Zum Raumproblem

ZUM RAUMPROBLEM.

VON DR. K. MERZ, PROFESSOR IN CHUR.

Die Geometrie gilt als die sicherste Wissenschaft, in allen ihren Ergebnissen als unanfechtbar und keinerlei Änderungen infolge hypothetischer Annahmen unterworfen, wie es in ihrer benachbarten Wissenschaft, der Physik, der Fall ist. Die Geometrie bildet damit ein von jeher dem philosophischen Denken als wunderbar erschienenes Gebiet, das zwischen der aus rein logischen Beziehungen sich aufbauenden reinen Mathematik einerseits und der in die Erfahrung eingreifenden Physik anderseits, als vermittelnd schwebt und wirkt und den Zusammenhang zwischen geistigem und materiellem Geschehen rein typisch darstellt. Die Geometrie beweist daher für die Philosophie vor allem bei *Kant* und schon bei *Plato* die Möglichkeit einer erfolgreichen idealistischen Erfassung der Welt. In ihr zeigt sich die Tätigkeit des ordnenden und verbindenden Geistes in seiner Anwendung auf meßbare Körper, und *Kant* erklärt die Raumauffassung als eine Form unseres Geistes, in welcher wir alle Vorgänge überhaupt nur anordnen können, wodurch die Möglichkeit der synthetischen Urteile a priori erklärlich wird, daß wir nämlich aus einfachen Grundtatsachen oder Axiomen durch ihre logische Verknüpfung zu Ergebnissen kommen müssen, welche nachher sich in der Erfahrung bestätigen.

In vorbildlicher und tiefgründiger Weise wurden die Ergebnisse der Geometrie zuerst von *Euklid* (300 v. Chr. in Alexandrien) zusammengefaßt, und diese weiter ausgebaute Euklidische Geometrie diente einzig und dient noch als Grundlage für mathematische Untersuchungen, physikalische Messungen und astronomische Beobachtungen und bewährte sich auf allen diesen Gebieten. Doch seit dem 18. Jahrhundert wurde die Möglichkeit von andern nichteuklidischen Geometrien aus abstrakten, rein logischen Gründen nachgewiesen, und in neuester Zeit wurden diese Geometrien, denen man zuerst nur rein theoretische Bedeutung beigemessen hatte, durch die Relativitätstheorie von *Einstein* sogar als notwendig für die Physik befunden, vor allem für die Gravitationstheorie und damit für eine vollkommene Erklärung der Bewegung der Gestirne und die Auffassung des Weltalls überhaupt.

Vorerst möchte ich in einfacher Weise auf die Notwendigkeit hinleiten, wie außer der Euklidischen Geometrie noch andere Arten der Geometrie zugegeben werden müssen. Ich versuche, das ganze mehr oder weniger künstliche System der Axiome der Geometrie zu ersetzen durch die Übertragbarkeit der Strecke, allerdings durch eine Abstraktion, hergeleitet aus der Physik vom Messen mit einem Maßstab. Dabei wird von dem Maßstab, der möglichst sorgfältig hergestellt ist, angenommen, daß er in dem für die Untersuchung erforderlichen Raumgebiet nach irgend welchen Stellen gebracht werden kann, um Messungen auszuführen, und daß er dabei, unter Vermeidung von unerwünschten Störungen, keinen Änderungen unterworfen sei. A priori kann das natürlich nicht angenommen werden, denn der wirkliche Raum ist mit Kräften aller Art ausgestattet und es ist zum vornherein gar nicht anzunehmen, daß der Maßstab bei der Fortbewegung keine Änderungen erfährt. Aber z. B. nur auf dem Zeichnungsblatt kann der Annahme der Übertragbarkeit der Strecke und des Abstandes der beiden Zirkelspitzen bei Messungen innerhalb der Genauigkeitsgrenze des bloßen Auges die Berechtigung nicht abgesprochen werden. Die Geometrie fängt also sehr bescheiden an, sie will noch nicht in alle unendlichen Fernen ihre Gebilde ausdehnen, und ihre erste Forderung sieht einer Hypothese sehr ähnlich, aber auf alle Fälle ist es eine sehr einfache und zudem eine durchaus notwendige, denn sonst läßt sich mit geometrischen Konstruktionen und ihren Anwendungen gar nicht beginnen. Es war vielleicht eine Täuschung; die Philosophie stellte sich die Geometrie zu ideal vor, als schwebe sie über aller Erfahrung. Sie muß gleichsam ihre Fußspitze hinab auf Erfahrungsgrund setzen, um ihren Flug anheben zu können. Aber sicherlich macht es gar keine Schwierigkeiten, sich den Vorgang der Übertragbarkeit der Strecke zu denken und auszuführen, nämlich eine gezeichnete Strecke zu messen und sie an einer andern Stelle von irgend einem Punkt einer Geraden aus auf dieser in gleicher Länge abzutragen.

