Zeitschrift: Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubünden

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Graubünden

Band: 77 (1939-1940)

Anhang: Beilage zum Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens : Vielflache aus Scheitelzellen und Hohlzellen [Fortsetzung]

Autor: Merz, Karl

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beilage zum Jahresbericht
der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens

Vielflache aus Scheitelzellen und Hohlzellen

mit Abbildungen und Netzen

von

Karl Merz

Gedruckt mit Subvention der Stiftung **Dr. Joachim de Giacomi**
der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft

II. Teil
zu Band LXXVII, 1939/40

Chur 1940

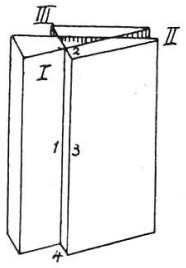
D. Viele Doppelstrecken in Bündeln

X. Prismen mit parallelen Doppelstrecken

Prismen F senkrecht über regelmäßiger Grundfläche werden durch Ebenen geschnitten, parallel zu den Seitenflächen, in gleichen Abständen von diesen. Sie schneiden aus dem Prisma Rechtecke heraus, die einander in den Doppelstrecken durchdringen. Die Grundflächen werden dabei gerändert, so daß Trapeze an deren Seiten entstehen und Rauten in den Ecken. Nach Auswahl der Scheitelteile, die nur in Doppelstrecken zusammenstoßen, sind die Körperteile über den Trapezen um ein Hohlprisma angeordnet und bilden zusammen das eine Teilvielflach F_1, während das andere F_2 seinen Mittelteil über dem inneren Vieleck hat und die äußeren Teile über den Rauten. Die einzelnen Körperteile der Teilvielflache berühren einander nur an den Doppelstrecken, und ihr Zusammenhang wird von den durchgehenden Schnittebenen gebildet.

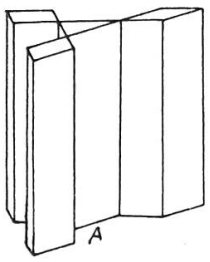
1. **Dreiseitiges Prisma,** zerlegt in ein **einseitiges 12Flach 176** und ein **zweiseitiges 17Flach 177.** Die drei Rechtecke I, II, III der Schnittebenen werden an einer der beiden Doppelstrecken geteilt und so in das Netz aufgenommen, um die Durchdringungen zu ermöglichen. Im Netz **178** des 12Flachs F_1 stoßen an die längeren Grundlinien der Trapeze die drei Seitenflächen und an die kürzeren Teile der Schnittfiguren. Die Aufklappung erfolgt um die punktierten Seiten nach oben, um die ausgezogenen inneren nach unten, so daß

176



12Flach F_1

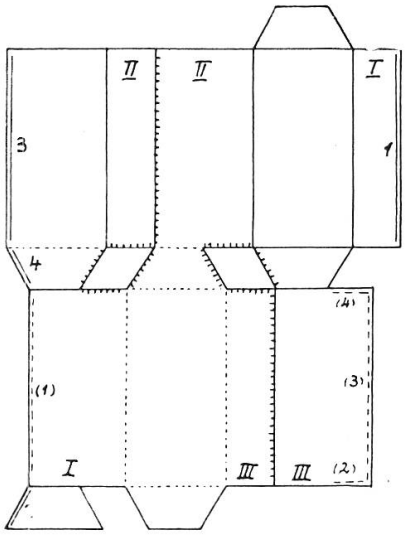
177



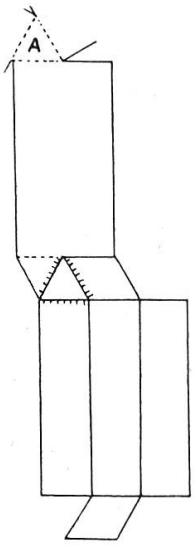
17Flach F_2

aufeinanderfolgende Wendungen entstehen, und nach der dritten schließen sich die Möbiusbänder an den Wendestrecken, so daß die Oberseite des Netzes bei 1 an die Unterseite bei (1) sich anschließt, bis 4 an (4), womit die Einseitigkeit eintritt. $f = 12$, $e = 18$, $k = 30$, $c = e - k + f = 0$. Von den drei Körperteilen dieses 12Flachs zeigen zwei die obere und einer die untere Seite des Netzes.

178



179



Das Netz des 17-Flachs F_2 ist um A in drei Ästen angeordnet, von denen nur einer gezeichnet ist **179.** An allen Umrißstrecken schließt sich das Netz gleichseitig, so daß dieses 17Flach zweiseitig wird. Von den vier Körperteilen zeigt der mittlere die untere Seite des Netzes und die übrigen drei die obere. $f = 17$, $e = 24$, $k = 39$, $c = 2$.

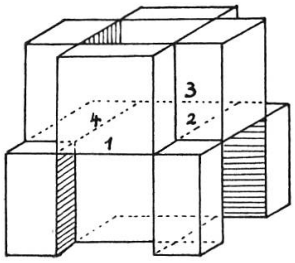
2. n **seitiges Prisma,** zerlegt durch n Ebenen mit n Doppelstrecken. Durch Verallgemeinerung des vorigen Falles können die Netze entsprechend dazu erhalten werden. Man erhält F_1 mit der Zahl der Flächen $f_1 = 4n$, der Ecken $e_1 = 6n$ und der Kanten $k_1 = 10n$, so daß die Charakteristik $c = 0$ wird und also $h = 3$. Für *ungerades* n wird F_1 *einseitig*, für gerades n zweiseitig, da dann die Anzahl der Wendungen beim Aufklappen auch gerade wird und zuletzt gleiche Seiten aneinander kommen.

Für F_2 ist $f_2 = 5n + 2$, $e_2 = 8n$, $k_2 = 13n$, $c = 2$. F_2 ist immer zweiseitig.

Als *Zusammensetzung* von F_1 und F_2 entsteht aus einem Prisma ein Teilvielflach F_{12} durch Annahme noch einer weiweiteren Schnittebene, z. B. der *Mittelebene.*

3. **Der Würfel,** zerlegt in zwei einseitige kongruente **26Flache.** Die vier seitlichen Schnittebenen und die dazutretende Mittelebene ergeben 8 Doppelstrecken, indem zu den ursprünglichen 4 parallelen noch 4 in der Mittelebene kommen, die ein inneres Quadrat einschließen. Zu F_1 über der Mittelebene ist F_2 darunter in Scheitellagen ihrer Teile zugeordnet. F_1 und F_2 einzeln für sich sind für $n = 4$ hier beide zweiseitig, aber zu F_{12} vereinigt entsteht ein *einseitiges* Vielflach **180.** Die beiden Netze lassen sich an die Mittelfläche setzen, und durch Aufklappung ergeben sich die Wendestrecken 1, 2, 3, 4 zwischen Flächen von F_1 und solchen von F_2. Das Hohlprisma im oberen Teil F_1 reicht nur bis zur Mittelfläche; unter dieser ist das mittlere Prisma des unteren Teiles, an dessen Seitenkanten hier quadratische Prismen angesetzt sind, als Stützen. Diese zeigen, wie auch zwei gegenüberliegende Teile von F_2, die entgegengesetzte Seite des Netzes, als die übrigen Körperteile. Die Körperteile des zweiten zugleich entstehenden 26Flachs passen in die Lücken des ersten. $f = 26$, $e = 40$, $k = 68$, $c = -2$.

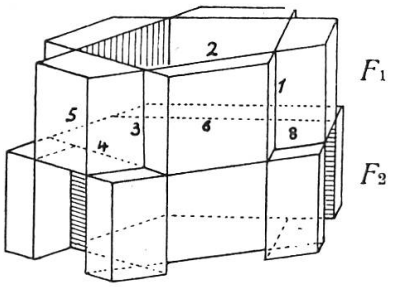
180



F_{12} 26Flach h = 5 Wendestrecken 1, 2, 3, 4

4. **Fünfseitiges Prisma,** F zerlegt in zwei kongruente einseitige **32Flache 181.** Die 6 Schnittebenen ergeben 5 parallele Doppelstrecken und dazu noch 5 in der Mittelebene, die jene schneiden und ein inneres Fünfeck bilden. Im Netz **182** ist der obere Teil F_1, mit den Trapezen um das Hohlprisma, zusammenhängend an eine Seite des Fünfecks der Mittelfläche angeschlossen, während der untere Teil F_2, mit den Rauten, in drei Abschnitten an drei Seiten des Fünfecks angefügt ist. Diese drei Teile sind nach unten zu klappen, der übrige Teil, um den punktierten Abschnitt der Fünfeckseite, nach oben für F_1.

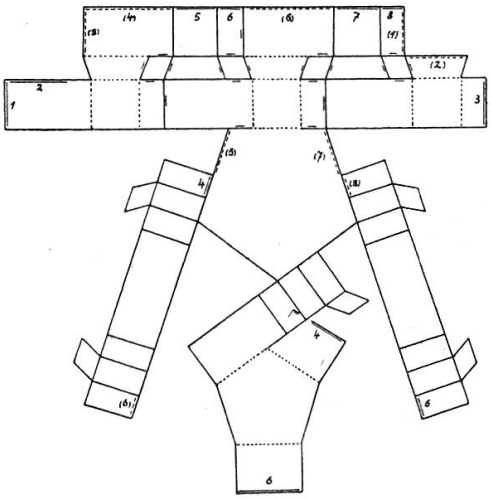
181



F_{12} 32Flach h = 6 Wendestrecken 1 bis 8

Innert F_1 entstehen für die Möbiusbänder die Wendestrecken 1, 2, 3, von denen 2 eine obere Kante ist, welche die Doppelstrecken 1 und 3 verbindet, in denen eine Schnittebene ihre Seiten des Netzes wendet. Die übrigen Wendestrecken 4 bis 8 bestehen zwischen Flächen des oberen Teiles F_1 und des unteren F_2, und zwar liegen 4 und 6 in Doppelstrecken und 5 und 7 in Kanten an der Mittelfläche. $f = 32$, $e = 50$, $k = 85$, $c = -3$.

182



Netz des 32Flachs
Möbiusbänder 1—(1) bis 8—(8)

5. n **seitiges Prisma,** zerlegt, entsprechend dem vorigen Fall, durch $(n + 1)$ Ebenen mit 2 n Doppelstrecken in zwei kongruente einseitige Teilvielflache F_{12} mit $f = 6n + 2$, $e = 10n$, $k = 17n$ und der Charakteristik $c = 2 - n$ oder aus $h = 3 - c$, also $h = 1 + n$. Damit ist jeder *Zusammenhangszahl* $h > 3$ ein zweiteiliges prismatisches einseitiges Vielflach F_{12} zugeordnet, dessen Mittelfläche ein $(h - 1)$ Eck ist.

Die einfachen F_1 haben $h = 3$, abwechselnd für einseitige Vielflache bei ungeradem n und für zweiseitige bei geradem n. Für alle F_2 ist $h = 1$. Es fehlt also in diesen Reihen ein Beispiel für $h = 2$, weil dazu drei Doppelstrecken sich innen schneiden müssen.

6. **Grenzfall.** Die Schnittebenen, die mit der Seitenzahl n des Prismas an Zahl beständig zunehmen und immer schmalere Rechtecke enthalten, sind fortwährend so zu legen, daß im Rande Trapeze und Rauten nebeneinander entstehen und darüber Prismen als Zellen der Teilvielflache. Man kann dazu die Annahme machen, daß die äußere Trapezseite einen bestimmten inneren Teil, immer im gleichen Verhältnis, der Seite der ursprünglichen Grundfläche des Prismas einnimmt. Für wachsendes n werden die Ränder immer schmaler, und

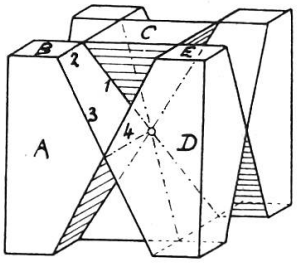
F_1 wird schließlich zu einem doppelten gelegten Zylindermantel, ohne einen Körperinhalt einzuschließen. Der innere Mantel ist aus den Schnittflächen entstanden und wird vollständig dicht; der äußere Mantel, aus Streifen der Seitenflächen des Prismas gebildet, die abwechselnd zu F_1 oder F_2 gehören, hat zwischen benachbarten Mantellinien Lücken. Diese Lücken an F_1 werden zu Streifen im Mantel von F_2 an den Zellen über den Rauten, welche um den inneren Zylinder angeordnet sind, der ausgefüllt zu F_2 gehört und auch jenen dichten Mantel hat. Aus F_1 und F_2 zusammengesetzt, hat F_{12} also unter der Mittelfläche einen ausgefüllten Zylinder und darüber einen leeren Hohlzylinder. Der äußere dazu benachbarte Mantel hat Lücken zwischen benachbarten Mantellinien, abwechselnd oben und unten. Diese Zylinderflächen sind also gelockert und ihr Inhalt hängt ab von dem Verhältnis der Teilung der Seiten der Grundflächen.

