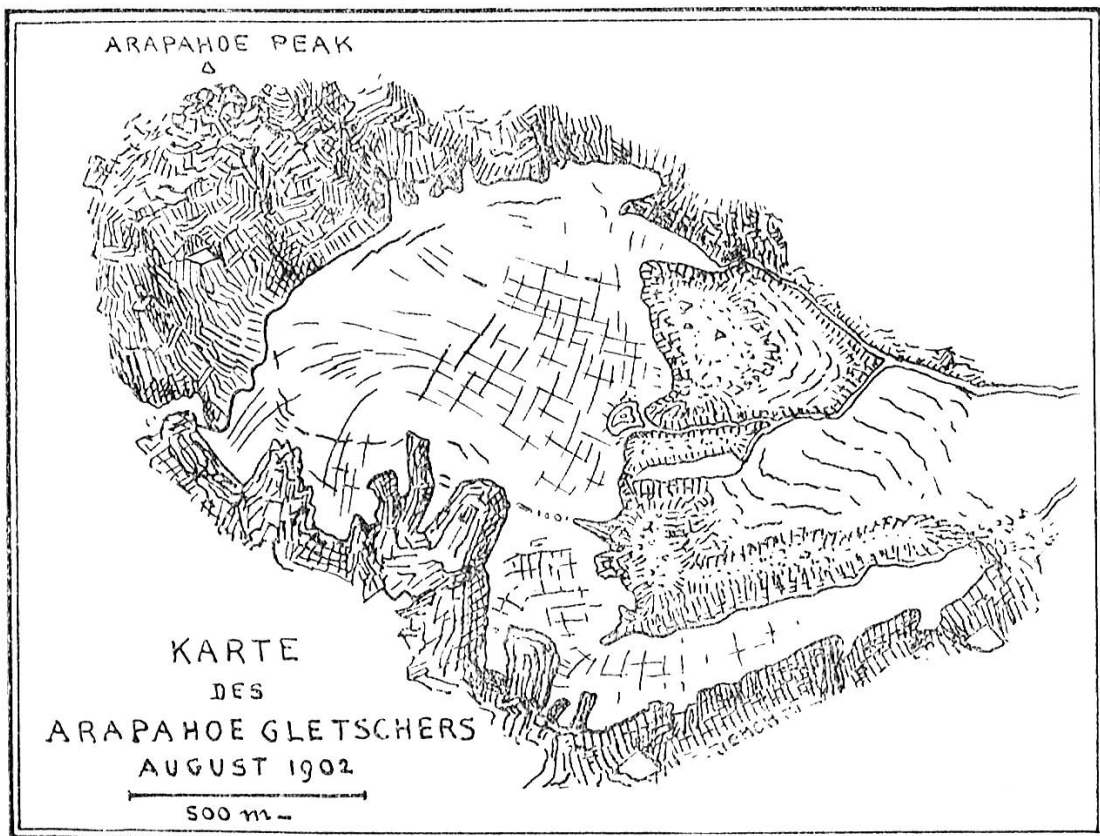


Fig. 1.

orthogonaler Trajektorien bilden, wie in Fig. 1 angedeutet ist. Die Spalten stellen hier teilweise die Linien gleicher Geschwindigkeit, teilweise die Linien maximaler Zugspannung dar. Man hat es also bei der Gletscherbewegung mit einer Kombination von Strömungs- und Spannungstrajektorien zu tun. Die Spannungstrajektorien können am einfachsten durch die projektive Involution der Schnittrichtungen und Spannungen in einem Spannungsfelde erklärt werden.¹⁾ In jeder Involution kommt bekanntlich ein Rechtwinkelpar vor, welches der maximalen und minimalen Spannung in jedem Punkte des Feldes

¹⁾ Ritter: *Graphische Statik*, I. B., S. 128—134.

entspricht und dadurch erklärt sich die Orthogonalität der Trajektorien. Als ausserordentlich interessantes Beispiel eines Spannungsfeldes mit elliptischer Involution führe ich die Spaltenbildung auf-trocknender Schlammfelder an, wie sie sich nach einer Überschwemmung bilden. Das gleiche gilt für die Spältelung stark lackierter oder bemalter Holzflächen, ¹⁾ Fig. 2. In beiden Fällen stehen die zahlreichen Spalten und Spältchen, welche sich beim Auftrocknen bilden, fast ausnahmslos senkrecht aufeinander und haben ihren Grund in der Involution ausschliesslicher Zugspannungen in jedem Punkte

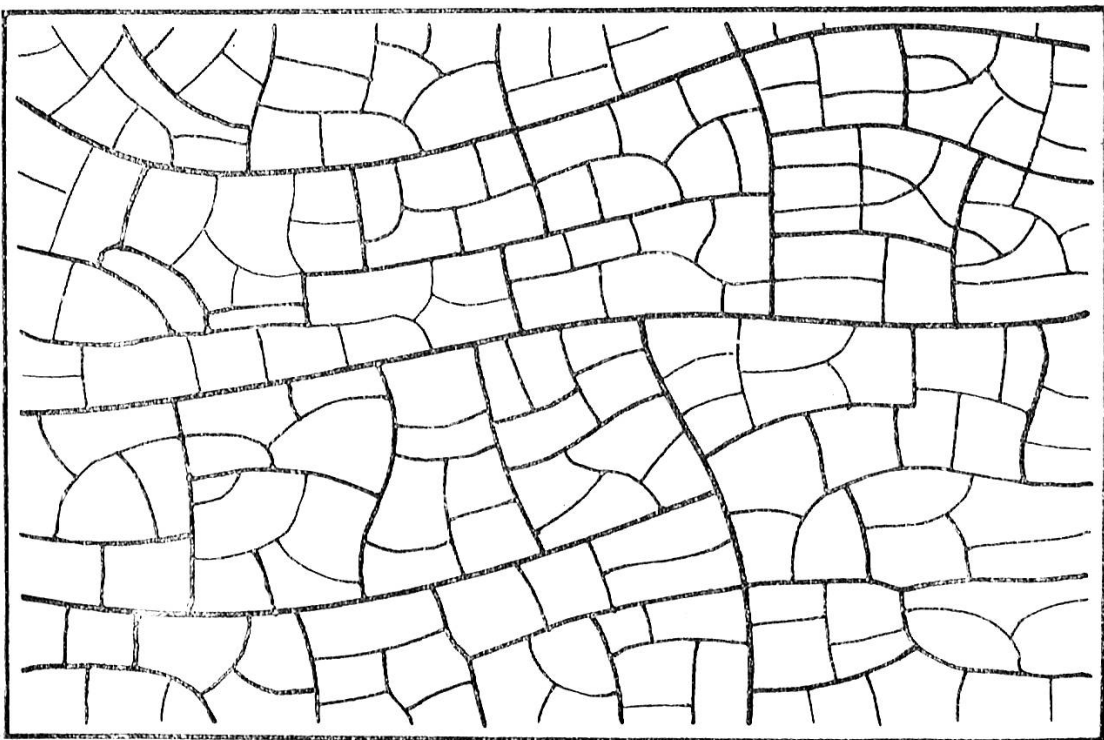


Fig. 2.

des betreffenden Feldes. Bei dieser Involution wirken auf das Rechtwinkelpaar nur Zugspannungen. Eine davon ist die maximale, die andere die minimale Spannung. Man sollte deshalb erwarten, dass die maximalen Zugspannungsspalten ein System mehr oder weniger paralleler Kurven bildeten, was jedoch nicht der Fall ist. Man kann diese Abweichung, wie sie in Fig. 2 zur Darstellung kommt, auf folgende Weise erklären: Durch die Bildung einer Spalte wird die maximale Zugspannung und Beanspruchung senkrecht auf ihre Richtung aufgehoben, so dass nun die frühere minimale Span-

¹⁾ A. Emch: *An Introduction to Projective Geometry and its Applications*, S. 239. New York, John Wiley & Sons, 1905.

nung in der Richtung der Spalte zur maximalen Spannung in diesem Teile des Feldes wird. Der nächste Riss wird sich deshalb senkrecht zur ersten Spalte bilden.