Was ist nun mit dieser Annahme der Übertragbarkeit der Strecke erreicht? Zu irgend einer von Strecken begrenzten Figur, die an einer Stelle gezeichnet ist, also vor allem zu einem Dreieck, kann an einer andern Stelle der Zeichnungsfläche mit Hilfe von Lineal und Zirkel eine dazu kongruente Figur gezeichnet werden, d. h. wenn man diese herausschneiden würde, könnte sie mit der ersten zur Deckung ihrer Umrisse gebracht werden, und auch die Flächenstücke innerhalb der Begrenzung würden überall aneinander liegen oder ideal gedacht ineinander, daß also die eine Figur genau die Lage der andern in der Fläche drin einnehmen kann. Die Grundbegriffe Strecke und Kreisbogen ermöglichen es also, den Begriff der Kongruenz zu bestimmen und damit können eine Menge von Konstruktionen ausgeführt werden, und es können Lehrsätze aufgestellt werden, von denen im übrigen aus rein logischen Gründen einzusehen ist, daß sie gelten. Es können also damit synthetische Urteile a priori gefällt werden. Der Bau der Geometrie wird synthetisch ausgeführt durch Ersinnen von Konstruktionen. Erst bei nachträglicher Anwendung und Begründung durch Beweise kommt die analytische Methode der Deduktion zur Anwendung, die also ein schon bestehendes System von Lehrsätzen voraussetzt. Die Grundbegriffe Punkt und Strecke sind inhaltsleer und erst ihre Beziehungen und Verknüpfungen führen zu gültigen Ergebnissen, sofern jeder Widerspruch vermieden wird.

Doch zeigt sich eine nicht zu besiegende Schwierigkeit, die schon im Altertum bemerkt wurde: es ist nämlich bloß aus den Kongruenzaxiomen heraus unmöglich zu beweisen, daß zwei parallele Gerade überall den gleichen Abstand haben, sich also im Endlichen nicht schneiden können. Man zeichnet die Parallelen durch Verschiebung eines Dreiecks längs eines Lineals, was durch eine Konstruktion kongruenter Dreiecke begrifflich ersetzt werden kann. Aber daraus die Gleichheit des Abstandes an allen Stellen zwischen den Parallelen zu beweisen, trotzte allen Bemühungen, und man war gezwungen, ganz unvermittelt ein neues Axiom anzunehmen, das Parallelenaxiom. Damit war der logischen Untersuchung ein Rätsel gestellt: Warum führt die Übertragbarkeit der Strecke, die doch für einen großen Teil der Konstruktionen genügt, nicht auch zu der Eigenschaft paralleler Geraden? Der Grund liegt darin, daß die Kongruenzbegriffe allgemeinerer Natur sind, als beim Zeichnen auf einer ebenen Fläche zuerst eigentlich vorgesehen war. Sie gelten nicht nur für die Ebene, sondern auch z. B. für eine Kugelfläche. Wenn also statt eines ebenen Reißbrettes eine Kugelfläche zum Zeichnen dient, so können mit dem Zirkel auf dieser die nämlichen Konstruktionen wie in der Ebene ausgeführt werden, soweit nur Kongruenz angewendet wird; man muß aber statt des gewöhnlichen geraden Lineals ein der Krümmung der betreffenden Kugel angepaßtes verwenden, mit welchem Hauptkreise der Kugel, solche geringster Krümmung statt der Geraden gezeichnet werden können. Ebenso wird das Dreieck mit geraden Seiten ersetzt durch ein sphärisches Dreieck, das in der Kugelfläche ebenfalls frei verschiebbar ist, wie jenes in der Ebene. Statt der Übertragbarkeit der Strecke besteht jetzt also eine solche von Bogenstücken bestimmter geringster Krümmung innerhalb der Kugelfläche.

Somit hat sich gezeigt, daß die logischen Konsequenzen weiter führten, als eigentlich zuerst beabsichtigt war. Die Übertragbarkeit der Strecke wurde festgesetzt in der Absicht, in einer Ebene zu zeichnen. Dabei sind aber eigentlich wesentlich nur die beiden Endpunkte der Strecke, diese werden mit dem Zirkel erfaßt. Logisch faßbar war nur der Grundsatz, eine Strecke ist durch zwei Punkte bestimmt und damit auch die Gerade. Über das innerhalb liegende Stück kann rein begrifflich nichts ausgesagt werden, nur Anschauung und Erfahrung führten dazu, es, wie man sagt, gerade zu zeichnen. Durch zwei Punkte ist aber auch ein Bogenstück eines Hauptkreises einer Kugelfläche bestimmt. Die Sätze über Strecken und ihre Figuren gelten damit auch für diese Bogenstücke, soweit nur Abtragungen durch den Zirkel und Verbindung durch Bogen größter Kreise verwendet werden und keine Folgerungen des Parallelenaxioms in Betracht kommen. Diese Geometrie auf einer Kugefläche ist die eine Art der nichteuklidischen Geometrie; die andere, auch pseudosphärische genannt, besteht auf einer Rotationsfläche, die längs ihres Meridians hohl verläuft, die von negativer Krümmung ist im Gegensatz zur positiv gekrümmten Kugel. Historisch wurde die pseudosphärische Geometrie zuerst entdeckt auf trigonometrischem Wege durch *Lobatschefsky*, Kasan, von 1829 an, und durch den Ungar *Bolyai* 1832. Vorerst wurde sie nur als rechnerische Möglichkeit auf einer Kugel von imaginärem Radius betrachtet, erst nachher auf einer Fläche konstanter negativer Krümmung als wirklich existierend erkannt. Die sphärische Geometrie ist ein besonderer Fall der Geometrie, genannt nach *Rieman*, Göttingen, 1854, der den allgemeinen Grund für die Geometrie in gekrümmten Räumen legte, ausgehend von der Flächentheorie von *Gauss*, Göttingen, 1827, welcher als erster die Möglichkeit der nichteuklidischen Geometrie erkannte, ohne darüber etwas zu veröffentlichen. Damit hatte die reine Geometrie schon längst die Vorbereitungen getroffen, welche der Relativitätstheorie ihre Entwicklung ermöglichten, besonders noch in Arbeiten von *Christoffel* 1869 und von *Ricci* und *Levi-Civita* 1901.