XI. Doppelstrecken im Bündel, in Prismen gerändert

Die Schnittebenen werden von der Mitte des geraden Prismas aus so gelegt, daß sie aus den Grundflächen, als regelmäßigen Vielecken gerader Seitenzahl, Parallele zu deren Seiten in gleichen Abständen von diesen herausschneiden, wodurch in den Grundflächen ein inneres Vieleck entsteht, das dem ganzen ähnlich ist. Damit sind die Grundflächen gerändert.

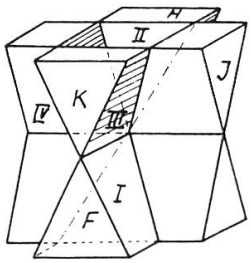
1. **Würfel** zerlegt in **22Flach 183** einseitig und **20Flach 184** zweiseitig. Die vier Schnittebenen teilen die Grundflächen in Quadrate *B* in den Ecken und in Rechtecke *H* an den Seiten, um ein inneres Quadrat *C*. In den Seitenflächen entstehen je zwei gleichschenklige Dreiecke *F* und Fünfecke *A*. Als Durchdringungen der

183



22Flach

184

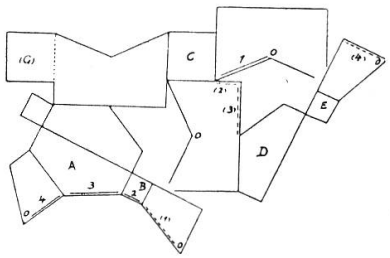


20Flach

vier Rechtecke der Achsenschnitte in den Schnittebenen I bis IV entstehen sechs Doppelstrecken, von denen vier von der Würfelmitte *O* aus nach den Ecken der inneren Quadrate *C* gehen und zwei die Mitten der gegenüberliegenden Seitenflächen verbinden. Der Würfel zerfällt in 14 Zellen, von denen sechs das 22Flach und acht das 20Flach bilden.

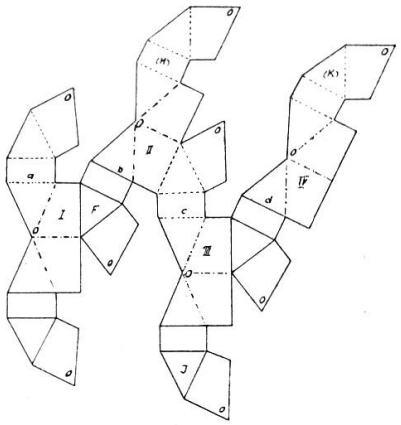
Zum 22Flach **183** gehören die zwei inneren Quadrate *C*, die acht Eckquadrate *E* und die acht Fünfecke *A*, nebst den vier Achsenschnitten. Die inneren Zellen sind zwei quadratische Pyramiden, wie die von *C* nach *O*, und die äußeren vier Zellen sind 8Flache. Dazwischen sind acht Lücken. Das Netz läßt sich um *C* regelmäßig anordnen und ist **185** teilweise gezeichnet. Die Klappungen erfolgen nach unten, nur *(G)* wird entgegengesetzt geklappt. Aus den Rechtecken der Achsenschnitte sind je vier Ausschnitte nach *O* hergestellt, in welche Trapeze, wie die an (1) und 4, eingeklappt werden. Die Wendestrecken bilden viermal Vierecke, wie 1, 2, 3, 4, worin 1 und 4 halbe Doppelstrecken sind und 3 und 4 Kanten.

185



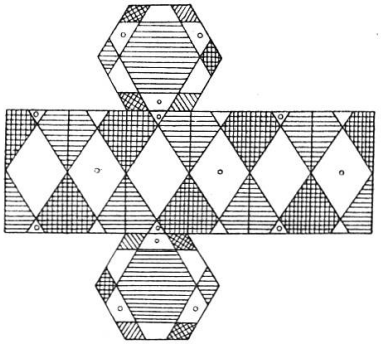
Das Netz **186** des 20Flachs besteht aus vier Gruppen von Flächen, die um die Hauptteile I bis IV der Achsenschnitte angesetzt sind. Zuerst wird I um *a* aufgerichtet, dann II um *b* nach unten gedreht, bis sein *O* in das von I fällt, hierauf wird III um *c* in gleicher Richtung weiter gedreht und schließlich auch IV um *d*, bis alle vier *O* zusammenfallen. Alle Drehungen setzen sich aneinander in fortgesetzt gleicher Richtung, so daß an allen entstehenden Kanten sich die Flächen gleichseitig schließen und dieses 20Flach damit zweiseitig wird. Im Netz sind von *O* aus die Doppelstrecken strichpunktiert eingetragen.

186



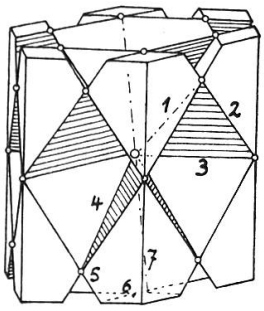
2. **Sechsseitiges Prisma,** zerlegt in **44Flach** F_1 einseitig und **36Flach** F_2 zweiseitig. Jede Kante der Grundflächen ist **187** in drei gleiche Strecken geteilt, und die Teilpunkte sind so verbunden, daß Parallele zu den Seiten entstehen und damit ein inneres Sechseck und Rauten in den Ecken neben Trapezen an den Seiten. Durch die Parallelen werden Ebenen gelegt nach der Mitte *O* des Prismas, welche aus diesem sechs Sechsecke als Achsenschnitte ergeben, die einander in 15 Doppelstrecken durchdringen. Davon gehen sechs Doppelstrecken **188** nach Ecken der inneren Sechsecke, wie 7, und drei verbinden Mitten von seitlichen Gegenkanten, wie 3, und sechs gehen, wie 1, geneigt nach den Schnitten der Spuren in Seitenflächen. Durch die Spuren wird jede Seitenfläche in sieben Flächen geteilt und jede Grundfläche in 13, so daß 68 Flächen **187** entstehen, die in zwei Scheitelgebiete zerfallen: das schraffierte mit 38 Flächen und das andere mit 30 Flächen. Das erste bildet mit den sechs Achsenschnitten das 44Flach, das zweite das 36Flach. Das Scheitelgebiet der 30 nicht schraffierten Flächen zerfällt in zwei voneinander getrennte Untergebiete, gebildet von den mit *o* bezeichneten 15 Flächen und den 15 leergelassenen. Alle Flächen des einen dieser beiden Untergebiete sind durch die Flächen des anderen voneinander getrennt, so daß für das 36Flach Zweiseitigkeit eintritt, indem das eine Untergebiet die Oberseite *o* des Netzes einnimmt und das andere die Unterseite *u*. In dem Scheitelgebiet der 38 schraffierten Flächen ist das eine Untergebiet, das von *u*, zweifach schraffiert, aber dieses ist von dem anderen Untergebiet, von dem von *o*, das einfach schraffiert ist, nicht vollständig getrennt; es ist nicht in sich geschlossen, sondern es stößt je in drei Rauten mit den in-

187



Scheitelgebiete mit ihren Untergebieten

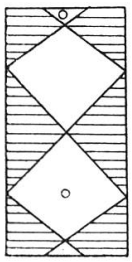
188



44Flach
n = 6

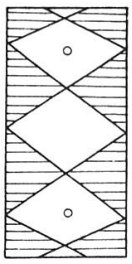
neren Sechsecken zusammen, deren Zuteilung, ob zu *o* oder *u*, unbestimmt bleibt, aber in beiden Fällen stellen diese Sechsecke den Übergang her zwischen *o* und *u* der beiden Untergebiete, wodurch für das 44Flach Einseitigkeit eintreten muß. Das Netz **191** des 44Flachs ergibt in der Tat bei der Aufklappung Wendestrecken, die sechs Dreiecke, wie 1, 2, 3, und sechs Vierecke, wie 4, 5, 6, 7, bilden **188.** Das Netz läßt sich um ein inneres Sechseck *G* regelmäßig anordnen. Aus den sechs Sechsecken der Achsenschnitte sind an Doppelstrecken je vier Ausschnitte, wie die an 1 und 3, herausgenommen, die sich beim Aufklappen wieder einfügen an *O*, aber mit Wendungen. Solche Dreiecke überdecken teilweise andere Flächen.

189



n = 8

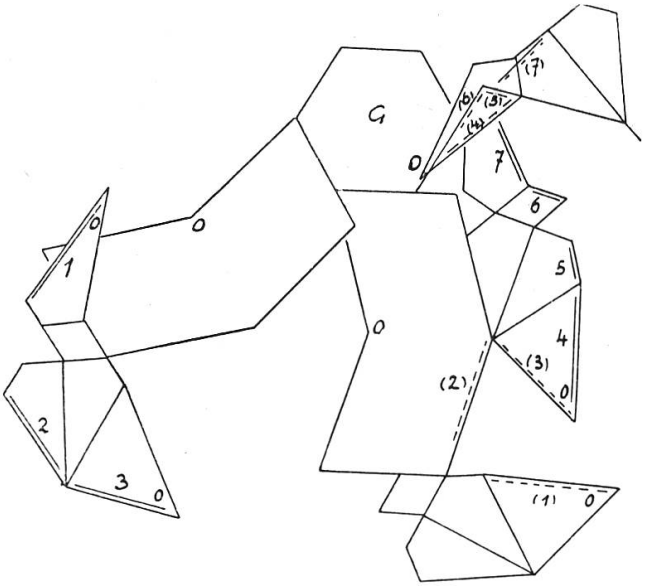
190



n = 10

3. **Allgemein:** *n* seitiges Prisma, zerlegt wie im vorigen Beispiel durch *n* Ebenen in zwei Teilvielflache F_1 und F_2 für gerades $n = 2t$, Doppelstrekken *d*, Zellen *z*, mit Seitenflächen wie **189** und **190.** Die erhaltenen Zahlwerte der Elemente sind in der Tabelle zusammengestellt.

191



Teil des Netzes des 44Flachs

		F_1 *einseitig*				F_2 *zweiseitig*									
t	n	f_1	e_1	k_1	c_1	f_2	e_2	k_2	c_2	d	z	z_1	z_2	h_1	h_2
2	4	22	36	60	— 2	20	28	48	0	6	14	6	8	5	8
3	6	44	66	120	—10	36	54	96	— 6	15	32	14	18	13	9
4	8	74	104	200	—22	56	88	160	—16	28	58	26	32	25	19
5	10	112	150	300	—38	80	130	240	—30	45	92	42	50	41	33

Dazu ergeben sich folgende Formeln für $n = 2t$, $t \geqq 2$:

$$\left.\begin{array}{lll} F_1: f_1 = 2t\,(2t+1)+2 & e_1 = 2t\,(2t+5) & k_1 = 10t\,(t+1) \\ F_2: f_2 = 2t\,(t+3) & e_2 = 2t\,(2t+3) & k_2 = 8t\,(t+1) \end{array}\right\} k_1 - k_2 = 2t\,(t+1$$

Doppelstrecken $d = t\,(2t - 1)$, Zellen $z = 2\,(d + 1)$, $e_1 - e_2 = 4t$, weil F_1 alle Ecken $2n$ des Prismas hat.

$e_2 = 2d + 8t$, weil F_2 außer den Enden der Doppelstrecken noch zwei Ecken erhält neben jeder Ecke des Prismas.

Zellen von F_1: $z_1 = \frac{z}{2} - (t - 1)$ und von F_2: $z_2 = \frac{z}{2} + (t - 1)$.