Obschon der mechanischen Darstellung der Lebenserscheinungen und der organischen Formen ausserordentliche Schwierigkeiten entgegengetreten und kaum an eine mathematische Formulierung biologischer Probleme gedacht werden kann, so sieht der aufmerksame Beobachter im Pflanzen- und Tierreich doch manches, was ein mathematisches Gepräge an sich trägt.

Man denke nur an das Mendelsche Gesetz der Vererbung und seine Verifikation durch die interessanten Untersuchungen von Prof. L. Cuénot in Nancy über die Kreuzung weisser und grauer Mäuse¹⁾ und von Prof. A. Lang über Varietätenbildung bei Gartenschnecken.²⁾

Durch die Kreuzung der gewöhnlichen grauen Maus mit der weissen Albino Maus entstehen lauter graue Nachkommen; das graue Element G dominiert, während das weisse Element W durch das graue verborgen ist. Kreuzt man dann zwei der Nachkommen, so entstehen nicht nur graue, sondern auch weisse Mäuse und zwar verhält sich die Anzahl der grauen zu der Anzahl der weissen, wie 3 : 1. Um diese von Mendel allgemein beobachtete Tatsache zu erklären, wird die Voraussetzung gemacht, dass die elterlichen Elemente G und W sich bei der Kreuzung nicht vereinigen, sie bleiben getrennt, eine Hälfte besteht aus G-, die andere Hälfte aus W-Elementen. Bei der Zeugung sind nun unter der G- und W-Elemente folgende Kombinationen in gleicher Anzahl möglich

G und G,
G und W,
W und G,
W und W.

Jede dieser Kombinationen gibt die Grundlage zu einem Nachkommen und wo ein G-Element in der Kombination ist, dominiert das Grau. Unter den Nachkommen werden also durchschnittlich drei grau und einer weiss sein, was quantitativ vollständig mit den Experimenten verschiedener Forscher auf diesem Gebiete überein-

¹⁾ *Revue Scientifique*, Paris (28. April 1906).

²⁾ *Über die Mendelschen Gesetze, Art und Varietätenbildung, Mutation und Variation, insbesondere bei unsern Hain- und Gartenschnecken*. Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft in Luzern, 1905.

stimmt. Das Resultat kann durch die Formel dargestellt werden

$$G W. G W = 1 G G + 2 G W + 1 W W.$$

Dieses Gesetz, dem in allgemeiner Formulierung wohl auch eine grosse Bedeutung in der menschlichen Gesellschaft zukommt, geht also in seiner Begründung aus der Kombinationslehre, einem rein formalen mathematischen Gebiete hervor.

In der Biometrie ist bekannt, dass Grösse und Anzahl der Samen einer Pflanze in einem gesetzmässigen Zusammenhang stehen. Trägt man die Durchmesser der Samen als Abscissen und die Anzahl der Samen von demselben Durchmesser als Ordinaten ab, so entstehen Linienzüge, welche sich mehr oder weniger der bekannten Fehlerhäufigkeitskurve der Wahrscheinlichkeitsrechnung ¹⁾ nähern und für die entsprechenden Pflanzen durchaus charakteristisch sind.

Auffallend in mathematischem Sinne ist auch die Anordnung des Blätterstandes bei verschiedenen Pflanzen. Sie geschieht nach ganz bestimmten Gesetzen und ist für jede Spezies konstant. Je zwei aufeinanderfolgende Blätter derselben Spezies sind stets durch denselben Betrag $\frac{n}{m}$ des Umfanges von einander getrennt. Die Brüche $\frac{n}{m}$, welche wirklich bei der Anordnung alternierender Blätter erscheinen, sind die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

d. h. $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$ und sind die Glieder einer speziellen Lamé'schen Reihe. ⁽²⁾ Sie werden Divergenzen genannt und weisen ein rationelles Verhältniss zum Achsenumfang auf, so dass auf der Grundspirale, auf der Schraubenlinie, welche die Blätter trägt, nach einem bestimmten Cyclus jedes Blatt vertikal zu einem tieferliegenden zu stehen kommt. Der Zweck der Natur in dieser sozusagen raffiniert mathematischen Anordnung besteht in der möglichst gleichmässigen Verteilung der Blätter an der gemeinsamen Achse. Dadurch wird die beste Ausnützung des Raumes, die gleichmässige Belastung der Achse und bei vertikaler Stellung auch die beste Benutzung der Beleuchtung erreicht. ²⁾

¹⁾ J. Bertrand: *Calcul des Probabilités*, S. 175—246 (Paris).

²⁾ Strassburger: *Lehrbuch der Botanik für Hochschulen*, S. 31—35.

Die Schraubenbewegung kommt bei den Schlingpflanzen vor. Mechanisch ist die Schraubung dadurch begründet, dass der dem Licht zugewandte Teil der Pflanzenachse sich besser entwickelt und folglich auch mehr ausdehnt und eine Biegung um die umrankte Stelle verursacht. Dass aber die meisten Schlinggewächse mit wenigen Ausnahmen (Hopfen, Geisblatt, Polygonum Convolvulus) Linkswinder sind, wird durch den Geotropismus physiologisch bloss umschrieben, aber mechanisch nicht erklärt. Eigentümlich ist es nach meinen eigenen Beobachtungen im Felsengebirge auch, dass die Föhren und Bergtannen in der Nähe der Waldgrenze unter dem Einflusse der durch die Winde verursachten Torsion und Biegung eine linksgängige Anordnung der Fasern zeigen.

Was die Form der Pflanzenblätter anbelangt, so sind es nach Bodo Habenicht ¹⁾ vielfach äussere Einflüsse der Witterung, mechanische Einwirkungen, welche die Form der Blätter bedingen. Es gelang diesem Forscher, die meisten Blattformen analytisch durch Gleichungen von der Form

$$r = f(\cos \varphi)$$

in Polarcoordinaten darzustellen, und er gibt sich der Hoffnung hin, dass es mit der Zeit gelingen müsse, den physiologischen Beweis für die Notwendigkeit dieser bestimmten Formen zu erbringen.

Als ausgezeichnetes Beispiel mathematischer Notwendigkeit erwähne ich die Anordnung des innern Blütenstandes einer vollkommenen Wucherblume (*Chrysanthemum Leucanthemum*) und der gewöhnlichen Kamille (*Matricaria Chamomilla*). Bei diesen Blumen wachsen die Durchmesser der innern Blütchen proportional mit der Entfernung vom Mittelpunkt, wie es nach der radialen Vergrösserung der Fläche nach aussen ganz natürlich erscheint. Damit aber bei diesem Gesetz die grösst mögliche Ausnützung der Gesamtfläche durch die grösst mögliche Anzahl von Teilblüten erzielt werde, müssen je drei benachbarte Blütenkreise einander gegenseitig berühren, wie es auch bei einer Anordnung gleich grosser Kreise in einem ebenen rechteckigen Felde der Fall ist. Um diese Behauptung zu beweisen, stellen wir zuerst fest, dass der Flächeninhalt irgend einer Anordnung von Kreisen im Rechteck in der Form $p \cdot x \cdot y$ dargestellt werden kann, wobei p alle möglichen Werte $0 < p < 1$ annehmen kann. Durch irgend eine Transformation mit Ausschluss von Sin-

¹⁾ *Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter*, Berlin, Otto Salle, 1905.