Nach den begonnenen Ausführungen liegen also die Kongruenz-Axiome nicht nur der Euklidischen Geometrie, sondern gemeinsam auch den genannten beiden nichteuklidischen Geometrien zugrunde. Die ursprünglich angenommene Übertragbarkeit der Strecke bedeutet eigentlich ohne weitere Einschränkung die freie Verschiebbarkeit von durch zwei Punkte begrenzten Kurvenstücken kleinster Krümmung oder geringster Länge, einer geodätischen Linie in einer Fläche konstanter Krümmung und damit der von solchen Kurven gebildeter Figuren. Diese Verschiebbarkeit ist nicht nur in der Ebene möglich, wie zuerst auf Grund der Anschauung angenommen wurde, sondern auch z. B. auf einer

Kugelfläche, in welcher drin jede angenommene Figur ohne weitere Verbiegung oder Verzerrung frei beweglich ist wegen der überall gleichmäßigen Krümmung der Fläche. Damit ist erklärlich, warum aus der Annahme dieser Beweglichkeit noch kein Schluß auf die gegenseitige Lage paralleler Geraden möglich ist. Die Eigenschaften paralleler Geraden sind spezieller Art, sie gelten nur in der Ebene, nicht auch auf der Kugelfläche, wo parallele Hauptkreise gar nicht möglich sind, während in der pseudosphärischen Geometrie zwei sogenannte Gerade bestehen, die durch einen Punkt gehen und eine gegebene solche erst im Unendlichen schneiden. In der Ebene ist nur eine Gerade möglich, die durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade erst im Unendlichen schneidet. In dieser Fassung wird das Parallelenaxiom meist angegeben, ohne den eigentlichen Grund dieser Annahme erkennen zu lassen. Dieses Axiom oder ein anderes, es ersetzendes und gleichwertiges, muß zu den Kongruenz-Axiomen treten, um die Euklidische Geometrie von den andern auszuscheiden.

Ein Weg, welcher einen Einblick in die Tragweite des Parallelenaxioms gewährt, sei wie folgt angedeutet [1]. Mit den Kongruenz-Axiomen gelten auch Symmetrieeigenschaften der Figuren in diesen Flächen, in erster Linie die zentrische Symmetrie. Setzt man nun fest, daß zwei zentrisch symmetrische Geraden, gerade im allgemeinen Sinn für die drei Flächenarten, außer an zwei symmetrisch gelegenen Stellen noch dazu an einer weiteren dritten Stelle gleiche Abstände besitzen, so läßt sich daraus beweisen, daß die beiden Geraden dann überall gleichen Abstand haben, also einander im Endlichen nicht schneiden. Während, wenn man nur an zwei Stellen gleiche Abstände angenommen werden, die Flächen und damit die Kurven noch eine Krümmung besitzen können, werden durch den gleichen Abstand an der dritten Stelle die Kurven gleichsam gestreckt, so daß auch die Krümmung der Fläche, in welcher sie liegen, verschwinden muß und eine Ebene erzielt wird. Erst durch diese weitere Annahme wird die Verwendung von Parallelen im Sinne Euklids

[1] Die Grundlagen der Euklidischen Geometrie im Unterricht. Schweizerische Pädagogische Zeitschrift, Heft 4 und 5, 1925.

auch logisch gerechtfertigt. Erst dadurch wird die Eigenschaft paralleler Geraden, die wie im Zeichnen üblich durch Verschiebung eines Dreiecks längs eines Lineals entstehen, begründbar, daß sie überall den gleichen Abstand besitzen. Dabei ist aber die Voraussetzung stillschweigend gemacht worden, daß es sich nur um Flächen konstanter Krümmung handle, in welchen die Abtragung geodätischer Kurvenstücke erfolge. Denn wenn die Fläche ungleichmäßige Krümmung zeigt, nicht homogen ist, so ist die freie Beweglichkeit der Figuren ausgeschlossen und die Kongruenz gilt nur angenähert in kleinen Gebieten, in der nächsten Umgebung eines Punktes. Das Parallelenaxiom verliert seinen Sinn.