Charakteristik:

$$c_1 = 2\,(1 + t - t^2) = 2 + t - d,\quad c_2 = 2t\,(2 - t) = 3t - d.$$

$$c_1 - c_2 = -2\,(t - 1),\ \text{also}\ c_1 - c_2 = z_1 - z_2.$$

Zusammenhangszahl:

$$h_1 = 2t^2 - 2t + 1,\ h_2 = 2t^2 - 4t + 3,\ h_1 - h_2 = 2\,(t - 1).$$

Lücken:

$$\left.\begin{array}{ll} l_1 = z_2 & l_2 = z_1 \\ h_1 = l_1 - 2t + 1 & h_2 = l_2 - 2t + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{also} \\ h_1 - h_2 = l_1 - l_2.\end{array}$$

Die Differenz der *Zusammenhangszahlen* ist also gleich der Differenz der Lücken.

4. **Grenzfall.** Man erhält für $lim\ n = \infty$ einen Zylinder, weil die Ränder der Grundflächen immer schmaler werden und schließlich am Kreisrand verschwinden, so daß F_1 als seine beiden Grundflächen zwei Kreise von den Kegeln erhält, die als innere dichte Zellen ihre Spitze in O haben. Statt dessen hat F_2 zwei Hohlkegel als Lücken. Die übrigen Raumteile der Teilvielflache sind durch Lücken gelockert, wie in dem einfacheren früheren Fall,[3] für Prismen ohne Ränder an den Grundflächen, ausgeführt wurde.

XII. Einseitige Zellenpolyeder aus Prismatoiden.

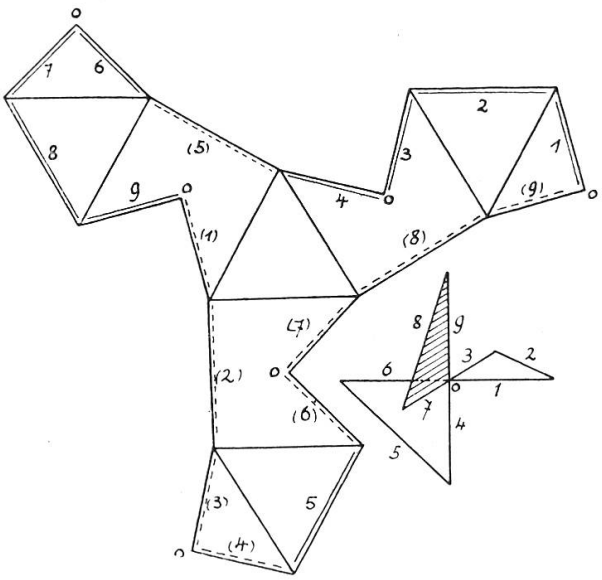
Prismatoide mit gleichen regelmäßigen Grundflächen ungerader Seitenzahl und gleichseitigen oder gleichschenkligen Dreiecken als Seitenflächen werden mittelst Schnittebenen in zwei kongruente einseitige Vielflache zerlegt.

a) Kantenschnitte.

Die Schnittebenen werden durch zwei gegenüberliegende parallele Kanten von Grund- und Deckfläche gelegt.

1. **Zerlegung des Oktaeders in zwei Heptaeder.** Das Oktaeder als Prismatoid für $n = 3$ betrachtet, wird durch drei Ebenen in acht Körperteile zerlegt, von denen vier Scheitelteile, die nur in Doppelstrecken zusammenstoßen, je ein Heptaeder bilden. Hier ist vom Heptaeder **32** ein *neues Netz* **192** gezeichnet, das sich für beliebige ungerade n verallgemeinern läßt. Zur Ermöglichung der Durchdringungen ist aus jedem Achsenschnittquadrat an den Diagonalen ein Viertel herausgeschnitten. Dadurch werden alle Umrißkanten des Netzes beim Aufklappen, das überall nach gleicher Seite erfolgt, für die Möbiusbänder zu Wendestrekken von 1 nach (1) bis 9 nach (9), und zwar sind es sechsmal Hälften von Doppelstrecken und dazu drei Oktaederkanten 2, 5, 8. Die Wendestrecken bilden drei Dreiecke 123, 456, 789 um O, in jeder Achsenschnittebene eines, und zwar ist 1 auf der Doppelstrecke der I. Schnittebene, 2 liegt in der II. und 3 in der III.; 4 nochmals in der III. und 5 dann wieder in der I. Schnittebene.

192

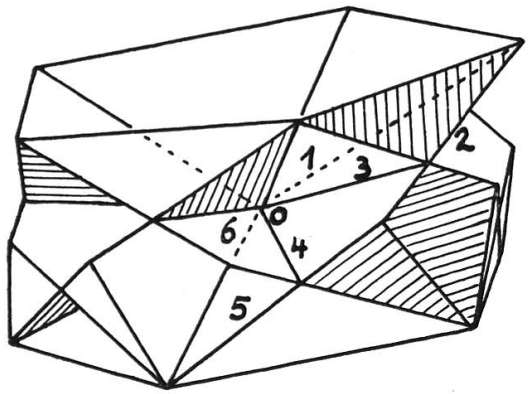


Netz des Heptaeders
Wendestrecken 1—9 zu (1)—(9)

2. **Das Prismatoid** des Fünfecks, nach Archimedes, zerlegt in zwei **26Flache 193.** Die fünf Schnittebenen von jeder Kante einer Grundfläche nach der gegenüberliegenden parallelen ergeben 10 Doppelstrecken durch die Mitte O; fünf davon verbinden Gegenecken, und fünf gehen von der Mitte einer Seitenfläche geneigt nach der Mitte der Gegenfläche.

Die Schnittfiguren in den Ebenen sind Sechsecke und enthalten je vier Doppelstrecken. Die fünf Schnittebenen teilen das Prismatoid in 22 Zellen, und je 11 Scheitelzellen davon, die mit benachbarten nur in Doppelstrecken zusammenstoßen, bilden ein einseitiges 26Flach. Die beiden so entstehenden Teilvielflache sind kongruent, so daß die Zellen des einen Lücken des anderen sind, eine ganz hübsche, die Betrachtung erleichternde Gestaltung. Ein solches 26Flach hat ein Fünfeck als Grundfläche und darüber eine Pyramide bis O, während die Deckfläche fehlt und von ihrem Rand der Trichter einer Hohlpyramide bis O als Lücke reicht. An den Seitenkanten der Grundpyramide sind in vierkantigen Zellen 7Flache angefügt und darüber in dreikantigen Zellen 4Flache unter dem Trichter.

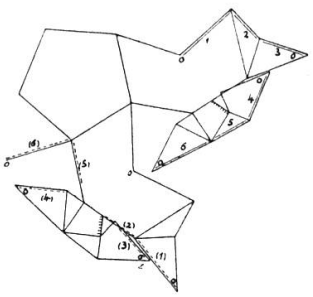
193



Prismatoïdales 26Flach
Wendestrecken 1—6

Für das Netz **194**, das sich um das Fünfeck der Grundfläche regelmäßig anordnen läßt, sind aus jedem Sechseck der Schnittflächen drei Dreiecke von O aus herausgeschnitten, zur Ermöglichung der Durchdringungen. Diese Dreiecke sind an den äußeren Flächen angefügt und kenntlich an der Ecke O. Die Flächen sind alle nach der gleichen Seite aufzuklappen, und die Möbiusbänder schließen sich in sechs Wendestrecken, die fünfmal vorkommen und je zwei Dreiecke 1, 2, 3 und 4, 5, 6 bilden; darin sind 1, 3 und 4, 6 halbe Doppelstrecken, deren Enden durch die Kanten 2 und 5 zu den Dreiecken geschlossen werden. Die Unterseite des Netzes zeigt sich nur in den Lücken wie unter 2 und 5, alle übrigen Flächen zeigen außen die Oberseite des Netzes.

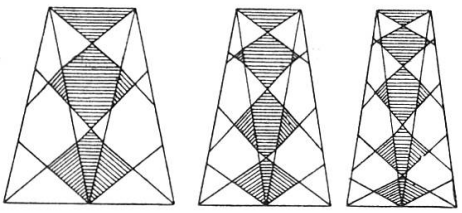
194



Teil des Netzes
des 26Flachs
Möbiusbänder
1—(1) bis 6—(6)

3. **Allgemein: Das Prismatoid,** für ungerade Seitenzahl n, zerlegt durch Kantenschnitte von n Ebenen. In folgender Tabelle sind die Elemente der entstehenden einseitigen Teilvielflache angegeben, als Flächen f, Ecken e, Kanten k mit der Charakteristik $c = e - k + f$, und den Doppelstrecken d, Zellen z und der Zusammenhangszahl $h = 3 - c$ für $n = 2t + 1$, $t > 1$. Seitenflächen **195.**

195



n = 7 n = 9 n = 11

Geteilte Seitenflächen am Prismatoid, Zellen

t	n	f	e	k	c	d	z	z_1	h
2	5	26	30	60	— 4	10	22	11	7
3	7	57	84	154	—13	21	44	22	16
4	9	100	162	288	—26	36	74	37	29
5	11	155	264	462	—43	55	112	56	46

Dazu ergeben sich folgende Formeln:

$f = t\,(6t + 1)$, $e = 6\,(2t + 1)\,(t - 1)$, $k = 2\,(2t + 1)\,(5t - 4)$.

Doppelstrecken $d = t\,(2t + 1)$, Zellen $z = 2t\,(2t + 1) + 2$, also $z = 2\,(d + 1)$, $z_1 = d + 1$.

Dreikantige Zellen $(2t + 1)$, vierkantige Zellen $(4t^2 + 1)$.

Charakteristik $c = 2 + t - 2t^2$ oder $c = 2 + 2t - d$.

Zusammenhangszahl $h = 2t^2 - t + 1$ oder $h = d - 2t + 1$, also $h = z_1 - 2t$.

Ergebnis: Die Zusammenhangszahl ist gleich der Zahl der Lücken, vermindert um die um 1 verkleinerte Anzahl der *Ecken* der Grundfläche oder der Anzahl *Reihen* von Lücken darüber.

Ein solcher *Zellenkörper* besteht aus einer inneren Grundpyramide, über deren Seitenkanten die vierkantigen und am obersten Rande dreikantigen Zellen der Doppelstrecken übereinander aufgebaut sind, wie ein Fruchtzapfen, bis zur doppelten Höhe der Pyramide, so daß oben, gestützt von den Zellen, ein Trichter entsteht, der hinunter nach der Mitte

reicht. Über den Flächen der Grundpyramide erheben sich zwischen den Zellen die Stockwerke der Lücken bis an die Ecken des oberen Randes der Hohlpyramide, wie dies aus den geteilten Seitenflächen **195** der Prismatoide ersichtlich ist.

4. **Im Grenzfall** $\lim n = \infty$ geht der Umriß des geschilderten Zellenzapfens in einen Zylinder über mit eingeschriebenem Doppelkegel von O aus, von dem die untere Hälfte über der Grundfläche den voll zu rechnenden Körperinhalt besitzt, während der obere leer ist als Lücke ohne Deckel. Der Raum zwischen diesen Kegeln und dem Zylinder ist durch Zellen geteilt in Körper und in Lücken, wenn nur das *eine* der Polyeder in Betracht fällt, so daß dieser Raumteil für ein solches nicht als dicht zu rechnen ist und nur die Hälfte seines Inhaltes erhält. Es ist also eine Lockerung des Raumes eingetreten durch die nach O eindringenden Lücken. Auch die Mantelfläche des Zylinders zerfällt in unendlich kleine Drei- und Vierecke, die als Flächen und Lücken abwechseln in der Anordnung ihrer Seiten und zusammenhängen in Scheitellage. Die Flächen eines Teilvielflaches überdecken daher den Zylinder nicht dicht, sondern mit Lücken, und machen nur den halben Flächeninhalt aus.

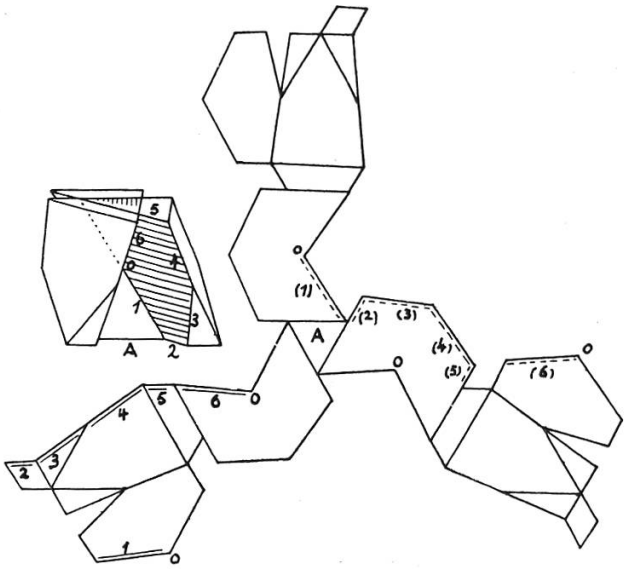
Die Gesamtoberfläche eines Teilvielflachs wächst infolge der Zunahme der Schnittebenen unbegrenzt. Die Oberfläche wird also unendlich groß bei gleichbleibendem Volumen. Das Volumen als Funktion der Oberfläche bleibt ein endlicher Wert, auch für die unendlich große Oberfläche.

b) Geränderte Grundflächen.