galaritäten geht nun der Ausdruck $p \cdot x \cdot y$ über in eine Funktion $p \cdot F(X, Y)$ des transformierten Feldes. Ist nun m derjenige Wert von p , welcher $p \cdot x \cdot y$ zu einem Maximum macht, so wird auch $m \cdot F(X, Y)$ ein Maximum im neuen Felde sein. Fasst man das rechteckige Feld als in einer komplexen Zahlenebene gelegen auf und macht die Transformation ¹⁾

$$Z = e^z = e^{x+iy},$$

so dass

$$X = e^x \cdot \cos y, \quad Y = e^x \cdot \sin y$$

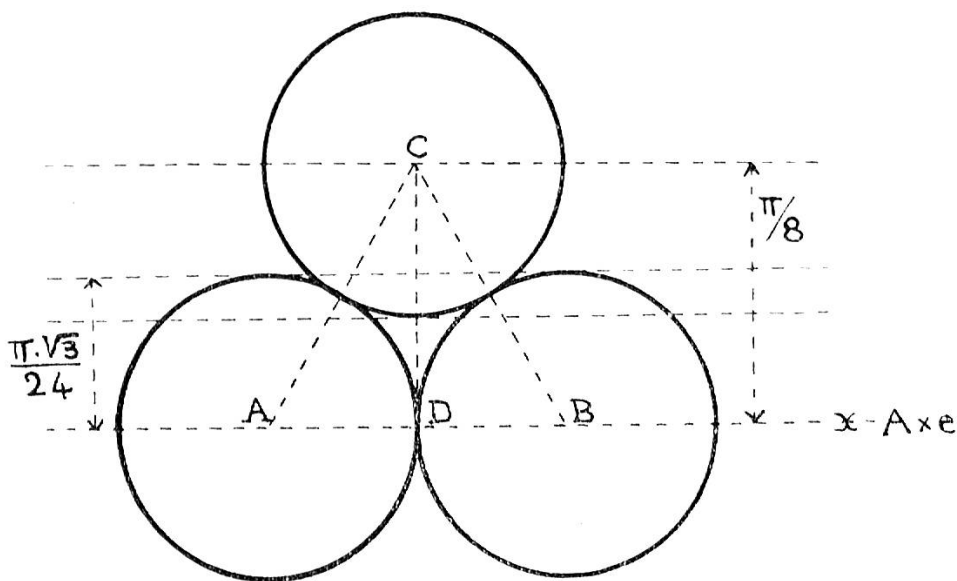


Fig. 3.

wird, so geht das System der parallelen Geraden $x = \text{konst.}$ in das System konzentrischer Kreise

$$X^2 + Y^2 = e^{2x},$$

und dasjenige der Parallelen $y = \text{konst.}$ in das Büschel

$$Y = X \cdot \tan y$$

über. Die Funktion e^z hat die Periode $2i\pi$, so dass der Streifen der z -Ebene zwischen $y = \pi$ und $y = -\pi$ gerade einfach und vollständig auf die Z -Ebene abgebildet wird. Teilt man diesen Streifen in Teilstreifen von $\frac{\pi}{8}$ Masseinheiten Abstand und betrachtet die Teillinien als Orte gleichgrosser sich berührender Kreise, so beträgt der Radius aller dieser Kreise nach Fig. 3

¹⁾ Siehe Fricke: *Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höhern Mathematik. Analytisch-funktionen-theoretischer Teil.* Leipzig, Teubner, 1900.

$$A D = C D \cdot \tan 30 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{24}.$$

Bezeichnet man den halben Winkel, welchen nach der Transformation die gemeinschaftlichen Tangenten einer radialen Reihe sich berührender Kreise miteinander einschliessen mit α , so ist also

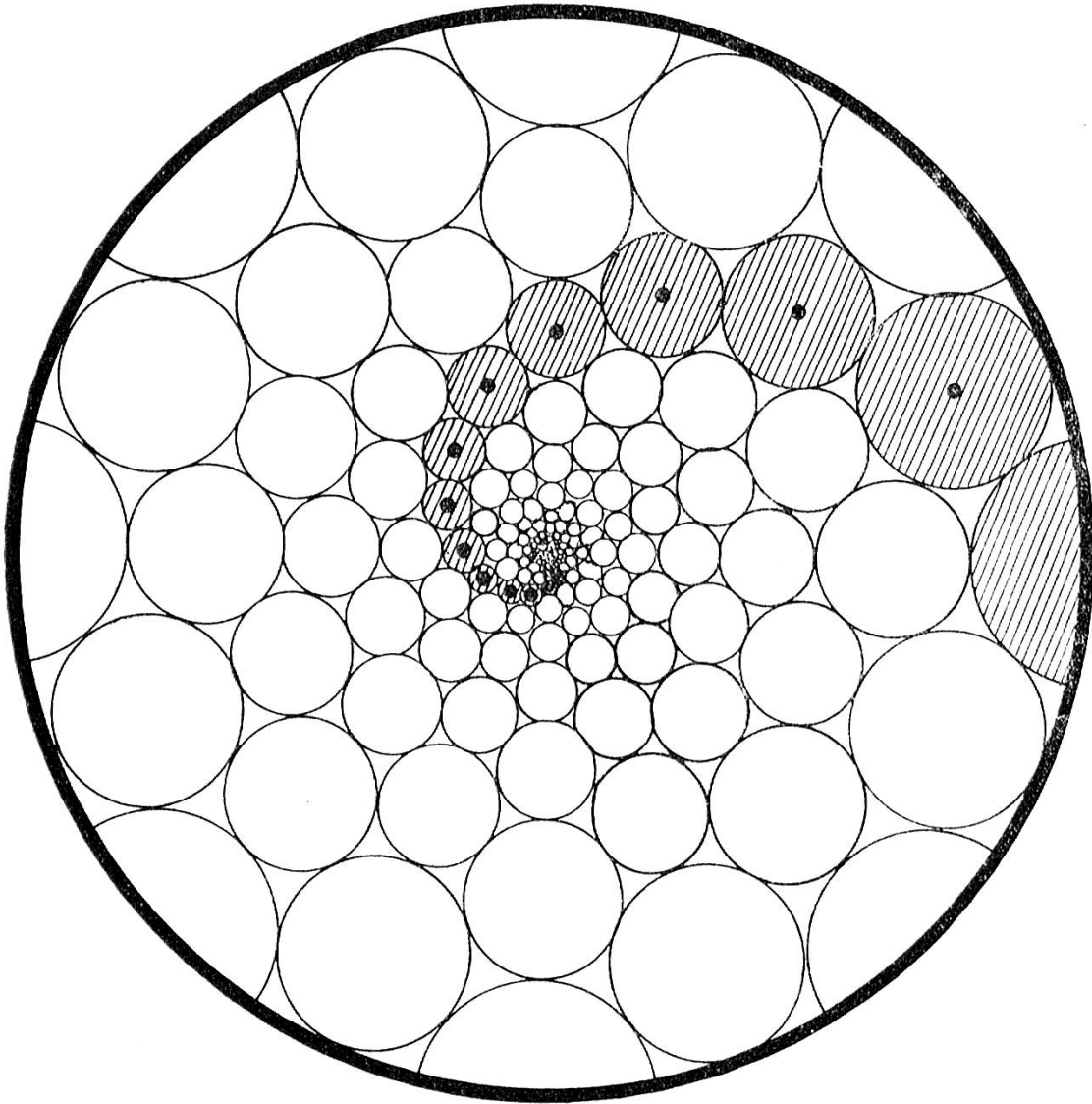


Fig. 4.

$$\tan \alpha = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{24},$$

und $\alpha = 12^\circ 46' 28''$. Mit Hilfe dieses Winkels war es leicht möglich, Fig. 4 zu zeichnen, welche genau die Anordnung des innern Blütenstandes einer vollkommenen *Chrysanthemum Leucanthemum* darstellt. In Polarcoordinaten der Z -Ebene ist $\phi = Y$ und $\varrho = \sqrt{X^2 + Y^2}$

und der Geraden $y = (x - a) m$ in der z -Ebene entspricht die logarithmische Spirale

$$\Phi = (\log \varrho - a) m ,$$

oder wenn man die Konstanten $a = \log b$ und $m = 1/k$ setzt

$$\varrho = b \cdot e^{k \cdot \Phi} .$$

In Fig. 4 bilden die Mittelpunkte der Kreise, welche den sich berührenden Kreisen in der Richtung von A nach C und von B nach C entsprechen logarithmische Spiralen, welche sich unter Winkeln von 60° , respektive 120° schneiden. Eine solche Spirale ist durch die Mittelpunkte der schraffierten Kreise angedeutet.