Praktisch gründet sich allerdings die Geometrie in allen Konstruktionen der Schule und des Technikers einzig auf die Strecke, ohne besondere Rücksicht auf die Erfüllbarkeit des Parallelenaxioms, indem durch Ziehen von Linien längs einer Kante in den beiden entgegengesetzten Lagen des Lineals und durch Visieren geprüft wird, ob die Kante als Gerade betrachtet werden kann. Darauf wird auch die Zeichnungsfläche durch Auflegen dieser Kante in allen Richtungen auf ihre Ebenheit geprüft. Letzten Endes wird also auf den Lichtstrahl abgestellt, der im Gebiet der Zeichnung oder weiterer Vermessungen als gerade angenommen wird. Alle Anwendungen der Geometrie sind also physikalische Experimente und daher hypothetischer Art, und sie gelten nur angenähert und sind mit Fehlern behaftet, die man unter der Beobachtungsmöglichkeit zu halten sucht. Das nämliche gilt auch vom Bau aller Präzisionsinstrumente, bei welchem keine Rücksicht auf das Parallelenaxiom genommen werden kann.

Nun kann aber nicht ausgeschlossen werden, daß der Lichtstrahl eine gewisse Krümmung hat und ebenso die durch ihn geprüfte Kante und damit auch die Fläche, daß also die Zeichnung auf einem Teil einer Kugelfläche ausgeführt wird, allerdings von sehr geringer Krümmung, wie etwa der Flüssigkeitsspiegel, der sich der Schwerkraft der Erde anpaßt. Dann ist die Zeichnung in der sphärischen nichteuklidischen Geometrie zu denken, welche sich aber wegen der geringen Krümmung der Euklidischen sehr nähert unter der Grenze der Beobachtungsfehler. Dann wären zwei sogenannte parallele Gerade zwei Hauptkreise der Fläche, die sich nach beiden Seiten nähern und erst in sehr großer Entfernung in gegenüberliegenden Punkten eines Kugeldurchmessers einander schneiden, während die Euklidische Geometrie die Forderung setzt, daß die parallelen Geraden nur einen Schnittpunkt aber erst in unendlicher Ferne haben, daß man also auf einer Geraden nach der einen oder andern Seite ins Unendliche gehend schließlich zum nämlichen unendlich fernen Punkte gelange, was eigentlich der Anschauung widerspricht, die durch eine logisch konsequente Folgerung ersetzt werden muß, welche die einfachsten Konstruktionen ermöglicht. In der sphärischen Geometrie hat die ihr angehörende Gerade, die eigentlich ein größter Kreis der Kugelfläche ist, gar keinen unendlich fernen Punkt, denn dieser Kreis ist in sich geschlossen und verläuft vollständig im Endlichen auf der Kugel. Man kommt also praktisch zu dem Schlusse, daß die Euklidische Geometrie jeweilen in einem begrenzten Gebiet mit genügender Genauigkeit gilt, daß es aber nicht gestattet ist, diese Gültigkeit beliebig weit auszudehnen und keineswegs bis ins U n e n d l i c h e, wie die Theorie der Euklidischen Geometrie es festsetzt in ihrer uneingeschränkten Konsequenz. Aber dabei darf immerhin angenommen werden, daß an irgend welcher andern Stelle des Raumes doch wiederum in einem beschränkten Gebiet die Euklidische Geometrie gelte, aber jene dort geltende ist nicht in direktem Zusammenhang mit der hier geltenden. Diese Eigentümlichkeit des Weltraumes wird in der Theorie so gefaßt, daß an jeder Stelle im unendlich Kleinen die einfache Euklidische Geometrie Geltung hat, daß aber alle diese einzelnen Ortsgeometrien untereinander durch eine allgemeinere höhere Geometrie miteinander verbunden sind. Doch kann man sich in der praktisch messenden Wissenschaft diese einzelnen Ortsgebiete immerhin noch genügend weit ausgedehnt denken, z. B. das ganze Sonnensystem umfassend und die übergeordnete Geometrie käme erst in Fixsternweiten zur Wirkung. Anderseits aber kann auch ein einzelnes Atom für die rasende Bewegung seiner Elektronen einen Raumwirbel verlangen, der aber nach außen nicht geometrisch wirkt.