Die Schnittebenen werden von der Mitte O des Prismatoides aus so gelegt, daß sie die Grundflächen parallel zu ihren Seiten schneiden und so, daß ein überall gleich breiter Rand entsteht, mit Trapezen an den Seiten und Rauten in den Ecken. Diese Trapeze begrenzen an der Deckfläche den Rand der Hohlpyramide, und die Rauten bilden in der Grundfläche, um das innere Vieleck der Grundpyramide, die Stützflächen der untersten Eckzellen als Füße, ringsum die Zierform des Polyeders.

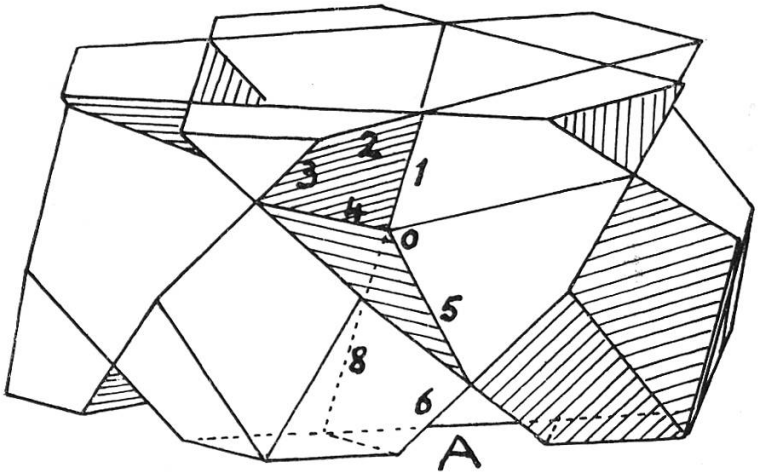
1. **Das Oktaeder** gerändert geschnitten zum einseitigen **19Flach 196.** Die Schnittfiguren der drei Ebenen sind Sechsecke, aus denen für das Netz von *O* aus ein Fünfeck geschnitten wird, das dann außen den Seitenflächen anzufügen ist. Durch Aufklappung schließen sich die Möbiusbänder in den Wendestrecken 1 bis 6, in drei Fällen. Die drei Seitenflächen sind Fünfecke, die aus den Oktaederdreiecken entstanden sind, durch Wegschneiden zweier Dreiecke oben, wie sie dann unten noch vorkommen als Reste an den Lücken weggefallener Fünfecke um die Rauten der Füße. Die Spuren der Schnittebenen kommen innert den Oktaederflächen nicht zum Schnitt, weshalb dieses 19Flach nicht zur folgenden Reihe von Polyedern gehört (wie auch das Heptaeder nicht zur früheren Reihe gehört). $f = 19$, $e = 27$, $k = 45$, $c = 1$.

196



19Flach aus Oktaeder, gerändert

197



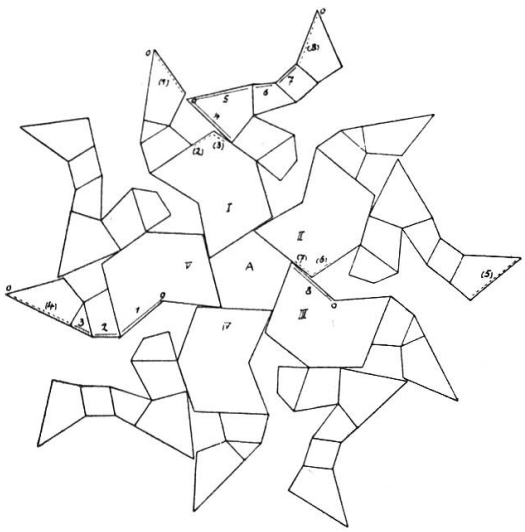
36Flach aus Prismatoid gerändert
Wendestrecken 1—8

2. **Fünfseitiges Prismatoid** gerändert zerlegt in zwei einseitige **36Flache 197.** Das vollständig gezeichnete Netz **198** ist um das innere Fünfeck *A* der Grundfläche angeordnet. Daran anstoßend sind

Schnittfiguren I bis V mit Ausschnitt gezeichnet, in den dann drei Vierecke mit Ecke *o* gehören, die außen angesetzt sind. Alle Aufklappungen erfolgen nach gleicher Seite. Zuerst werden die Teile I bis V der Schnitte aufgeklappt, bis die *O* in einem Punkt liegen, womit die Anordnung aller übrigen Flächen bestimmt ist, die sich leicht einfügen. Trapeze wie 2 bilden den oberen Rand am Trichter, 6 bildet eine Kante am Fuß mit der Raute 7 darunter.

Die Möbiusbänder **198** jedes Fünftels schließen sich in acht Wendestrecken, die zwei Vierecke von *O* aus bilden: 1, 2, 3, 4 in der Schnittebene I und 5, 6, 7, 8 in II. Dabei sind 1, 4, 5, 8 zugleich Hälften von Doppelstrecken: 1 von I und V, 4 von I und IV, 5 von II und IV und 8 von II und III. Als Wendestrecke liegt 1 in V, 4 und 5 sind Wendestrecken in IV, und 8 ist es in III, so daß alle fünf Schnittebenen an diesem Zug der acht Wendestrecken beteiligt sind, wie er an diesem 36Flach im ganzen fünfmal vorkommt. Im Netz sind 4 und 5 nicht in IV vorhanden, weil sie zu dem aus IV herausgeschnittenen Mittelstück gehören, das erst nach der Aufklappung in IV eingefügt wird.

198



Möbiusbänder 1—(1) bis (8)—8

3. **Allgemein:** *n* seitiges Prismatoid, ungerader Seitenzahl, gerändert geschnitten, wobei die Ränder fortwährend nicht zu breit, sondern so angenommen werden, daß noch Trapeze an den Seiten neben den Rauten, in den Ecken, entstehen, um weitere Änderungen zu vermeiden. Man verwende dazu die Schnittpunkte der Projektion der Seiten der Deckfläche, auf die Grundfläche, mit deren Seiten. Die Ränder werden daher bei wachsendem *n* immer schmaler, und die Seitenflächen unterscheiden sich immer weniger von den früheren,

durch Kantenschnitte entstandenen. Die Zahl aller Flächen nimmt dabei gegen jenem Fall um 2 n zu, die der Ecken um 5 n und die der Kanten um 7 n, so daß die Charakteristik gleich bleibt. Man erhält folgende Formeln: $f = 6t^2 + 5t + 2$, $e = 12t^2 + 4t - 1$, $k = 20t^2 + 8t - 1$.

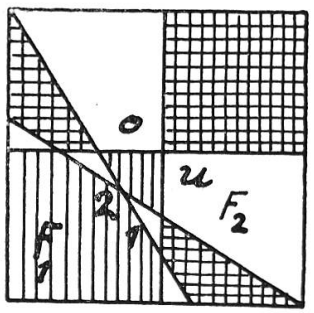
4. **Der Grenzfall** führt infolge der beschränkenden Annahme für die Ränder zu dem nämlichen Zylinder mit eingeschriebenem Kegel wie im ersten Fall der Kantenschnitte. Es zeigt sich also, daß in der Entwicklung von Polyedern solche Änderungen, welche die Zusammenhangszahl nicht beeinflussen, auch den Grenzfall nicht ändern.

XIII. Prismatische Scheitelzellen im Würfel

Der Würfel werde von Ebenen geschnitten, die senkrecht zu einer seiner Grundflächen so anzunehmen sind, daß alle ihre Schnittgeraden durch das Innere des Würfels gehen und darin die Doppelstrecken der entstehenden Teilvielflache bilden. Um eine übersichtliche Anordnung zu erhalten, werde innerhalb der Grundfläche des Würfels um eine seiner Ecken ein Viertelskreis gezeichnet und in gleiche Bogen geteilt. Die Tangenten in den Teilpunkten seien dann die Spuren der Schnittebenen. Vorerst wird die Ausführung zweier Beispiele beschrieben.

1. **Würfel** zerlegt **199** in ein **einseitiges 20Flach** F_1 und in ein **zweiseitiges 20Flach** F_2 durch $n=4$ Schnittebenen. Die Grundfläche wird in fünf Flächen in Scheitellage für F_1 und in sechs Flächen für F_2 geteilt. Die Schnittflächen, zwei Quadrate und zwei Rechtecke, müssen für das Netz **200** längs Doppelstrecken zerlegt werden, um die Durchdringungen zu ermöglichen. Nur eines der Quadrate wurde als durchgehend ganz gelassen, und daran sind anstoßende Rechtecke von Seitenflächen und Schnittflächen zu einem Mittelteil zusammengesetzt, an welchen die übrigen Flächen angehängt sind. Die Aufklappung des Netzes von

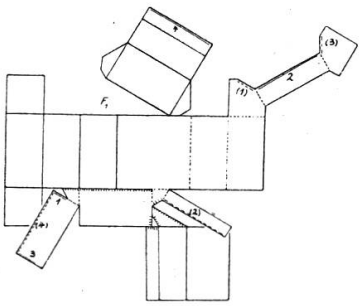
199



$n = 4$

F_1 ergibt Möbiusbänder, die sich in den Wendestrecken 1—4 zu einem Rechteck an einer inneren Lücke schließen. Die beiden Prismen über dem Ecksechseck und dem inneren Viereck, benachbart in der Doppelstrecke 2, die zugleich Wendestrecke ist, weisen eine nämliche Seite des Netzes nach außen, während die übrigen drei Prismen die andere Seite zeigen. An F_2 dagegen wechseln alle sechs Prismen an ihrer Außenseite mit den Netzseiten *o* und *u* ab, an den Doppelstrecken, in denen sie zusammenstoßen, so daß Netz **201** ohne Wendestrecken ist.

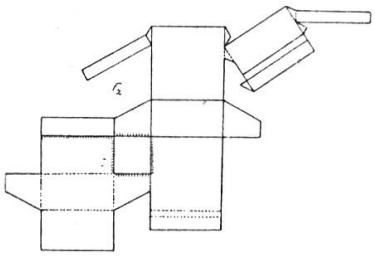
200



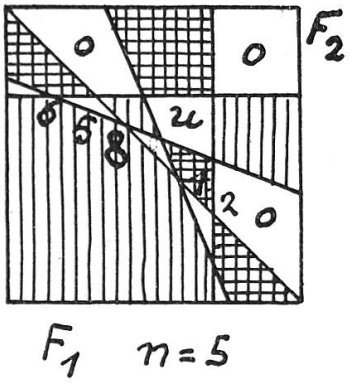
n = 4

2. **Würfel** zerlegt **202** in ein **einseitiges 25Flach** und in ein **zweiseitiges 29Flach** durch $n = 5$ Schnittebenen. Das Netz **203** von F_1 ergibt bei der Aufklappung acht Wendestrecken, die zwei Rechtecke 1 2 3 4 und 5 6 7 8 an zwei inneren Lücken bilden, mittelst Doppelstrekken 2 und 4 und ihren Verbindungskanten 1 und 3, ebenso 6 und 8 mit 5 und 7. In den Doppelstrecken 2 und 8 stoßen je *zwei Prismen* zusammen, welche die *nämliche Seite* des Netzes nach außen zeigen, wodurch die Einseitigkeit bedingt wird. Sonst wechseln die übrigen Scheitelprismen von F_1 miteinander ab in Ober- und Unterseite der Netzfläche und ebenso alle von F_2 in *o* und *u*.