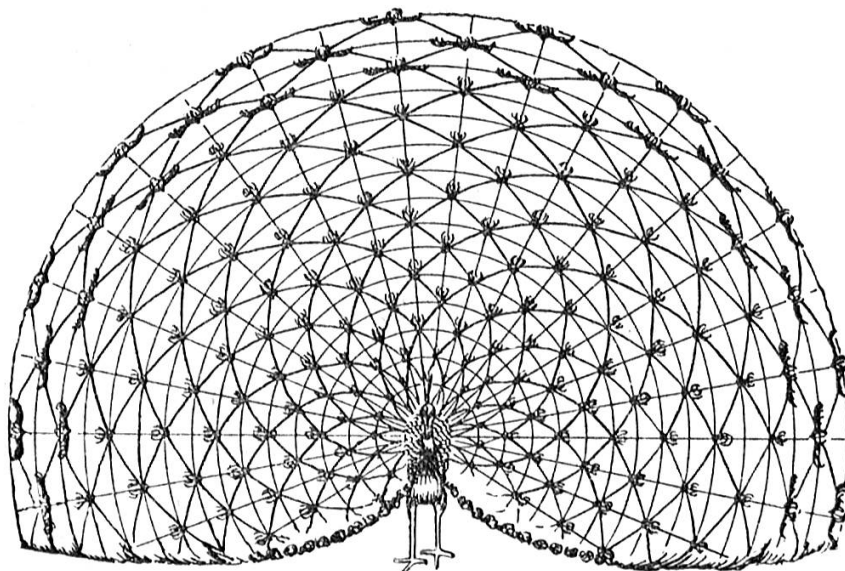


Fig. 5.

In der Zoologie sind noch die prächtigen Spiralen der Schneckengehäuse, Amoniten, der regelmässigen Radiolarien etc. zu erwähnen. Es gibt jedoch kaum ein Lebewesen, welches das geometrische Auge in grösserem Masse anzieht, als der Plan eines ausgebreiteten Pfauenschwanzes, in welchem jede Feder vollkommen und am richtigen Platze ist, Fig. 5. Die Kurven, welche sich nach rechts und links winden, sind archimedische Spiralen und die ganze Zeichnung ist symmetrisch.

III.

Wenden wir uns nun zur Kunst, so kann festgestellt werden, dass in allen Gebieten derselben gewisse Gesetzmässigkeiten, wie sie aus Naturbetrachtungen hervorgehen, von grundlegender Be-

deutung sind. Wenn sich diese Gesetzmässigkeiten auch nicht in einen metaphysischen Formalismus auflösen lassen, wie es die Alten taten, so können sie doch vielfach zur Vereinfachung ihrer Auffassung in mathematischem Gewande dargestellt werden. Bei der Musik und Dichtung sind es rhythmische Bewegungen, periodische Wiederholungen, welche für den mechanischen Teil der effektiven Kunst massgebend sind. Mathematisch werden solche periodische Erscheinungen durch Fouriersche Reihen dargestellt. Karl Bücher hat denn auch gezeigt,¹⁾ dass ursprünglich Körperbewegung, Arbeit, Musik und Dichtung in engster Wechselbeziehung waren und dass auch heute dieser durch Rhythmus hervorgebrachte Zusammenhang noch besteht. Man denke nur an die Massenübungen bei den grossen nationalen Turnfesten, an den Taktschritt des Militärs unter Musik- oder Trommelbegleitung etc. In dieser Beziehung sagt Fr. Nietzsche in seiner „fröhlichen Wissenschaft“²⁾: „Der Rhythmus ist ein Zwang, er erzeugt eine unüberwindliche Lust nachzugeben, mit einzustimmen; nicht nur der Schritt der Füße, auch die Seele selber geht dem Takte nach.“

Für die bildenden Künste bildet die Aussenwelt die Hauptquelle der artistischen Motive und ihre Wertschätzung in ästhetischer Beziehung ist teilweise durch die Gesetzmässigkeiten in der Erscheinungswelt, wie solche im zweiten Teile aufgedeckt wurden, teilweise durch die Physiologie der menschlichen Sinne in ihrem psychologischen Zusammenhange bedingt. Auch hier spielen gesetzmässig wiederholte Erscheinungen, eine rhythmische Wiederkehr bildlicher Eindrücke eine bedeutende Rolle.

Beim weitem Verfolgen dieser Zusammenhänge werde ich mich der Einfachheit halber auf die Betrachtung elementarer ästhetischer Formen beschränken, um die Prinzipien zu illustrieren, welche solche Formen beherrschen und die unendlichen Erzeugnisse der Einbildung und Originalität beiseite lassen.³⁾

Damit ein freies organisches Wesen keinen unnatürlichen Spannungen und Lagen unterworfen sei, ist notwendig, dass sein Schwer-

¹⁾ Loc. cit. S. 342—377.

²⁾ *Die fröhliche Wissenschaft* (Leipzig 1887), S. 105.

³⁾ Die folgenden Ausführungen sind der Hauptsache nach meinem Artikel „*Mathematical Principles of Esthetic Forms*“ entnommen, welcher im „*Monist*“, Vol. XI. Nr. 1, Oktober 1900, Chicago, The Open Court Publishing Co. erschien, und mit Erlaubnis des Editors hier veröffentlicht.

punkt in einer Senkrechten durch den Unterstützungspunkt sei. Die Natur hat diese mechanische Bedingung in einfachster Weise dadurch erfüllt, dass sie die Massen der meisten Lebewesen symmetrisch in Bezug auf Punkte, Geraden und Ebenen angeordnet hat. Obschon dieses Prinzip für das Tierreich und für einen grossen Teil der Pflanzenwelt gilt, so ist es doch nicht ganz allgemein; aber es genügt, um darzutun, dass die Symmetrie eines der fundamentalen Prinzipien ist, welche ästhetische Formen regieren. Symmetrie einfacher oder höherer Art ist in den meisten Fällen eine notwendige Eigenschaft ästhetischer Formen. Ein Mensch mit einem amputierten Arm, oder nur mit einem Ohr ist keine ästhetische Erscheinung, weil die Symmetrie zerstört ist. Aus demselben Grunde stimmt ein Baum, welcher auf einer Seite all seiner Äste beraubt, oder geneigt ist, nicht zu unserer Auffassung einer idealen Baumform.

Das grossenteils von der Natur diktierte Gefühl für symmetrische Formen ist im menschlichen Geiste so stark entwickelt, dass es bei der Schaffung künstlerischer Formen konventionell geworden ist. Es hat die Architektur durch Jahrhunderte bis zur heutigen Zeit dominiert. Grosse Denkmäler der Baukunst, welche allgemein als schön betrachtet werden, stehen niemals im Widerspruch zu den Gesetzen der Symmetrie.

Physiologisch ist die Wahrnehmung symmetrischer Formen durch die anatomische Struktur des Auges bedingt, wie Professor Mach nachgewiesen hat.¹⁾ Der ganze Apparat des Auges ist symmetrisch in Bezug auf die Mittelebene des Kopfes und ist fähig, vollkommen symmetrische Bewegungen auszuführen. Visuelle Bewegungen dieser Art erzeugen deshalb gleiche oder annähernd gleiche Raumempfindungen. Auf diese Weise kann die Gleichheit symmetrischer Figuren in Bezug auf eine vertikale Axe leicht erkannt werden. Das Prinzip der Symmetrie macht sich ferner auch bei gewissen Bewegungen von Händen und Füßen geltend, so lange sie nicht durch das Bewusstsein kontrolliert werden.

Ebenso wichtig als das Prinzip der Symmetrie ist für die Beurteilung ästhetischer Formen dasjenige der Repetition, des schon erwähnten Rhythmus visueller Erscheinungen, welcher psychologisch offenbar dieselbe Quelle hat, wie Musik und Dichtung.

¹⁾ *Contributions to the Analysis of the Sensations*, S. 41—81. *Popular Science Lectures. On Symmetry*, S. 89—106. — Beides publiziert von »The Open Court Publishing Co.«, Chicago.