Damit ist angedeutet, wieso überhaupt ein Raumproblem besteht. Denn als der Euklidischen Geometrie noch alleinige Gültigkeit beigemessen wurde, wie zur Zeit Kants, als die *Newton*sche Mechanik durch die Berechnung des Ganges der Gestirne diese Geometrie als absolut gültig erscheinen ließ, konnte kein Zweifel über die vollständige und uneingeschränkte Auffassung des Raumes durch den menschlichen Geist aufkommen. Die Euklidische Geometrie wurde als die Form betrachtet, in welcher alle Beurteilung der Außenwelt aufgefaßt werden mußte, um zu Naturgesetzen zu gelangen. Aber das Häklein, das dem Parallelenaxiom angeheftet war, ließ die Mathematiker keine Ruhe finden, bis sie aus Rücksicht auf rein logische Schwierigkeiten, zu denen doch unter allen Beobachtungen von Physik und Astronomie nicht der leiseste Anlaß geboten wurde, zu den nichteuklidsichen Geometrien gelangten, die vorerst nur als in der mathematischen Theorie existierend und auch so anfänglich nur mit Widerstreben anerkannt wurden. Erst in neuester Zeit hat *Einstein* in seiner Relativitätstheorie Anlaß genommen, zur Lösung des Gravitationsproblems, zur Erklärung der gegenseitigen Anziehung der Gestirne, an Stelle der Euklidischen Geometrie eine ganz allgemeine nichteuklidische zu setzen, die *Riemann*sche Geometrie. Dadurch wurde das ganze Raumproblem aufgerollt, das bei Mathematikern, Physikern und besonders auch bei den Philosophen das größte Interesse wachgerufen hat. Eine eigentliche Streitfrage ist daraus entstanden, ob in dem wirklichen Raume die Euklidische oder eine nichteuklidische Geometrie Geltung habe. Besonders von Philosophen werden vom erkenntnistheoretischen Standpunkte aus gegen die Anwendbarkeit der nichteuklidischen Geometrie Einwände erhoben und außerdem auch von praktisch experimentierenden Physikern, nach denen alle Instrumente, die überhaupt Messungen ermöglichen, auf Grund der Euklidischen Geometrie gebaut sind und darnach benutzt werden, da der dazu nötige Begriff des starren Körpers einzig aus Anwendung der Euklidischen Geometrie erklärt werden könne. Also auf der ganzen Linie von den theoretischen Überlegungen bis in die praktische Ausführung haben sich die Gegensätze erhoben und die Grundlagen der Physik befinden sich in geradezu chaotischem Zustande, der nur durch gründliche Revision aller logischen und erfahrungsmäßigen Grundsätze zu überwinden sei. Trotz all der außerordentlichen und Staunen erregenden Erfolge der exakten Wissenschaften in ihren vielfachen Anwendungen befinde man sich in einer peinlichen Ungewißheit über die grundsätzlichen Anfänge, aus denen sie sich entwickelt haben: sie entstammen fast mystischen Gebieten mit geradezu phantastischen Möglichkeiten. Selbst die Mathematik muß sich auf ihren Ursprung besinnen, welcher in einer strengen Axiomatik geregelt werden soll.

Noch ein weiterer Umstand ist zu berücksichtigen, nämlich die Möglichkeit, sich nichteuklidische Räume vorstellen zu können. In den vorigen Ausführungen wurde nur von Geometrien in einer Fläche gesprochen, wie sie verwirklicht werden können einerseits in einer Ebene und anderseits in einer gekrümmten Fläche z. B. auf einer Kugel, die aber selbst wieder im gewöhnlichen, dreidimensionalen Euklidischen Raum gedacht und beobachtet wird. Die nichteuklidischen Geometrien müssen nun aus einer zweidimensionalen Fläche in einen dreidimensionalen Raum übertragen werden, man soll sich nicht nur eine gekrümmte Fläche, sondern selbst einen gekrümmten Raum denken. Der Euklidische Raum, in welchem an irgend einer Stelle beliebige Ebenen angenommen werden können, die bis ins Unendliche sich ausdehnen in diesem Raume, und auch Gerade als Strahlen, die ohne Ende sind, wird als nicht gekrümmter Raum bezeichnet oder von der Krümmung Null. Von besonderer Bedeutung sind dabei seine unendlich fernen Elemente. Er dehnt sich nach allen Richtungen ins Unendliche aus und aus formal logischen Gründen muß dieses unendlich Ferne als eine Ebene betrachtet werden. Dies bloß aus der Anschauung abzuleiten, ist nicht möglich, erst aus gewissen Folgerungen aus Konstruktionen kann geschlossen werden, daß jede Gerade nur einen einzigen unendlich fernen Punkt, jede Ebene nur eine einzige unendlich ferne Gerade besitzt und daß alle diese unendlich fernen Elemente zusammen in der unendlich fernen Ebene liegen, die für sich einzig und absolut ist. Gerade in diesen unendlich fernen Elementen kommt die ganze Starrheit des Euklidischen Raumes zum Ausdruck, der also als Weltall im Unendlichen begrifflich durch eine Ebene abgegrenzt wird. Entsprechend wie so, von Gerade und Ebene ausgehend, der Euklidische Raum als wie diese Elemente unendlich ausgedehnt gedacht wird, muß der sphärisch gekrümmte Raum, ausgehend von der Kugelfläche mit ihren Hauptkreisen durch Analogie als nur endlich gedacht werden. Denn wie eine Kugelfläche im Gegensatz zu der Ebene ganz im Endlichen verläuft, so daß man von jedem Punkt der Kugefläche aus, wie z. B. auf der Erdoberfläche, durch einen Weg endlicher, begrenzter Länge nach irgend einem andern ihrer Punkte gelangen kann, ohne daß deswegen die Fläche in sich irgendwo eine Grenzlinie besitzt, so muß auch der dreidimensionale sphärische Raum zwar als nirgends begrenzt, aber dennoch als nur von endlicher Ausdehnung gedacht werden. Er kann sich also nicht ins Unendliche erstrecken, sein Kubikinhalt hat einen bestimmten endlichen Wert, der einzig von der Krümmung abhängig ist. In diesem Raum ist also kein Platz für eine Gerade ihrer ganzen Ausdehnung nach und ebenso wenig für eine Ebene. An deren Stelle treten Kugelflächen und auf diesen liegende größte Kreise von bestimmtem Radius, nämlich von der dadurch bedingten kleinsten Krümmung. Bei der ungeheuren Ausdehnung des Weltalls, welches von Lichtstrahlen erst in Jahrmillionen durcheilt werden kann, ist diese Krümmung verschwindend klein, so daß der Unterschied begrenzter Teile dieser Kugelflächen von einer Ebene nicht bemerkbar wird. Aber nichtsdestoweniger tritt die Raumkrümmung in die Berechnungen der Gravitationswirkungen ein, indem unter Annahme eines beliebig gekrümmten Raumes, nicht nur eines genau sphärischen, die Bedingungen in einheitlicher Form aufgestellt werden können, die mathematische Behandlung gewinnt dadurch eine größere Freiheit und Übersichtlichkeit und kann nachträglich sich auch dem Euklidischen Raum anpassen in erster Annäherung. Das Raumproblem könnte daher als eine bloße Sache der mathematischen Methode betrachtet werden, wenn nicht die Philosophie, wie etwa in der Kategorienlehre sich zu sehr auf den Euklidischen Raum festgelegt hätte. Denn schließlich denken wir uns unwillkürlich auch andere Raumarten in diesem drin, und ob diese Vorstellungsweise einfach Gewohnheit oder ob Denknotwendigkeit sei, ist eine erkenntnistheoretische Frage.