201



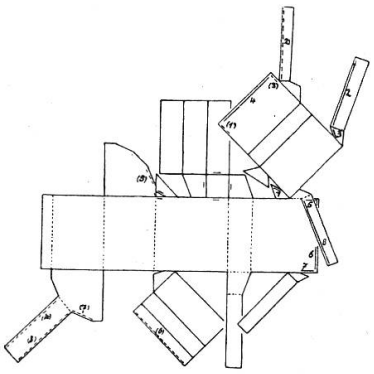
202



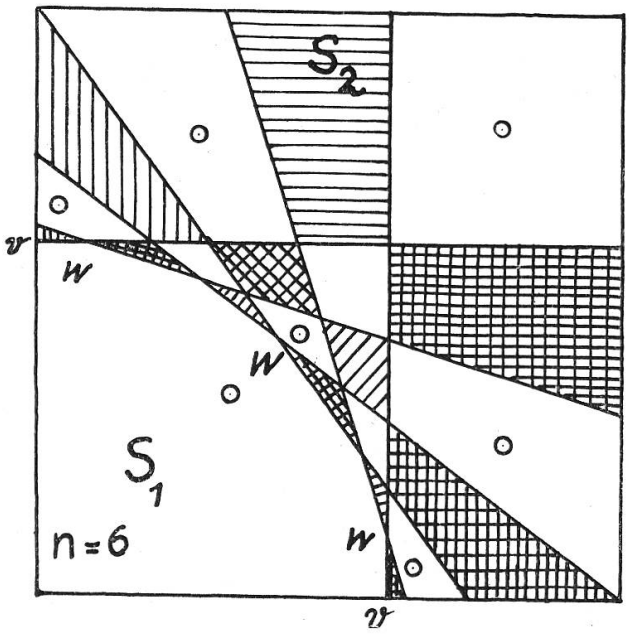
3. **Verallgemeinerung.** Um die *n* Spuren der Schnittebenen zu erhalten, ist der Viertelkreis in $(n - 1)$ Bogen zu teilen. Die *n* Tangenten in den Teilpunkten als Spuren ergeben $n\ (n - 1) : 2 = d$ Schnittpunkte, und dazu gehören ebensoviele *Doppelstrecken d* in den beiden Teilvielflachen des Würfels. Durch die *n* Geraden wird das Quadrat **204** in $z = 1 + n\ (n + 1) : 2$

Flächen eingeteilt. Diese zerfallen in zwei *Scheitelgebiete*, indem man alle die Flächen zu einem Gebiet zusammenfaßt, die nur in Ecken zusammenstoßen. Von den Teilflächen ist ausgezeichnet der Teil des Quadrates, der von den Tangenten abgeschlossen wird und ein $(n + 2)$ Eck bildet. Das ganze Scheitelgebiet, das zu diesem $(n + 2)$ Eck gehört, sei als S_1 bezeichnet, und die Anzahl seiner Flächenteile sei z_1. Es besitzt außer dem $(n+2)$ Eck noch die in seinen Ecken anstoßenden Vierecke samt allen übrigen Vierecken in Scheitellage. Dann besteht das andere Scheitelgebiet S_2, mit z_2 Flächen, aus den Dreiecken an den Tangenten und den in Ecken anstoßenden Scheitelvierecken. Zur Vereinfachung kann die Annahme immer so getroffen werden, daß in den Ecken des Quadrates keine Fünfecke entstehen, indem man zwei der Ecken auf Tangenten annimmt. $z_1 + z_2 = z$.

203



204

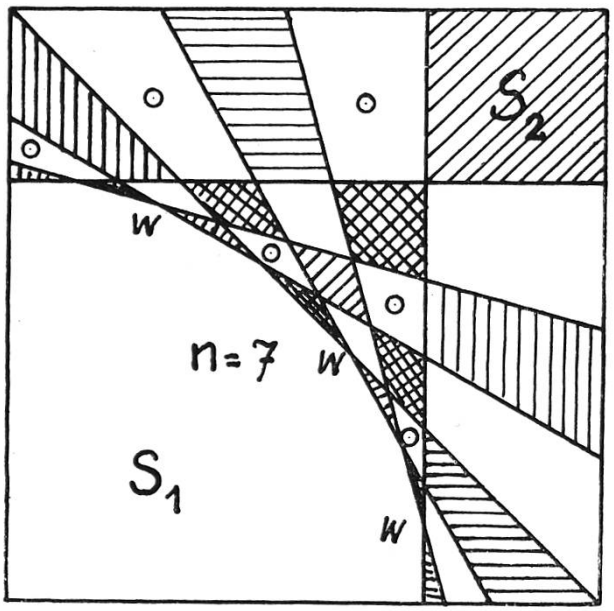


Zu diesen zwei *Scheitelflächengebieten* S_1 und S_2 als Grundflächen gehören darüber im Würfel zwei aus prismatischen Zellen von der Anzahl z_1 bzw. z_2 zusammengesetzte Vielflache F_1 und F_2, beide mit den Doppelstrecken d, in denen die Zellen zusammenstoßen. Die durchgehenden Schnittebenen bilden den Zusammenhang der Zellen. Zu S_1 gehört ein einseitiges Vielflach F_1, zu S_2 ein zweiseitiges F_2. Um die Elemente der Vielflache zu bestimmen, hat man die beiden Fälle für ungerades und für gerades n auseinander zu

halten, für die Anzahl f der Flächen, e der Ecken, k der Kanten und der Charakteristik $c = e - k + f$ samt der Zusammenhangszahl $h = 3 - c$.

Bei *ungeradem* n fehlt in S_1 **205** das dem $(n + 2)$ Eck gegenüberliegende Quadrat; F_1 hat dann an dieser Stelle eine Randlücke. Bei *geradem* n **204** dagegen gehört jenes Quadrat auch zu S_1. Damit sind die *einseitigen* Vielflache F_1 mit z_1 Zellen gekennzeichnet; sie besitzen immer die *Hauptzelle* über dem $(n + 2)$ Eck, an deren Begrenzung sämtliche Schnittebenen beteiligt sind. Dieses $(n + 2)$ Eck fehlt an den zweiseitigen F_2, dafür besitzen diese Vielflache die Zellen über den n Dreiecken längs den Seiten des $(n + 2)$ Ecks, welche die Hauptrandlücke von F_2 einfassen. Sowohl F_1 als F_2 besitzen je n Randlücken. Die Anzahl der inneren Lücken sei mit l_1 bzw. l_2 bezeichnet.

205



a) Anzahl n der Schnittebenen ungerade. 202 und 205.

1. **Das Scheitelgebiet** S_1 besitzt $z_1 = (n^2 + 3) : 4$ Flächen, darunter das $(n + 2)$ Eck, und im übrigen alles Vierecke mit zusammen $(n^2 + n + 1)$ Seiten und $(n^2 + 3n + 2) : 2$ Ecken. Das zugehörige Vielflach F_1 mit z_1 Zellen hat: $f_1 = (n^2 + 4n + 5) : 2$, $e_1 = n^2 + 3n + 2$, $k_1 = 2n^2 + 4n + 3$, $c_1 = (3 + 2n - n^2) : 2$ und innere Lücken $l_1 = (n - 1)^2 : 4$.

2. **Das Scheitelgebiet** S_2 besitzt $z_2 = (n + 1)^2 : 4$ Flächen, nämlich n Dreiecke und im übrigen Vierecke. F_2 mit z_2 Zellen hat daher: $f_2 = (n^2 + 6n + 3) : 2$, $e_2 = n^2 + 3n + 2$, $k_2 = 2n^2 + 4n + 3$, $c_2 = (1 + 4n - n^2) : 2$ und $l_2 = (n - 1)(n - 3) : 4$.

				F_1 einseitig				F_2 zweiseitig							
t	n	z_1	z_2	f_1	e_1	k_1	c_1	f_2	e_2	k_2	c_2	h_1	h_2	l_1	l_2
1	3	3	4	13	20	33	0	15	20	33	2	3	1	1	0
2	5	7	9	25	42	73	— 6	29	42	73	— 2	9	5	4	2
3	7	13	16	41	72	129	—16	47	72	129	—10	19	13	9	6

Durch $n = 2t + 1$ erhält man: Doppelstrecken $d = t(2t + 1)$:

1. $z_1 = t^2 + t + 1$, $f_1 = 2t^2 + 6t + 5$, $e_1 = 4t^2 + 10t + 6$, $k_1 = 8t^2 + 16t + 9$, also: $c_1 = 2(1 - t^2)$, $h_1 = 2t^2 + 1$, $l_1 = t^2$;
2. $z_2 = (t + 1)^2$, $f_2 = 2t^2 + 8t + 5$, $e_2 = 4t^2 + 10t + 6$, $k_2 = 8t^2 + 16t + 9$, also: $c_2 = 2(1 + t - t^2)$, $h_2 = 2t^2 - 2t + 1$, $l_2 = t(t - 1)$.

Daraus folgt: $h_1 - h_2 = 2(l_1 - l_2)$, $h_1 = 2l_1 + 1$, $h_2 = 2l_2 + 1$. Die Zusammenhangszahlen lassen sich also aus der Zahl der inneren Lücken ablesen. Schließlich ist die *Differenz* der *Zusammenhangszahlen* gleich dem Doppelten der Differenz der inneren Lücken.

b) Anzahl n der Schnittebenen gerade. 199 und 204.

1. **Das Scheitelgebiet** S_1 besitzt $z_1 = (n^2 + 4) : 4$ Flächen, bestehend aus einem $(n + 2)$ Eck und $n^2 : 4$ Vierecken mit zusammen $(n^2 + n + 1)$ Seiten und $(n^2 + 3n + 4) : 2$ Ecken. Das zugehörige Vielflach F_1 hat: $f_1 = (n^2 + 4n + 8) : 2$, $e_1 = n^2 + 3n + 4$, $k_1 = 2(n^2 + 2n + 3)$, also: $c_1 = (4 + 2n - n^2) : 2$; $l_1 = n(n - 2) : 4$.

2. **Das Scheitelgebiet** S_2 besitzt $z_2 = n(n + 2) : 4$ Flächen, bestehend aus n Dreiecken und im übrigen aus Vierecken, mit zusammen $n(n + 1)$ Seiten und $n(n + 3) : 2$ Ecken. Das zugehörige Vielflach F_2 hat: $f_2 = n(n + 6) : 2$, $e_2 = n(n + 3)$, $k_2 = 2n(n + 2)$, also: $c_2 = (4n - n^2) : 2$. Innere Lücken: $l_2 = (n - 2)^2 : 4$.

				F_1 einseitig				F_2 zweiseitig							
t	n	z_1	z_2	f_1	e_1	k_1	c_1	f_2	e_2	k_2	c_2	h_1	h_2	l_1	l_2
2	4	5	6	20	32	54	— 2	20	28	48	0	5	3	2	1
3	6	10	12	34	58	102	—10	36	54	96	— 6	13	9	6	4
4	8	17	20	52	92	166	—22	56	88	160	—16	25	19	12	9

Durch $n = 2t$, $t > 1$, erhält man: Doppelstrecken $d = t\,(2t - 1)$:

1. $z_1 = t^2 + 1$, $f_1 = 2\,(t^2 + 2t + 2)$, $e_1 = 2\,(2t^2 + 3t + 2)$, $k_1 = 2\,(4t^2 + 4t + 3)$, also: $c_1 = 2\,(1 + t - t^2)$, $h_1 = 2t^2 - 2t + 1$; $l_1 = t\,(t - 1)$;
2. $z_2 = t\,(t + 1)$, $f_2 = 2t\,(t + 3)$, $e_2 = 2t\,(2t + 3)$, $k_2 = 8t\,(t + 1)$, also: $c_2 = 2t\,(2 - t)$, $h_2 = 2t^2 - 4t + 3$; $l_2 = (t - 1)^2$.

Daher wie für a: $h_1 - h_2 = 2\,(l_1 - l_2)$; $h_1 = 2l_1 + 1$, $h_2 = 2l_2 + 1$.

Aus den beiden Tabellen ist ersichtlich, daß unter h_1, h_2, l_1, l_2 für a und b die nämlichen Zahlenreihen entstehen, aber in 1 und 2 vertauscht und um eine Zeile gegeneinander verschoben. Denn es ist:

$$\underset{a}{c_1} = \underset{b}{c_2}, \text{ wenn } \underset{b}{t} = \underset{a}{t} + 1 \quad \text{und} \quad \underset{a}{c_2} = \underset{b}{c_1} \text{ für gleiche } t.$$

4. **Zweiseitigkeit und Einseitigkeit** der Vielflache F_2 und F_1 sind bedingt durch den Wechsel von Oberseite o und Unterseite u des Netzes an den Oberflächen von miteinander zusammenstoßenden Scheitelzellen, was man am Modell leicht erkennt, wenn die beiden Seiten des Papiers, das man dazu verwendet, unterscheidbar sind.