Bei der ursprünglichen Entwicklung des menschlichen Geistes werden Figuren durch physiologische Eigenschaften und nicht durch geometrische Betrachtungen unterschieden. Die Geometrie ist jedoch ein Produkt des menschlichen Geistes und gründet sich axiomatisch auf primitive Gesichts- und Muskelempfindungen. Diese wichtige Tatsache macht es möglich, rein geometrische Gesetze aufzustellen, welche zum Teil ästhetische Formen regieren. Ihre Verträglichkeit mit den fundamentalen Erfahrungstatsachen gewisser angenehmer Empfindungen führt uns auf eine geometrische Theorie, welche im Stande ist, einige der Grundlagen artistischer Formen zu erklären.¹⁾

Bemerkenswert ist dabei, dass Miss Ethel Puffer vom Wellesley College, Mass. durch rein psychologische Betrachtungen zu Resultaten gelangte, welche sich der Hauptsache nach mathematisch formuliert mit den unsrigen decken.²⁾

Welches ist nun in erster Linie das abstrakte Gesetz der Symmetrie? Um diese Frage zu beantworten, muss beachtet werden, dass es in der Geometrie zwei Methoden gibt, um geometrische Formen zu untersuchen.³⁾ Die erste umfasst den Gruppenbegriff, welcher im einfachsten Falle darin besteht, dass zwei oder mehrere lineare Bewegungen im Raume immer durch eine einzige Bewegung derselben Art ersetzt werden können. Die Bewegung ist die fundamentale Idee dieser Geometrie. Die zweite gründet sich auf den sichtbaren Raum und braucht Lichtstrahlen oder Geraden als aufbauende Elemente. Diese eignet sich besser zur Diskussion derjenigen Formen, welche sich auf axiale und zentrale Symmetrie gründen. Metrische Eigenschaften ergeben sich hier als bestimmte Funktionen des Doppelverhältnisses von vier linearen Elementen.

¹⁾ Über weitere Faktoren, welche bei der Beurteilung einer Kunstform in Betracht kommen, findet der Leser Aufschluss in Professor Wundt's *Physiologische Psychologie*, S. 179. Man konsultiere auch Soret: *Des conditions physiques de la perception du beau*, Genf, 1892.

²⁾ Auf diese Übereinstimmung wurde der Verfasser durch die Rede des Herrn Professor J. Royce von der Harvard Universität am Kongress der Künste und Wissenschaften in St. Louis, sowie in verdankenswerter Weise durch briefliche Mitteilung aufmerksam gemacht. Die Untersuchungen Miss Puffers wurden unter dem Titel »The Psychology of Beauty« bei Houghton Mifflin & Co., Boston, veröffentlicht.

³⁾ Näheres darüber bei Poincaré: »*On the Foundations of Geometry*«, The Monist, Vol. IX, Nr. 1. Ferner Sophus Lie: *Theorie der Transformationsgruppen* und *Theorie der Berührungstransformationen*.

Nimmt man z. B. vier aufeinanderfolgende Punkte $A B C D$ einer Geraden, so kann eines der Doppelverhältnisse dieser Punkte durch

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

oder durch das gleichbedeutende Symbol $(ABCD)$ definiert werden. Wählt man einen der Punkte, etwa D , unendlich fern und das Segment BC als Längeneinheit, so ist der Wert des

Doppelverhältnisses $(ABCD)$ gleich dem Längenmasse des Segmentes AC . Der einfachste Fall axialer Symmetrie, derjenige zweier Punkte A und B in Bezug auf einen Punkt C (auch radiale Symmetrie) geht als spezieller Fall aus dem Doppelverhältnis $(ABCD) = -1$ hervor. Die vier Punkte sind involutorisch und gehen in die verlangte Symmetrie über, wenn der Punkt D ins Unendliche rückt. In der Geometrie bedeutet das Wort Involution, dass in einer gegebenen Konfiguration eine Verwandtschaft zwischen den Elementen besteht, welche sich nicht ändert,

wenn man irgendwelche Elemente durch ihre entsprechenden ersetzt. Die Involution ist also eines der hauptsächlichsten Merkmale der Symmetrie. Eine andere wichtige Eigenschaft der Symmetrie ist die Unveränderlichkeit ihres mathematischen Ausdruckes durch die projektiven Transformationen des Raumes und deckt sich mit dem funda-

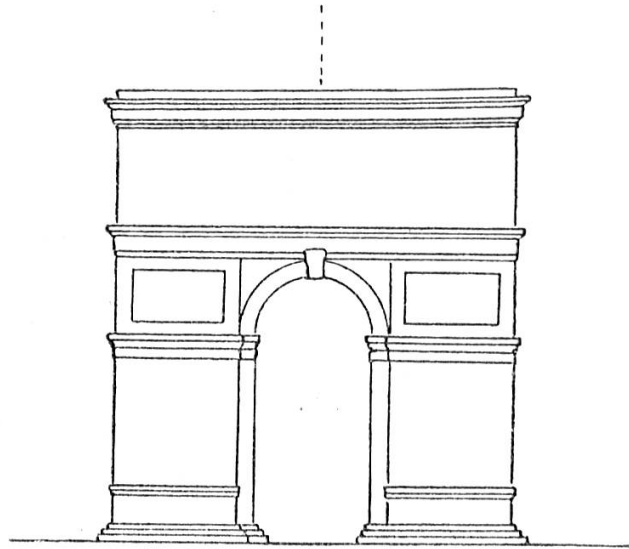


Fig. 6 a.

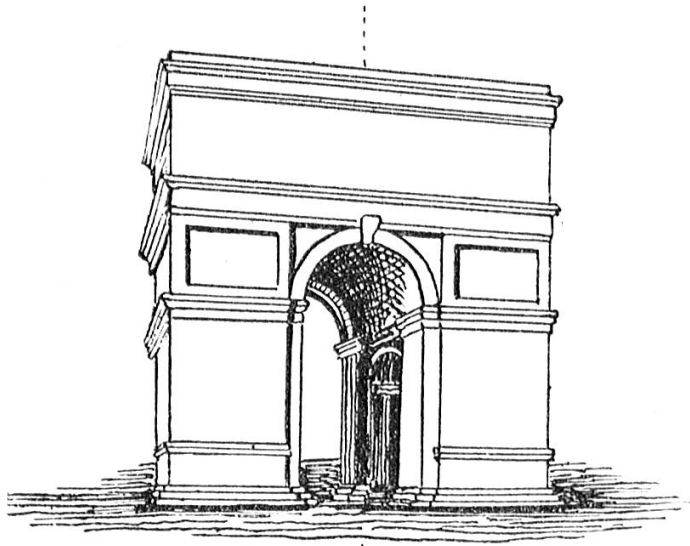


Fig. 6 b.

mentalen Gesetz der Perspektive. Aus diesem Grunde geht die Symmetrie in unserem Anschauungsraum nicht verloren, wie das deutlich aus einer Frontalansicht und einer Perspektive eines sym-

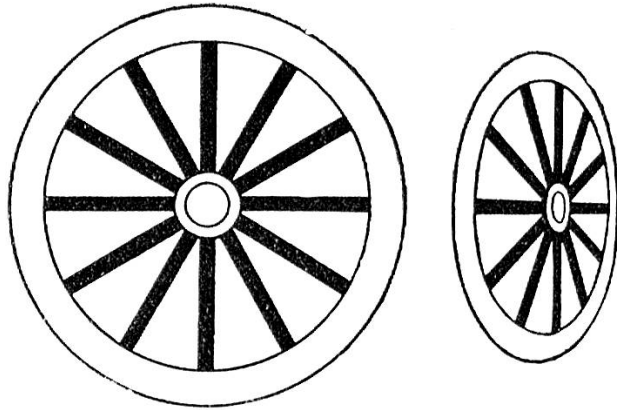


Fig. 7.

metrischen Bauwerkes (Bogen des Titus), Fig. 6 a und 6 b, sowie der zentralen Symmetrie, Fig. 7, hervorgeht.