Daher ist das Raumproblem auf Grund der Erfahrung allein nicht lösbar. Es sind dazu Überlegungen über die Tragweite begrifflicher Verbindungen für die Erfahrungstatsachen nötig. Während früher die gesamte Geometrie in das Gebiet des Apriori versetzt wurde, wegen der Meinung, daß es nur eine einzige mögliche Geometrie gebe, daß sie etwas Absolutes darstelle, sieht man sich jetzt gezwungen, immer weitere Gebiete der Geometrie als Anwendungen von mathematischen Überlegungen in das Gebiet der Erfahrung zurückzugeben. Bis wie weit herab reicht denn noch das unantastbare Absolute? Schon die Grundelemente, Punkt, Gerade und Ebene, lassen sich ihrem eigentlichen Wesen nach durchaus nicht begrifflich festsetzen, eine wissenschaftliche Geometrie muß geradezu darauf verzichten, sie definieren zu wollen, sie müssen einfach als Dinge bezeichnet werden, welche gebräuchlich so genannt werden und es muß frei gelassen werden, sie sich mehr oder weniger genau vorzustellen, was ja auch tatsächlich der Fall ist. Das Wesentliche der Geometrie beginnt erst mit der Verknüpfung dieser Elemente untereinander und erst die daraus sich ergebenden Folgerungen gehören zum sichern Inhalt der reinen wissenschaftlichen Geometrie. Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, ist damit nur eine der Anschauung entnommene Beziehung, die allgemein so lautet: durch zwei Dinge der ersten Art ist stets nur ein Ding der zweiten Art bestimmt, durch P_1 und P_2 ist stets nur ein g bestimmt. Ob g nun eine Gerade ist, wie sie üblich bezeichnet wird oder ein Bogenstück der sphärischen Geometrie, bleibt vorerst noch dahingestellt. Nur solche Eigenschaften, die sich aus den Inzidenzbedingungen oder allgemein aus gegenseitigen Zuordnungen ergeben, führen zur eigentlichen abstrakten Geometrie. Um diese Verhältnisse klar zu legen, unterscheidet *Carnap* [2] drei Arten des Raumes: 1. den formalen Raum, 2. den Anschauungsraum, 3. den physischen Raum. Der formale Raum ist eine reine Beziehungslehre oder Ordnungslehre und stellt die Sätze auf, die sich aus der bloßen gegenseitigen Zuordnung von Dingen ergeben, wobei die Art dieser Dinge noch als unbestimmt gelassen wird. Aus der anschauungsmäßigen Tatsache, daß durch drei Punkte eine Ebene bestimmt ist, bleibt in der Ordnungslehre nur die Festsetzung: drei Dinge der Art *P* bestimmen ein Ding der Art *E*. Durch Anregung und Veranlassung der Anschauung gelangt man dadurch zu ganz allgemeinen Beziehungen zwischen Dingen verschiedener Art. Die unter dieser Voraussetzung gebildeten Sätze gelten dann nicht nur für Punkt, Gerade, Ebene, an denen sie am einfachsten veranschaulicht werden, sondern auch für irgend welche andere Dinge, die sich ihrer Art nach unterscheiden lassen wie Kreise und Kugeln, oder auch Farben angeordnet in Streifen usw. Der formale Raum ist also eine rein begriffliche Ordnungslehre, welche schließlich für sich besteht, auch unabhängig von anschaulichen Dingen. Er entspricht also der reinen Denkform, womit *Kant*, weitergehend auch den Anschauungsraum bezeichnete, und das Apriori muß daher von diesem zurück eine Stufe höher in den bloß formalen Raum gesetzt werden. Die besondern Arten der geometrischen Anschauung gelten also noch nicht a priori, sondern nur die Verknüpfung ihrer Elemente oder das Ordnungsgefüge als solches gilt a priori. Damit wird aber das Wesentliche von *Kant*s Lehre, nämlich das Bestehen einer Form des Denkens für die räumliche Auffassung im Gegensatz zu einem Inhalt, den sie zu fassen vermag, nicht geändert, indem seine Lehre schließlich doch viel allgemeinerer Natur ist, als seine allerdings nicht mehr zutreffenden Beispiele. Anderseits ist aber damit das eigentliche Raumproblem im engern Sinne, das den Zusammenhang des formalen mit dem physischen Raum betrifft, aus diesem Gebiet des formalen Raumes hinabgeschoben in den Anschauungsraum.