An F_2 findet dieser Wechsel zwischen den prismatischen Zellen an jeder Doppelstrecke statt, und er ist ersichtlich an der gegenseitigen Lage der z_2 Scheitelflächen im Gebiet S_2. Wird nämlich irgendeine Fläche in S_2 mit o bezeichnet und jede in deren Ecken anstoßende Scheitelfläche mit u, und weiter dann jede an diese anstoßende Fläche wieder mit o usw., so läßt sich diese Bezeichnung fortsetzen, bis alle Flächen von S_2 mit o oder u besetzt sind, so daß nirgends an einer Ecke zwei gleichartige Netzseiten, o mit o oder u mit u zusammenstoßen. Diese Einteilung eines jeden Scheitelflächegebietes S_2 in diese zwei voneinander getrennten Untergebiete O_2 und U_2 der zwei Flächenarten o und u ist nur auf eine Weise möglich, abgesehen von der zulässigen Vertauschung von o und u überhaupt. Daraus folgt die Zweiseitig-

keit von F_2, denn werden die Seitenflächen einer Zelle unter einer Deckfläche o außen auch als o bezeichnet, so wechselt durch die Doppelstrecke für die nächste Zelle die Außenfläche zu u, wie auch die Deckfläche. Es besteht also keine Möglichkeit, trotz der Durchdringungen, von einer Flächenseite o auf die andere u zu gelangen. Dieser an allen Doppelstrecken bestehende Wechsel zwischen o und u an den Außenseiten der Zellen bedingt die Zweiseitigkeit der Vielflache F_2, also derjenigen Vielflache, denen die Hauptzelle über dem $(n + 2)$ Eck fehlt. Die Zweiseitigkeit der einzelnen Zellen wird ungestört auf das ganze Vielflach F_2 übertragen.

Für die Vielflache F_1 hat diese *Hauptzelle* die *Einseitigkeit* zur Folge. Die Flächen in S_1, außer dem $(n + 2)$ Eck, lassen sich ebenfalls zu zwei voneinander getrennten Untergebieten O_1 und U_1 in o und u teilen, so daß immer ein u zwischen zwei o liegt. Daher stoßen an die inneren Ecken des $(n + 2)$ Ecks die innersten $(n - 1)$ Vierecke, in einer Kette in o und u miteinander abwechselnd. Ob nun das $(n + 2)$ Eck zu o oder u gezählt wird, auf jeden Fall stoßen dabei gleichartige Flächen in einem Teil w der Ecken zusammen. Damit wird die Zweiseitigkeit durchbrochen, indem hier Doppelstrecken zu Wendestrecken w von Möbiusbändern werden, so daß hier die Oberseite o des ursprünglichen Netzes mit dessen Unterseite u zusammenfließt.

Um die Anzahl von o und u der Flächen der Gebiete O und U zu bestimmen, hat man in jedem der Scheitelflächengebiete S_1 und S_2 vier Fälle zu unterscheiden nach Modul 4.

I. *Scheitelgebiet* S_1, zerlegt in die Untergebiete O_1 und U_1 für F_1 einseitig, mit $o + u = z_1 - 1$, weil ohne Zählung der Hauptzelle, mit den besonderen Doppelstrecken w als *Wendestrecken:* $w = (n - 1) : 2$ für ungerades n und $w = n : 2$ oder $n : 2 - 1$ für gerades n.

II. *Scheitelgebiet* S_2, zerlegt in die Untergebiete O_2 und U_2 für F_2 zweiseitig, mit $o + u = z_2$, ohne w.

	t	1				2				3				4
	n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
S_1	o	1	3	3	6	6	10	10	15	15	21	21	28	28
z_1-1	u	3	3	6	6	10	10	15	15	21	21	28	28	36
S_2	o	3	3	6	6	10	10	15	15	21	21	28	28	36
z_2	u	3	6	6	10	10	15	15	21	21	28	28	36	36
	s	2	3		4		5		6		7		8	

Allgemein: Die für o und u auftretenden Zahlen sind von der Form $[1 + (s - 1)(s + 2) : 2]$, und ihre Verteilung ist durch folgende Formeln angegeben, in Anordnung nach Modul 4:

$t > o$	n	$4t$	$4t+1$	$4t+2$	$4t+3$
S_1	o	$t(2t-1)$	$t(2t+1)$	$t(2t+1)$	$(t+1)(2t+1)$
	u	$t(2t+1)$	$t(2t+1)$	$(t+1)(2t+1)$	$(t+1)(2t+1)$
S_2	o	$t(2t+1)$	$t(2t+1)$	$(t+1)(2t+1)$	$(t+1)(2t+1)$
	u	$t(2t+1)$	$(t+1)(2t+1)$	$(t+1)(2t+1)$	$(t+1)(2t+3)$

Zusammenfassend: Die durch die n Geraden in der Grundfläche des Würfels erhaltenen Teilflächen zerfallen in zwei, unter sich nur in Ecken zusammenhängende *Scheitelflächengebiete* S_1 und S_2. Dann zerfällt weiter S_2 in zwei *Untergebiete* O_2 und U_2 mit getrennten Flächen, so daß die Flächen von O_2 voneinander getrennt werden durch die Flächen von U_2 und umgekehrt. Dagegen erhält S_1, ebenso eingeteilt in seinen Vierecken, in O_1 und U_1 einen Zusammenhang zwischen diesen zwei Untergebieten durch die Hauptfläche, das $(n + 2)$ Eck, die mit Flächen beider Gebiete in Ecken zusammenhängt. Diesen beiden Arten flächenhafter Beziehungen in ihren Grundflächen entsprechen an den Zellenvielflachen F_2 und F_1 die räumlichen in *Zweiseitigkeit* und *Einseitigkeit*.

Für die räumlichen Beziehungen aber, die zwischen den Flächen des Netzes durch die Aufklappungen zum Vielflach F_1 entstehen, ist noch beizufügen, daß die *Wendestrecken* w unter den Doppelstrecken d nicht für sich allein bestehen

können, daß noch andere Strecken und zwar vorerst anschließende Kanten dazu kommen müssen, damit die gesamten Wendestrecken geschlossene Streckenzüge bilden, hier Rechtecke, die aus den gezeichneten Beispielen ersichtlich sind. Im Falle $n = 4$ ist von den beiden durch $w \equiv 2$ gehenden Schnittebenen die Ebene längs 1 durchgehend, während die Wendung von o zu u in der anderen Ebene stattfindet, so daß im anderen Endpunkt der Kante 1 die gewöhnliche Doppelstrecke 4, die kein w ist, als Wendestrecke, von der unteren Kante 3 kommend, das Rechteck schließt. Im Falle $n = 5$ **202** kommt dies zweimal vor, von $w \equiv 2$ und $w \equiv 8$ aus. Im Falle $n = 6$ **204** sind drei besondere Doppelstrecken w ersichtlich, von denen die beiden äußeren w mit der benachbarten äußeren *Seitenkante* v der Hauptzelle durch Grundkanten auch als Wendestrecken verbunden sind. An einem solchen Wenderechteck ist also nur eine Doppelstrecke w beteiligt, die übrigen Seiten sind zwei Grund- und eine Seitenkante v von F_1. Damit sind die verschiedenen möglichen Fälle für die Rechtecke der Wendestrecke dargelegt. Zwei Doppelstrecken von der Art w können nicht am nämlichen Rechteck vorkommen. Man hat also bei diesen Vielflachen F_1 mit parallelen Doppelstrecken einen Überblick für die Lage der Wendestrecken aus dem Bild der Einteilung der Grundfläche des Vielflaches, während sonst sich die Möbiusbänder erst aus dem Netz durch Aufklappung ergeben.

Zugleich erhält man daraus für den Fall eines *Bündels*[3] von Doppelstrecken einen Einblick in den dort weniger übersichtlichen Zusammenhang. Der prismatischen Hauptzelle aus dem Würfel entspricht dort die innere Pyramide des einseitigen Vielflaches F_1, die auch von allen Schnittebenen eingeschlossen ist. Die Doppelstrecken von ihrer Spitze aus treffen die Seitenflächen des Prismas, welche durch die Spuren der Schnittebenen auch in die Scheitelgebiete S_1 und S_2 geteilt werden. Zu S_1 von F_1 gehören noch die beiden Grundflächen des Prismas, auf denen die sonst getrennten Gebiete O_1 und U_1 ineinander übergehen und die Einseitigkeit von F_1 herbeiführen. Umgekehrt kann jetzt, ohne das Netz zu verwenden, eingesehen werden, warum dort F_2 mit den bei-

den Hohlpyramiden als Lücken trotz der Durchdringungen zweiseitig bleiben muß, nämlich wegen der vollständigen Trennung der Untergebiete O_2 und U_2 auf den Seitenflächen des Prismas[3] und dem Fehlen von anstoßenden Hauptgebieten. Siehe auch **187.**

Aus den Berechnungen folgt die *Einseitigkeit* aus einer *Unbestimmtheit.* Während nämlich für S_2 immer bestimmt $o_2 + u_2 = z_2$ ist, erhält man für S_1 nur $o_1 + u_1 = z_1 - 1$, indem die Zuteilung der Hauptteilfläche, des $(n + 2)$ Ecks, unbestimmt bleibt, ob zu o_1 oder u_1. Erst die Ausführung eines Netzes entscheidet aus den besonderen Annahmen durch die Aufklappung. Dabei können auch w im Inneren entstehen.

5. **Grenzfall.** Die Hauptteilfläche geht für $lim\ n = \infty$ in einen Viertelkreis über, der ungeteilt dicht bleibt. Der übrige Teil des Quadrates wird durchsetzt von Flächenelementen, die abwechselnd zu den Scheitelgebieten S_1 und S_2 gehören, so daß jedes dieser Gebiete für sich eine gelockerte Fläche darstellt. Das Maß der Lockerung an einer bestimmten Stelle wäre zu bestimmen als Verhältnis eines Flächenelementes zu seiner Summe mit einem seitlich benachbarten. Ferner ergäbe sich noch die Zellfeinheit als Verhältnis eines Flächenelementes im Inneren zu einem solchen am Rande. Als bei Prismen übertragen sich diese Verhältnisse auf den Raum. Das Volumen als Summe der körperlichen Zellen eines Teilvielflaches bleibt endlich, während ihre Gesamtoberfläche ins Unendliche wächst.

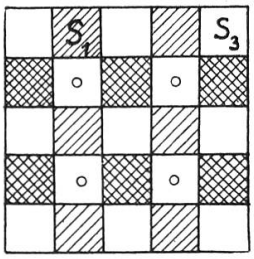
XIV. Würfelroste

1. Einfache Roste.

Ein Quadrat werde in $z = n^2$ gleiche Quadrate eingeteilt. Diese Quadrate lassen sich, wie auf dem Schachbrett, in zwei Scheitelgebiete trennen, deren Quadrate nur in Ecken zusammenstoßen. Für ungerade n **206** entstehen zwei verschiedene Scheitelgebiete S_1 und S_3. S_1 mit z_1 Quadraten sei das

Gebiet ohne die Eckquadrate, S_3 mit z_3 Quadraten sei das mit den vier Eckquadraten. $z_1 + z_3 = z$. Beide Gebiete S_1 und S_3 sind symmetrisch bezüglich der Mittelparallelen des ganzen Quadrates. Für gerade n **208** entstehen zwei gleiche Gebiete S_2, symmetrisch zu den Diagonalen und nach Drehung des einen um den rechten Winkel deckend das andere. Das Gebiet S_2 hat gegenüberliegend nur zwei Eckquadrate und statt der anderen Lücken. $z_2 = z : 2$. Jedes dieser drei Scheitelgebiete S zerfällt in zwei Untergebiete O und U, bestehend aus Quadraten o oder u, von denen die einen durch die anderen getrennt sind. Für n ungerade sind O und U verschieden, z. B. für $n = 3$ besteht S_1 aus $o_1 = 2$ und $u_1 = 2$, dagegen S_3 aus $o_3 = 1$ und $u_3 = 4$. Für n gerade sind beide Untergebiete gleich, für $n = 4$ ist $o_2 = u_2 = 4$. In der nächsten Tabelle sind weitere Zahlwerte enthalten. In **206** sind die Untergebiete durch Schraffur unterschieden oder durch o.