Ein zweiter unerlässlicher Faktor beim Studium ästhetischer Formen ist das Prinzip der Repetition, des visuellen Rhythmus, und ist mathematisch durch die Gruppentheorie begründet. Um dieses

Prinzip zu illustrieren, wollen wir zuerst zwei Bewegungsgruppen der Translation und der Rotation betrachten. Die Dreiecke A, B, C, \dots, K , Fig. 8, nehmen alle Stellen ein, welche ihnen durch die Translationen einer Gruppe angewiesen werden. In der

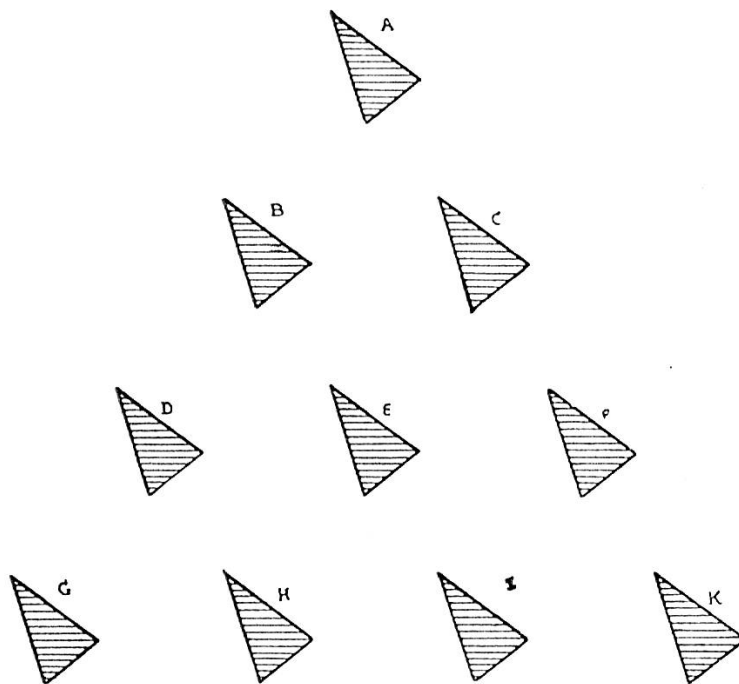


Fig. 8.

Tat können irgend zwei dieser Dreiecke durch eine einzige Translation und ihre inverse verwechselt werden. Irgend eine Folge von Translationen, z. B. $A D G C E$ kann durch eine einzige Translation $A E$ dieser Gruppe ersetzt werden. Dasselbe gilt für eine

Rotationsbewegung eines Elementes um ein bestimmtes Zentrum, Fig. 9, und, wie schon erwähnt, für eine perspektivische Transformation einer solchen, Fig. 7.

In der Dekorationsmalerei, besonders in der Ornamentik werden Kombinationen von Translationen, Rotationen und Symmetrieen sehr häufig zur Anwendung gebracht. Die Beziehungen zwischen solchen kombinierten regelmässigen Anordnungen sind in Fig. 10 gezeigt, in welcher drei sich unter je 60° in einem Punkte schneidenden Symmetrieachsen *I*, *II*, *III* angenommen wurden. Spiegelt man (axiale Symmetrie) das Formelement an allen drei Axen, so werden die neuen gleichen Formen A_1' , A_3 , A_3' erzeugt. Spiegelt man jede der-

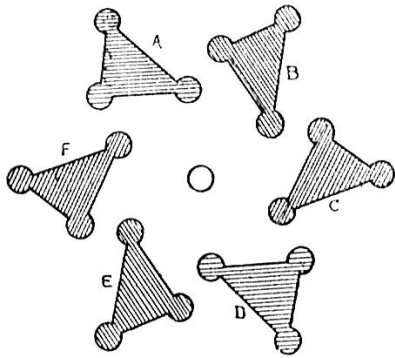


Fig. 9.

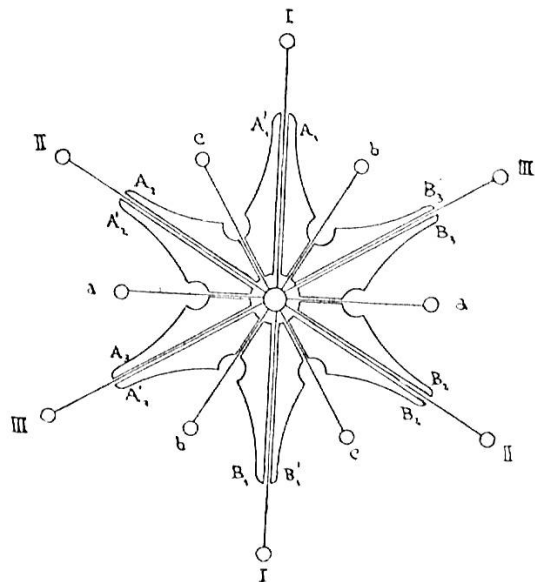


Fig. 10.

selben an denselben Axen, so entsteht die komplette Fig. 10, wobei jedoch noch drei andere Symmetrie — oder Spiegelungsachsen *a*, *b*, *c* entstehen. Zwei Spiegelungen von A_1 , an *I* und *II* nacheinander ausgeführt, erzeugen A_3 und sind gleichbedeutend mit einer Rotation von 120° von A_1 , um das Zentrum *O*. In der Reihe aufeinanderfolgender Spiegelungen $(A_1 A_1')$, $(A_1' A_3)$, $(A_3 B_2')$, $(B_2' B_3)$, $(B_3 B_3')$ sind A_3' und B_3' in radialer Symmetrie. Daraus geht hervor, dass diese Figur gewissermassen die Prinzipien der Strahlen- und Bewegungsgeometrie vereinigt und als charakteristischer Fall einer grossen Klasse ornamentaler Formen betrachtet werden kann, bei welchen irgend eine Anzahl regulär verteilter Axen als Grundlage dient.

Wie in der Ebene, so werden auch regelmässige Wiederholungen von Punkten, Geraden und Flächen im Raume von Gruppen- und

Symmetrieeigenschaften beherrscht, so z. B. die regulären Polyeder und die übrigen Kristallformen, wie bei den Naturformen erwähnt wurde. Als erstklassiges Beispiel dieser Art soll hier das Ikosaeder angeführt werden.¹⁾

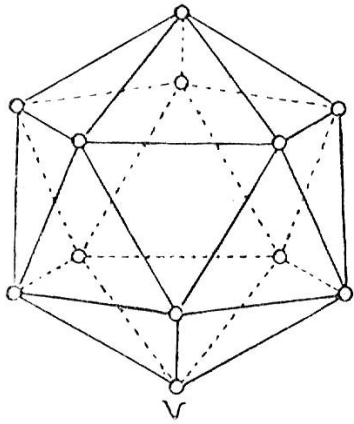


Fig. 11.

Das Ikosaeder, Fig. 11, wird von 20 regelmässigen Dreiecken, 30 Kanten und 12 Ecken begrenzt. Jedem Dreieck, jeder Kante und jeder Ecke entspricht ein um 60° gedrehtes gegenüberliegendes Dreieck, eine gegenüberliegende Kante und eine gegenüberliegende Ecke, so dass der Körper 10 Flächenmittellaxen, 10 Kantenmittellaxen und 6 Hauptaxen hat. Für jede