[2] Carnap, Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre. 1922.

Dabei ist aber die Anschauung nicht im Sinne einer erfahrungsmäßigen, sinnlichen Anschauung zu nehmen, sondern als Wesenserschauung, also als eine Erkenntnis von den nur unvollkommenen Erscheinungen an Körpern der Wirklichkeit, besonders in Zeichnungen, zugrunde gedachten idealen Gebilden, deren Erfassung aber durch vermehrte Erfahrungen nicht nach und nach vervollkommnet werden kann, sondern die an einem Vertreter der betreffenden Art von geometrischen Gebilden schon ganz gewonnen wird. In dieser Festsetzung steckt aber gerade die Hauptschwierigkeit, indem nicht abstrakte Begriffe aus den Erscheinungen gewonnen werden sollen, sie müssen vielmehr noch anschauungsmäßige Gebilde bleiben. Auch der ganze Raum als einziger, in welchem alle Erscheinungen auftreten, kann nicht ein Begriff sein, und er wurde daher von *Kant* als reine Anschauung bezeichnet. Irgend ein Beispiel zum Ordnungsgefüge des formalen Raumes muß in diesem Raume gedacht werden, und dasjenige allgemeinster Art ist der topologische Raum, in welchem die gegenseitige Lage von Punkten, Kurven und Flächen irgend welcher Art betrachtet wird. Durch Einsetzung von Punkten, Geraden und Ebenen im besonderen in den formalen Raum entsteht der projektive Raum, welcher die Eigenschaften des Euklidischen Raumes hat, aber auch Abbildungen der nichteuklidischen Geometrie darzustellen vermag. Diese lassen sich damit gleichsam in den Euklidischen Raum übersetzen, in welchem dann aber Verzerrungen in den Bildern der nichteuklidischen Gebilde eintreten, so daß an sich gleiche Strecken an verschiedenen Stellen als ungleiche erscheinen. Man muß daher statt der üblichen Messung durch Übertragung einer Strecke andere Meßmethoden einführen, um das scheinbar ungleiche doch in der Maßgeometrie als gleichwertig zu erhalten, wie z. B. in einer perspektivischen Zeichnung. Andere allgemeinere Anschauungsräume mit veränderlicher Krümmung müssen überhaupt ausgehend von Maßbestimmungen berechnet werden, wobei an Stelle der Strecke solche Kurvenstücke treten, die nach der betreffenden Meßmethode sich als kürzeste Verbindungskurven zweier gegebener Punkte ergeben.