206



Scheitelgebiete S_1 und S_3 mit Untergebieten

Die Zahl der Quadrate jedes Gebietes wird durch folgende Formeln angegeben:

a) n ungerade

$$S_1:\ z_1 = (n^2 - 1) : 2$$
$$o_1 = u_1 = (n^2 - 1) : 4$$
$$S_3:\ z_3 = (n^2 + 1) : 2$$
$$\begin{cases} o_3 = (n - 1)^2 : 4 \\ u_3 = (n + 1)^2 : 4 \end{cases}$$

b) n gerade

$$S_2:\ z_2 = n^2 : 2$$
$$o_2 = u_2 = n^2 : 4$$

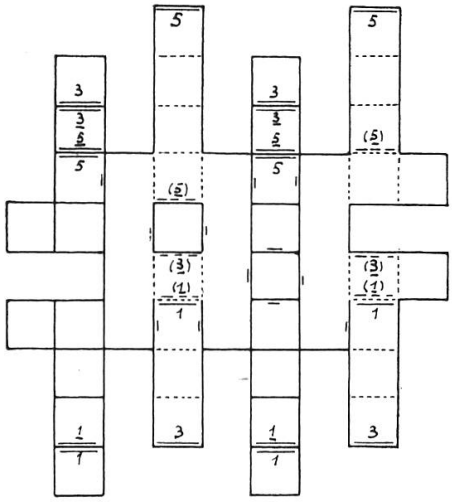
Über jedem der Scheitelgebiete S_1, S_2, S_3 werden auf ihre Quadrate Würfel gesetzt, die in Kanten zusammenstoßen, womit die *Würfelroste* R_1, R_2, R_3 entstehen. Für $n = 3$ z. B. entsteht R_1 mit 4 Würfeln in einem Kreuz, gesetzt um eine innere Würfellücke, und R_3 mit fünf Würfeln, vier an den Ecken des inneren Würfels angeordnet.

Für $n = 4$ besteht R_2 aus acht Würfeln, um zwei innere Würfellücken gesetzt mit sechs Randlücken, so daß alle Lücken zusammen wieder R_2 ausmachen. Allgemein R_1 hat

vier Ecklücken, R_3 hat vier Eckwürfel und R_2 zwei gegenüberliegende Eckwürfel und zwei solche Ecklücken.

Diese Würfelroste sind als *Teilvielflache* zu betrachten, entstanden aus einem quadratischen Quader durch $2(n-1)$ Schnittebenen, je zur Hälfte parallel zu den nämlichen Seitenflächen. Für das Netz eines Würfelrostes können $(n-1)$ parallele Schnittflächen als Rechtecke ganz gelassen werden, während die anderen, von jenen geschnitten, in Quadrate zerlegt werden müssen für die Durchdringungen in den $d = (n-1)^2$ Doppelstrecken. Ein Netz ist hier gezeichnet für $n = 4$ **207**, wie es für weitere Werte von n entsprechend ausgeführt werden kann. Die aus einem solchen Netz entstehenden Würfelroste sind alle *zweiseitig*, weil ihre Flächen Scheitelgebiete sind, in denen ihre Untergebiete O und U je für sich abgeschlossen sind und nirgends ein Übergang über Ecken von Quadraten o zu solchen u stattfindet. Jeder der Würfel zeigt außen ganz entweder die Oberseite o des Netzes oder dessen Unterseite u, diese wechseln in Scheitellage überall miteinander ab, so daß nirgends ein Übergang von o zu u stattfinden kann.

207



Netz R_2 $n = 4$
Wendestrecken zu R_{22}

Folgende Tabellen und Formeln geben die Zahlwerte an für die Elemente der Würfelroste R als Flächen f, Ecken e, Kanten k, Charakteristik c, Zusammenhangszahl $h = 3 - c$ und der inneren Lücken l. Diese l bilden in R für n ebenfalls einen Rost R für $(n-2)$, und zwar findet für ungerade n eine Vertauschung statt, aufeinanderfolgend von R_1 zu R_3 und umgekehrt, während in R_2 auch die inneren Lücken solche Roste bilden.

a. n ungerade

$$R_1: \begin{cases} f_1 = n^2 + 4n - 5 \\ e_1 = 2(n^2 + 2n - 3) \\ k_1 = 4(n^2 + n - 2) \end{cases} \qquad R_3: \begin{cases} f_3 = n^2 + 4n + 1 \\ e_3 = 2(n+1)^2 \\ k_3 = 4(n^2 + n + 1) \end{cases}$$

$$c_1 = -n^2 + 4n - 3 \qquad c_3 = -n^2 + 4n - 1$$
$$h_1 = n^2 - 4n + 6 \qquad h_3 = n^2 - 4n + 4$$
$$l_1 = (n^2 - 4n + 5):2 \qquad l_3 = (n^2 - 4 + 3):2$$
$$h_1 = 2l_1 + 1 \qquad h_3 = 2l_3 + 1$$

b. n gerade

$$R_2: \begin{cases} f_2 = n^2 + 4n - 2 \\ e_2 = 2n^2 + 4n - 2 \\ k_2 = 4n^2 + 4n - 2 \end{cases}$$

$$c_2 = -n^2 + 4n - 2$$
$$h_2 = n^2 - 4n + 5$$
$$l_2 = (n^2 - 4n + 4):2$$
$$h_2 = 2l_2 + 1$$

Für jeden Würfelrost ist somit die Zusammenhangszahl um 1 größer als die doppelte Zahl der inneren Lücken.

Würfelroste R_1 *Würfelroste* R_3

n	z_1	o_1	u_1	f_1	e_1	k_1	c_1	z_3	o_3	u_3	f_3	e_3	k_3	c_3	h_1	h_3	l_1	l_3
3	4	2	2	16	24	40	0	5	1	4	22	32	52	2	3	1	1	0
5	12	6	6	40	64	112	— 8	13	4	9	46	72	124	—6	11	9	5	4
7	24	12	12	72	120	216	—24	25	9	16	78	128	228	—22	27	25	13	11

Würfelroste R_2

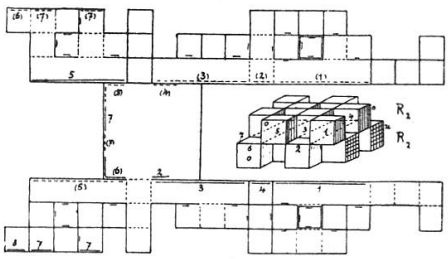
n	z_2	o_2	u_2	f_2	e_2	k_2	c_2	h_2	l_2
4	8	4	4	30	46	78	— 2	5	2
6	18	9	9	58	94	166	—14	17	8
8	32	16	16	94	158	286	—34	37	18

2. Der Würfeldoppelrost.

Um **einseitige Vielflache** zu erhalten, müssen diese zweiseitigen Würfelroste zusammengesetzt werden durch Übereinanderlegen, so daß die Zellen des zweiten Rostes auf die Lücken des ersten passen, also R_1 auf R_3 bei gleichem n und und R_2 auf R_2 um den rechten Winkel gedreht. Dadurch werden alle Quadrate in der entstehenden Mittelebene zu einer Fläche vereinigt, die als neue Schnittebene von den bereits früher angenommenen $2(n-1)$ Schnittebenen in $2(n-1)$ neuen Doppelstrecken geschnitten wird, so daß dieser *Würfeldoppelrost* durch die $(2n-1)$ Schnittebenen zusammen (n^2-1) Doppelstrecken erhält.

In der Zeichnung ist das *Netz eines Doppelrostes* R_{22} für $n = 4$ **208** ausgeführt. Durch die Aufklappung dieses Netzes zum Vielflach entstehen für die Möbiusbänder die Wendestrekken 1, 2, 3, 4 und 5, 6, 7, 8, die zwei Rechtecke in der Mittelfläche bilden; dabei sind 1, 3, 5 zugleich Doppelstrecken, und die übrigen Wendestrecken sind Kanten an der Mittelfläche. In den sechs Endpunkten dieser drei Doppelstrecken 1, 3, 5 stoßen Quadrate des nämlichen Untergebietes zusammen, *o* mit *o* oder *u* mit *u*, wodurch die ursprüngliche Zweiseitigkeit der beiden einzelnen Roste aufgehoben wird, so daß für den Doppelrost Einseitigkeit eintritt. Außer in diesen sechs Ecken stoßen in allen übrigen Endpunkten der Doppelstrecken, an den vier übrigen Gesamtseiten des Doppelrostes, nur Quadrate von *o* mit solchen von *u* zusammen, d. h. Quadrate der Oberseite des ursprünglichen Netzes mit solchen der Unterseite. Auf den Grund- und Deckflächen des Doppelrostes und auf zwei Seitenflächen bleiben also die Untergebiete *o* und *u* getrennt, während sie auf den übrigen zwei gegenüberliegenden Seitenflächen ineinander übergehen, d. h. ein an *o* in einer Ecke anstoßendes Quadrat, das daher *u* sein sollte, ist trotzdem *o*, wodurch überhaupt die beiden Untergebiete ineinander übergehen, also die Oberseite des Netzes mit dessen Unterseite zusammenhängt.

208



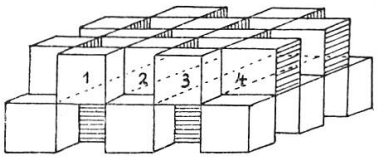
Würfeldoppelrost R_{22} n = 4
Möbiusbänder 1—(1) bis 8—(8)

Statt einen Doppelrost ganz aus einem Netz zu bilden, wie dies soeben beschrieben wurde, können zuerst zwei einzelne zusammenpassende Roste aus ihren Netzen aufgeklappt werden, um sie dann nachträglich zusammenzusetzen. Dieses Verfahren muß eingeführt werden, weil für mehr als zweifache Roste das Gesamtnetz nicht mehr möglich wird, weil für die inneren Quadrate der Schnittflächen keine Anschlußkanten mehr bestehen. Diese Änderung bedingt aber auch eine solche in den Wendestrecken, indem diese nun einzeln als *Doppelwendestrecken* auftreten, indem beide Ebenen, die

durch sie gehen, ihre Ober- und Unterseite des Netzes wenden. Die drei Doppelstrecken 1, 3, 5, im gezeichneten Würfeldoppelrost R_{22} **208** für $n = 4$, als Wendestrecken in der Mittelebene, die dadurch aus vier gegeneinander gewendeten Streifen besteht, werden zugleich als 1_1, 3_1, 5_1 zu Wendestrecken in den zur Mittelebene senkrechten drei Schnittebenen. Dafür fallen die übrigen Wendestrecken, aus Kanten bestehend, weg, so daß eine Doppelwendestrecke ein früheres Rechteck vertritt. Im ersten Netz eines einfachen Rostes R_2 für $n = 4$ **207** sind die beiden Arten von Wendestrecken angegeben, die an ein solches zweites gleiches Netz den Anschluß zur Bildung des Doppelrostes herstellen. Innert eines einzelnen solchen Netzes entstehen beim Aufklappen keine Wendestrecken; erst bei der Verbindung beider Roste sind sie zu ersehen aus der Unterscheidbarkeit der beiden Seiten der Netze, indem man dazu die eine Seite des Zeichnungspapiers etwa liniert nimmt. Damit ist die Zulässigkeit ersichtlich der Zusammensetzung zweier Einzelroste zu einem Doppelrost. Sie hat zugleich, außer der Vereinfachung der Netze, den Vorteil, daß jeder einzelne Würfel für sich gleichartige Außenfläche *o* oder *u* behält, vom einfachen Rost her, und daß die Anordnung der Wendestrecken übersichtlicher wird in Doppelwendestrecken statt in Rechtecken, die noch auf Kanten übergreifen.