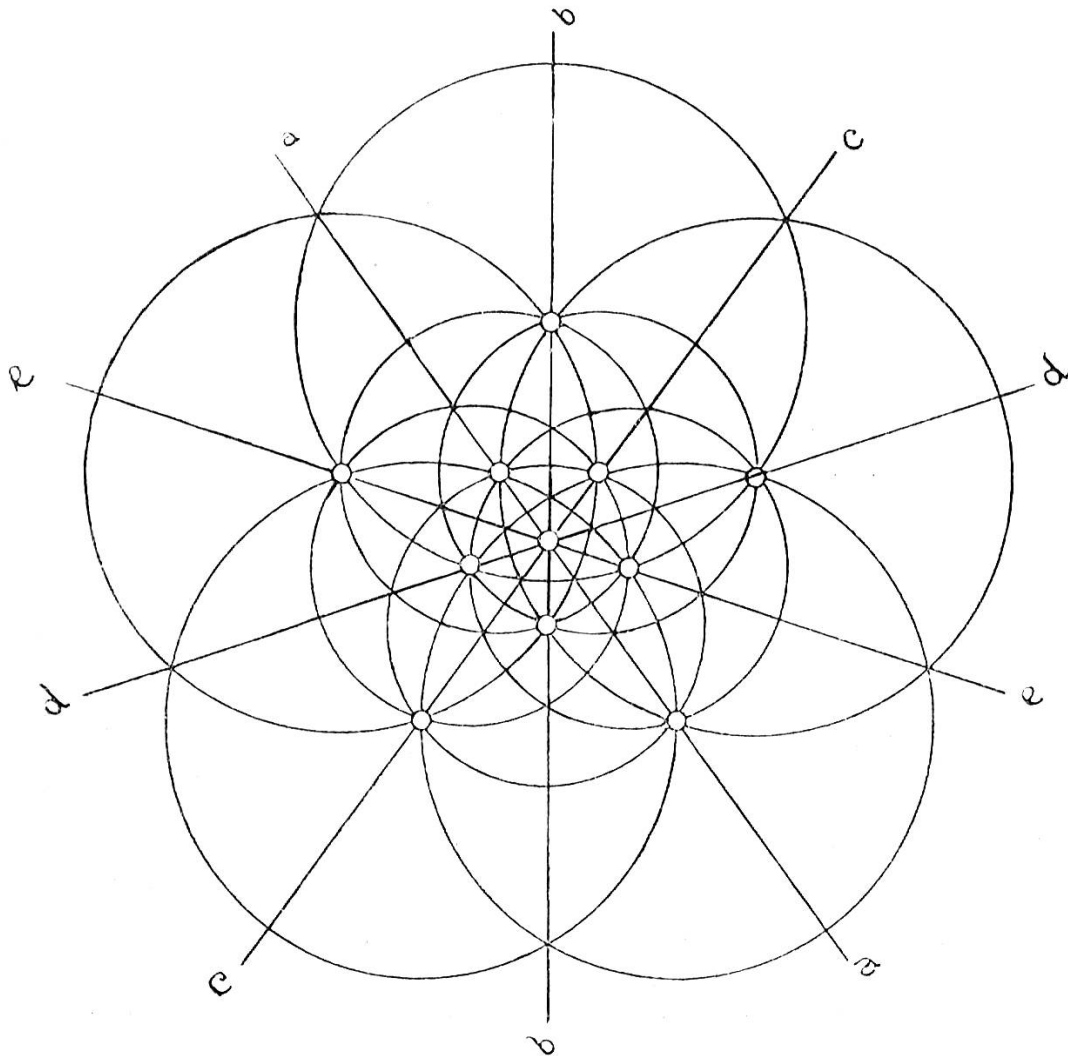


Fig. 12.

Flächenaxe gibt es drei verschiedene Rotationen, durch welche der Körper mit sich selbst zur Deckung gelangt. Jede Hauptaxe lässt

¹⁾ F. Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Leipzig, 1885.

fünf und jede Kantenaxe zwei Rotationen mit derselben Eigenschaft zu. Jede durch zwei gegenüberliegende Kanten gehende Ebene ist eine Symmetrieebene und es gibt 15 dieser Art. Macht man eine stereographische Projektion des Ikosaeders in Bezug auf eine umgeschriebene Kugel und eine Ecke als Zentrum, Fig. 12, so gehen daraus die Gruppeneigenschaften dieses ausserordentlich schönen und interessanten Körpers in leichtverständlicher Weise hervor. Die 15 Symmetrieebenen schneiden die umgeschriebene Kugel in 15 Kreisen, welche in Fig. 12 alle dargestellt sind. Fünf derselben, diejenigen welche durch V gehen, werden als Geraden projiciert. Eine Spiegelung an jeder dieser Axen und eine Rotation von 72° um V transformieren die ganze Figur jedesmal in sich selbst.

Es wurde bereits festgestellt, dass perspektivische Transformationen den Eindruck axialer und zentraler Symmetrie nicht zerstören. Dasselbe ist der Fall in Bezug auf die gruppenmässige Anordnung elementarer Formen in einer Konfiguration und ihrer Perspektive, wie bereits aus Fig. 7 und hier aus Fig. 13 hervorgeht.

Die Transformation durch reciproke Radien¹⁾ ist eine weitere geometrische Verwandtschaft, welche den Charakter einer gesetzmässigen Wiederholung unverändert lässt.

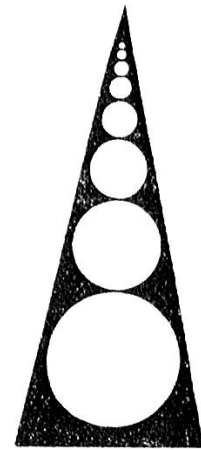


Fig. 13.

Diese Transformation ist eine unerschöpfliche Quelle für das Entwerfen von Ornamenten; es ist jedoch unwahrscheinlich, dass sie jemals in bewusster Weise zu

¹⁾ Die Aufstellung des geometrischen Prinzips der reciproken Radien (Inversion) ist verhältnismässig neuern Datums und ist in manchem Gebiet der neuern mathematischen Forschung von grösster Bedeutung. Von gleicher Wichtigkeit ist es für die mathematische Physik, wie durch Lord Kelvin in seinem *Treatise of Natural Philosophy* und eine Anzahl anderer Physiker gezeigt wurde.

Um die Inversion im Raume zu definieren, wird eine Einheitskugel in fixer Stellung angenommen. Ein Punkt A und ein anderer A' sind dann in der Inversion entsprechend, wenn $OA \cdot OA' = 1$ ist. Sind (x, y, z) und (x', y', z') die Carterischen Koordinaten von A und A' , so wird die Transformation der Inversion analytisch ausgedrückt durch

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bei der Transformation in der Ebene fallen einfach die z aus.

diesem Zwecke verwendet wurde. Die Wirkung einer solchen Umformung auf Kreisreihen, Fig. 13, kommt in Fig. 14 zur Darstellung.

Eine der charakteristischen Eigenschaften der Inversion besteht darin, dass sie Kreise in andere Kreise und unendlich kleine Figuren in ähnliche unendlich kleine Figuren verwandelt, kurz die Schnittwinkerverhältnisse von Figuren unverändert lässt. Eine solche Transformation ist auch die stereographische Projektion, wie sie auf das Ikosaeder angewandt wurde. Alle solche Transformationen gehören zur Klasse der zirkularen Transformationen und zeichnen sich dadurch aus, dass sie Kreise in Kreise und Kugeln in Kugeln überführen, oder dass sie das „Absolute“ im Raume invariant lassen.

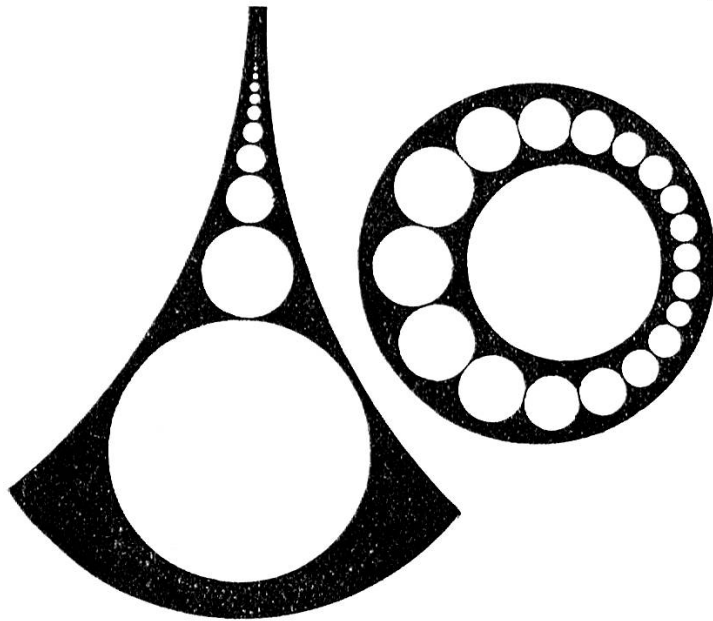


Fig. 14.