Ebenso ist im wirklichen *physischen Raum* die Maßgeometrie als grundlegend anzunehmen. Theoretisch könnte die Meßmethode irgendwie angenommen werden; nur müßte sie ohne Widerspruch konsequent durchgeführt werden, denn es handelt sich dabei schließlich einzig um eindeutige Zuordnung von Zahlen zu Vorgängen an Dingen. Aber alle exakten Messungen sind tatsächlich nur ausführbar unter der Annahme eines *starren Körpers*[3] zur Herstellung der notwendigen Instrumente. Absolut starre Körper gibt es aber gar nicht; in erster Linie muß die Wärmewirkung berücksichtigt werden und ferner eine bestimmte Geometrie, nämlich praktisch die Euklidische, zur Prüfung der Instrumente, um ihre Fehler zu korrigieren. Das genaue Meßinstrument ist also ein Ziel, dem man sich unter Anwendung einer bestimmten Meßtheorie möglichst zu nähern sucht. Man könnte aber auch eine nichteuklidische Geometrie konstanter Krümmung, z. B. die sphärische dazu verwenden, da der starre Körper auch in dieser vorausgesetzt werden kann, wegen der freien Beweglichkeit und Kongruenz der Figuren. Der starre Körper entspricht nämlich der beim Beginn der Geometrie gesetzten Strecke, und es liegt gar nicht der Zirkelschluß vor, daß die Strecke durch diese selbst begrifflich geprüft werde, sondern erst aus Folgerungen durch Konstruktionen, und durch das sich als notwendig erweisende Parallelenaxiom wird die Strecke als von der Krümmung Null erkannt. Aber im physischen Raum liegt keine Denknotwendigkeit vor, die Krümmung Null anzunehmen, nur zwingt die Beobachtung, diese Krümmung als sehr klein zu setzen. Den physischen Raum soll man überhaupt nicht unnötigerweise begrifflich festlegen, man beginne mit der allgemeinsten Voraussetzung beliebiger Krümmungen und schaue dann beim Experiment zu, was vernachlässigt werden kann. Alle Wirklichkeit erweist sich doch immer als viel komplizierter als jedes begriffliche Bild, und welche Erfolge eine starre Methode auch zeitigte, so muß doch einer allgemeineren, beweglichen Berechtigung

---

[3] *Dingler*, Der starre Körper. Phys. Zeitsch. XXI, 1920, und: Über den Zirkel in der empirischen Begründung der Geometrie, Kant-Studien, XXX, 1925.

zugegeben werden, was um so eher möglich ist, als die frühere Annäherung ihre Bedeutung beibehält.

Mit dem Verlassen des starren Euklidischen Raumsystems und der Zulässigkeit irgendwelcher gekrümmter Räume entsteht nun aber die erneute Schwierigkeit der Auswahl unter den mathematisch möglichen Mannigfaltigkeiten. Hier greift nun ordnend ein *Weyl* 1923, «Die mathematische Analyse des Raumproblems», worin, bezugnehmend auf *Helmholz* 1868, «Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen», die Raumarten ausgeschieden werden, welche eine freie Beweglichkeit der Körper ermöglichen, und zwar sind es die, welche auf der P y t h a g o r ä i s c h e n G e o m e t r i e in unendlich kleinen Gebieten beruhen, während bei Verschiebungen des Ortes im Raum die Maßverhältnisse sich ändern. Damit ist das Raumproblem aus den drohenden chaotischen Zuständen durch die schärfste logische Analyse gerettet.

Schließlich ist aber noch einem weiteren Umstand Rücksicht zu tragen: der Raum kommt in Wirklichkeit nicht für sich allein unabhängig vor, sondern er bietet die in ihm verlaufenden Erscheinungen stets in der Zeit dar. In der Wirklichkeit sind Raum und Zeit untrennbar miteinander verbunden, und die Darstellung der Bewegungen führt zu einer vierdimensionalen Geometrie, indem zu den drei Dimensionen des Raumes noch als vierte die Zeit hinzukommt. Es sind also jedem einzelnen Punktereignis vier Zahlen oder Koordinaten zuzuordnen. Damit tritt an Stelle der geometrischen Anschauung die analytische Methode des Zahlenraumes, dessen Berechnungen ohne weiteres von vier Dimensionen auf beliebig viele ausgedehnt werden können, und man spricht vom n-dimensionalen Raum, bei dem die Möglichkeit der Anschauung fehlt, für den der dreidimensionale nur ein besonderer Fall ist. Die Formel des Pythagoräischen Lehrsatzes führt zu einer allgemeineren quadratischen Form, die also grundlegend bleibt, so daß keine Forderung für höhere Potenzen berechtigt ist.

Damit ordnet sich das Raumproblem mit den Problemen der Physik, in denen es eigentlich als Teil enthalten ist, der allgemeinen mathematischen Analysis unter. Wie die Raumgrößen zu deuten sind, hängt also von ihrem Zusammenhang und der Zeit ab und von der Übersichtlichkeit und Einheitlichkeit, mit welcher die physikalischen Gesetze sich darstellen lassen. Der Raum für sich, ohne irgendwelche Dinge oder Vorgänge, wird also belanglos, und er gewinnt nur an Bedeutung im Zusammenhang mit physikalischem Geschehen. Dieses wird aber auch nicht seinem Wesen nach erfaßt, denn die Mathematik bildet ihre Formeln rein aus begrifflichen Verbindungen und frägt sich vorerst, ganz abgesehen von aller Natur, welche Gesetze wohnen diesem Gebilde inne und welche Eigenschaften der mathematischen Formeln bleiben erhalten, auch wenn die in ihnen vorkommenden Zahlen geändert, wenn Transformationen vorgenommen werden. Solche Invarianten bilden das Bleibende im Wechsel des Geschehens, und in sie sucht man die Naturgesetze zu kleiden. Bei den geometrischen Bewegungen im Raum ist die Invariante die quadratische Form des *Pythagoras*.