Daraus lässt sich der Schluss ziehen, dass das Absolute im Raume, obschon es imaginär ist und über unser Vorstellungsvermögen hinausgeht, ein wichtiger Faktor bei der Evolution ästhetischer Formen ist. Diese Tatsache geht auch aus der merkwürdigen Erscheinung hervor, dass diejenigen Linien und Flächen, welche durch das Absolute gehen,

durch die Gefälligkeit ihrer Formen und durch ihre enge Beziehung mit Kreissystemen ausgezeichnet sind. Fig. 15 stellt eine Kurve dar, welche diese Eigenschaft besitzt. Sie erscheint als Umhüllung aller Kreise, welche durch einen festen Punkt gehen und deren Mittelpunkte auf einem festen Kreise liegen und ist eine bizirculare Kurve 4. Ordnung mit endlichem Doppelpunkt. Man vergleiche damit z. B. auch Fig. 4, ein solches System von Kreisen, wie es in der Natur vorkommt. Es ist jedoch nicht notwendig, dass alle gefälligen Formen mathematisch die imaginären Kreispunkte der Ebene, oder den imaginären Kugelkreis des Raumes enthalten müssen. Irgend eine Form, welche durch ein einheitliches geometrisches Gesetz bestimmt ist, kann als Element einer gefälligen An-

ordnung oder eines Ornamentes dienen. Es gibt Annäherungen zu dieser Regel, welche das Auge täuschen mögen und welche aus diesem Grunde gerechtfertigt sind. Aber gar oft werden grobe Annäherungen substituiert, nur um die Unkenntnis wahrer Methoden und Tatsachen zu verdecken. Es gibt Maler und Dekorateure, welche Ellipsen durch plumpe Ovale ersetzen, wo Ellipsen am richtigen Platze wären; Durchdringungskurven zylindrischer und konischer Flächen durch unmögliche Produkte einer fehlerhaften

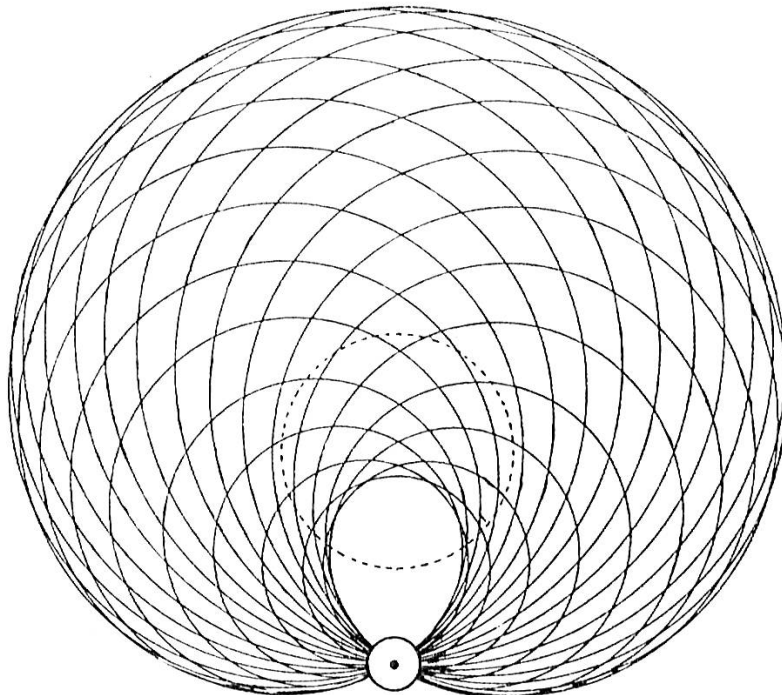


Fig. 15.

Anschauung; und richtige Gesetze der Perspektive durch seichte, der Natur falsch abgeuckte Regeln.

Kürzlich wurden auch geometrische Methoden entwickelt,¹⁾ welche ermöglichen, die abstrakten Gesetze einer gewissen Klasse von Ornamenten aufzustellen, die zum Gebiete der Dekorationskunst gehören. Es würde jedoch zu weit führen, darauf weiter einzugehen und es soll nur erwähnt werden, dass der Zweck dieser Untersuchungen darin besteht, geschlängelte kontinuierliche Linien zu konstruieren, welche keine Tangente zulassen und eine gegebene Region vollständig dicht ausfüllen. Fig. 16 stellt analysierte Teile

¹⁾ E. H. Moore, *On Certain Crinkly Curves*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. I, Nr. I.

solcher Linienzüge dar und lässt ihren Zusammenhang mit dekorativen Entwürfen deutlich genug erkennen.

Aus dem Ganzen geht hervor, dass das was wir Grundlagen der Geometrie nennen implicite durch die Naturanschauung bedingt und diktiert ist. Die Eigenschaften, welche wir in vollkommenen Naturformen entdecken, sind gewissermassen auch mit den Kunstformen verbunden. Folglich müssen letztere im allgemeinen mit den fundamentalen Gesetzen der Natur und ihren mathematischen

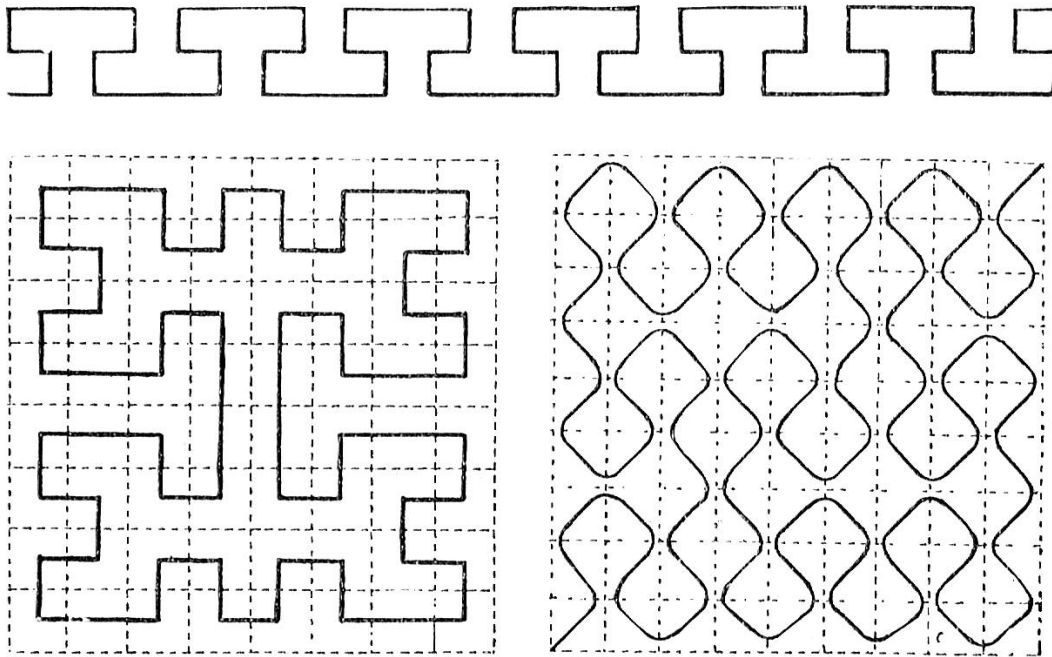


Fig. 16.

Bildern übereinstimmen. Ästhetische Formen müssen so gezeichnet werden, dass sie durch das Auge das Gefühl des Gleichgewichts und der harmonischen Anordnung erwecken. Ähnlich verhält es sich mit den übrigen Faktoren der bildenden Künste, wie Farbe, Inhalt u. s. w., sowie mit den Künsten überhaupt.

Sollen dieselben nicht der Sterilität anheimfallen, so müssen dieselben ihre ursprüngliche Kraft von Zeit zu Zeit aus dem Schosse der Natur holen und die natürlichen Gesetzmässigkeiten ohne Pedanterie und innerhalb vernünftiger Grenzen zur Anwendung bringen.