Damit ist ferner die Möglichkeit gegeben, an einem aus zwei Einzelrosten zusammengesetzt gedachten *Doppelrost* **209** die Einseitigkeit ohne Verwendung des Netzes zu erkennen, auch wenn die Netzseiten der einzelnen Würfel nicht ersichtlich sind. Aber ein Scheitelgebiet liegt vor in der Gesamtheit der Quadrate der Außenflächen, d. h. abgesehen von den Quadraten, die innen in den Schnittebenen liegen. Nun beginnt man z. B. in der Deckfläche des Doppelrostes mit der Bildung der Untergebiete *o* und *u*, von irgendeinem Quadrat ausgehend; dann wird an einem Rande durch die Würfel, da jeder Würfel für sich

209



R_{13} $n = 5$
Doppelwendestrecken
1, 2, 3, 4

nur gleichartige Flächen hat, die Bezeichnung *o* oder *u* auf eine Seitenfläche übertragen und damit weiter auch auf die Grundfläche und von dieser auf die gegenüberliegende Seitenfläche, wobei geschlossene Untergebiete entstehen. Der Übergang auf die anderen Seitenflächen ergibt aber eine Vereinigung der Untergebiete, indem in jenen Quadrate *o* mit *o* oder *u* mit *u* zusammenstoßen, und zwar sind für n gerade diese beiden Gegenseitenflächen verschieden, für n ungerade beide gleich in der Bezeichnung *o* oder *u*. Also muß für den Doppelrost Einseitigkeit bestehen. Die zwei Einzelroste können auf zwei Arten aufeinandergelegt werden, und es gibt damit zwei Möglichkeiten für den Verlauf der Doppelwendestrecken, als von den Ecken ausgehend, in denen gleichartige Quadrate zusammenstoßen.

Aus der Zusammensetzung der Doppelroste können deren Elemente aus denen der einfachen Würfelroste berechnet werden. Dabei sind die gemeinsam werdenden $2(n-1)$ Schnittebenen nur einmal zu zählen und die in der Mittelfläche aufgehenden n^2 kleinen Quadrate zusammen als nur eine Fläche, als die des großen Quadrates, zu nehmen. Auch die inneren Seiten und Ecken dieser kleinen Quadrate in der Mittelfläche sind abzurechnen, weil sie in Doppelstrecken fallen, die nicht als Kanten zählen.

1. *Doppelrost* R_{13}, n ungerade: 2. *Doppelrost* R_{22}, n gerade:

R_1 auf R_3 gesetzt **209** R_2 gedreht auf R_2 gesetzt **208**

$$\begin{cases} f_{13} = f_1 + f_3 - 2(n-1) \\ \qquad - (n^2 - 1) \\ e_{13} = e_1 + e_3 - 4(n-1) \\ \qquad - 2(n-1)^2 \\ k_{13} = k_1 + k_3 - 4n(n-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} f_{22} = 2f_2 - 2(n-1) - \\ \qquad (n^2 - 1) \\ e_{22} = 2e_2 - (n+1)^2 + 4 \\ \qquad - (n-1)^2 \\ k_{22} = 2k_2 - 4n(n-1) \end{cases}$$

Diese beiden Fälle führen zu den nämlichen Formeln, die also für alle *Doppelroste* gelten, für alle ganzen Zahlen $n > 1$:

$$\left.\begin{cases} f = n^2 + 6n - 1 \\ e = 2n^2 + 8n - 2 \\ k = 4n^2 + 12n - 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} c = 2 - (n-1)^2 \\ h = 1 + (n-1)^2 \\ l = (n-2)^2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} h = \\ l + 2(n-1) \end{matrix}$$

Die *Zusammenhangszahl* eines Würfeldoppelrostes ist also gleich der Anzahl seiner inneren Lücken, vermehrt um das Doppelte der um 1 verkleinerten Ordnungszahl.

Würfeldoppelroste.

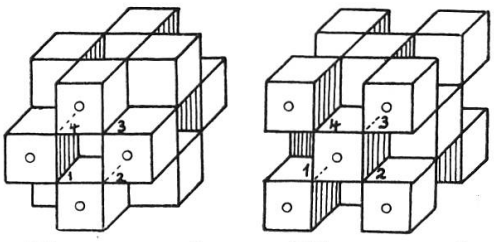
n	f	e	k	c	h	l
2	15	22	36	1	2	0
3	26	40	68	— 2	5	1
4	39	62	108	— 7	10	4
5	54	88	156	—14	17	9

Für $n = 2$ entsteht das schon früher beschriebene 15Flach[4] der «vier Würfel» und für $n = 3$ das aus Prismen mit parallelen Doppelstrecken gebildete 26Flach.

3. Der Würfelrostblock.

Durch Teilung eines Würfels mittelst $3\,(n - 1)$ Schnittebenen in $z = n^3$ Würfel und nach Auswahl einer Gesamtheit von Scheitelwürfeln, die nur in Kanten untereinander zusammenstoßen, entsteht ein *Würfelrostblock,* dessen Lücken zusammen auch wieder einen Block bilden. Ein solcher Block besitzt $3\,(n - 1)^2$ Doppelstrecken und $(n - 1)^3$ dreifache Punkte, welche Schnittpunkte von je drei Doppelstrecken sind. Für n ungerade entstehen zwei verschiedene Blöcke: W_{13} **210** mit $(n^3 - 1) : 2$ Zellen und W_{31} **211** mit $(n^3 + 1) : 2$ Zellen. Für n gerade besteht der Block W_{22} aus $n^3 : 2$ Zellen. Die Blöcke können aus n einfachen Würfelrosten aufgesetzt werden: $W_{13} = R_1 + R_3 + \ldots + R_1$, $W_{31} = R_3 + R_1 + \ldots + R_3$ und $W_{22} = n\,R_2$. Diese je n Roste gleicher Ordnungszahl n lassen sich so mit Zellen auf Lücken aufeinandersetzen, daß im Gesamtscheitelgebiet der Außenflächen des Blockes nach deren Teilung in zwei Untergebiete auf zwei gegenüberliegenden Flächen des gan-

210 **211**



W_{13} $n = 3$ W_{31} $n = 3$

zen Blockes in deren einzelnen Quadraten die Untergebiete o und u nicht mehr getrennt bestehen, indem darin lauter Quadrate gleicher Art in Ecken zusammenstoßen, während auf den übrigen vier Flächenseiten des Blockes die Untergebiete getrennt bleiben. Jeder Block ist also einseitig mit $(n-1)^2$ Doppelwendestrecken, die von denjenigen Ecken zusammenstoßender Quadrate ausgehen, in denen gleiche Seiten o oder u der Netze zusammentreten.

Für die Formeln der Elemente der Blöcke hat man die drei Fälle W_{13}, W_{31}, W_{22} auseinander zu halten. Dazu seien noch bezeichnet: an den Außenflächen die inneren Lücken mit l und im Inneren des Blockes die Hohlwürfel mit v. Die Elemente der Hohlwürfel zählen nicht mit, weil ihre Flächen in Schnittebenen liegen, die als Ganze gezählt werden, und ihre Kanten sind in Doppelstrecken, die überhaupt nicht gezählt werden, wie auch nicht die Ecken, als Schnittpunkte je dreier Doppelstrecken. Diese Elemente entstehen durch die Durchdringungen im Raum und gehören nicht zu den Elementen des Vielflaches als solchem.

In folgenden Tabellen sind Zahlwerte der Elemente angegeben:

W_{13} — Würfelrostblock — W_{31}

n	z_1	f	e	k	c	z_3	f	e	k	c	l_1	h_1	v_1	l_3	h_3	v_3
3	13	30	48	84	—6	14	36	56	96	—4	6	9	0	0	7	1
5	62	84	144	264	—36	63	90	152	276	—34	30	39	13	24	37	14
7	171	162	288	540	—90	172	168	296	552	—88	78	93	62	72	91	63

Würfelrostblock W_{22}

n	z_2	f	e	k	c	h_2	l_2	v_2
2	4	15	22	36	1	2	0	0
4	32	57	94	168	—17	20	12	4
6	108	123	214	396	—59	62	48	32

Allgemein erhält man zu diesen Werten folgende Formeln:

a. n ungerade		b. n gerade
1. $W_{13} : 2z_1 = n^3 - 1$	2. $W_{31} : 2z_3 = n^3 + 1$	3. $W_{22} : 2z_2 = n^3$
$f = 3(n^2 + n - 2)$	$f = 3n(n + 1)$	$f = 3(n^2 + n - 1)$
$e = 6(n^2 - 1)$	$e = 2(3n^2 + 1)$	$e = 2(3n^2 - 1)$
$k = 6(2n^2 - n + 1)$	$k = 6(2n^2 - n + 1)$	$k = 6n(2n - 1)$
$c = -3n^2 + 9n - 6$	$c = -3n^2 + 9n - 4$	$c = -3n^2 + 9n - 5$
$h = 3(n^2 - 3n + 3)$	$h = 3n^2 - 9n + 7$	$h = 3n^2 - 9n + 8$
$l = 3(n^2 - 4n + 5)$	$l = 3(n^2 - 4n + 3)$	$l = 3(n^2 - 4n + 4)$
$h = l + 3n - 6$	$h = l + 3n - 2$	$h = l + 3n - 4$
$2v = (n - 2)^3 - 1$	$2v = (n - 2)^3 + 1$	$2v = (n - 2)^3$

Die *Zusammenhangszahl* eines Würfelrostblockes ist also aus der Anzahl seiner inneren Lücken an den Außenflächen und aus seiner Ordnungszahl linear bestimmt.

Am Block sind außen die *Lücken* an Ecken des ursprünglichen Würfels von drei Quadraten eingeschlossen, die an Kanten von vier und die innert den Flächen, als innere Lücken, von fünf Flächen. Die *Hohlwürfel,* als Lücken mit sechs Flächen im Inneren des Blockes n, entstehen aus den inneren Lücken der inneren Roste. Diese Hohlwürfel bilden zusammen den vorhergehenden Block $(n - 2)$ der betreffenden Art. Weiter treten an Stelle der Hohlwürfel dieses Blockes $(n - 2)$ wieder die Zellen des nächsten Blockes $(n - 4)$, so daß ein Block in sich seine vorhergehenden enthält, abwechselnd gebildet aus Lücken oder Zellen.

Umgekehrt entstehen aus Blöcken n solche immer höherer Ordnung durch fortgesetztes Ansetzen von Scheitelzellen, durch eine Art *Wachstum* aus den äußeren Kanten und zwar über Ecklücken aus zwei Kanten, über Kantenlücken aus drei und über inneren Flächenlücken aus vier Kanten. Dabei sind drei Reihen in der Entwicklung zu unterscheiden, je nachdem man ursprünglich von einem Würfel ausgeht oder von einem Punkt oder von einem Hohlwürfel.

Von einem *Würfel* ausgehend, entsteht mit seinen 12 Scheitelwürfeln an seinen Kanten der Block W_{13} **210** $n = 3$ mit $z_1 = 13$. Dieser Block läßt sich zwischen zwei Roste R_3 $n = 5$, an deren inneren je vier Lücken ansetzen, wodurch 26 neue Zellen dazu kommen. Dann wird in den vier Seiten je ein R_3 $n = 3$ eingesetzt mit zusammen 20 Zellen, und

schließlich kommen noch vier einzelne Würfel an die Seitenkanten, womit mit 63 Zellen W_{31} $n = 5$ gebildet ist. Dieser W_{31} läßt sich über die Lücken von R_1 $n = 7$ setzen, und es entsteht in entsprechender Weise W_{13} $n = 7$. Man erhält also jedesmal bei Zunahme von n ungerade um 2 einen Wechsel des Blockes und damit die Reihe: W_{13} $n = 3$, W_{31} $n = 5$, W_{13} $n = 7, \ldots$ Die Zunahme der Anzahl der Zellen, aus z_1 und z_3 berechnet, ist abwechselnd $\triangle z_1 = 3n^2 + 6n + 1$ oder $\triangle z_3 = 3n^2 + 6n - 1$. Von einem *Hohlwürfel* ausgehend, eingeschlossen von seinen sechs Seitenwürfeln, zu denen noch acht Scheitelwürfel an seinen Kanten kommen, erhält man entsprechend die Reihe W_{31} **211** $n = 3,^7$ W_{13} $n = 5$, W_{31} $n = 7, \ldots$ Diese beiden Reihen ergänzen einander zu sämtlichen W_{13} und W_{31} bei ungeraden n.

Von einem Punkt ausgehend, erhält man die Reihe der R_{22}. Um einen Punkt werden die vier Scheitelwürfel W_{22} $n = 2$ angeordnet. Dieser Block paßt zwischen zwei parallel gegenübergesetzte Roste R_2 $n = 4$ $z_2 = 8$, über je zwei innere Lücken. In die Seiten kommen vier R_2 $n = 2$ mit je zwei Zellen und dazu noch je eine Zelle an den vier Seitenkanten, womit W_{22} $n = 4$ mit $z_2 = 32$ Zellen gebildet ist. Allgemein vermehrt sich z_2 von n auf $(n + 2)$ um $\triangle z_2 = 3n^2 + 6n + 4$, was für den vorhin beschriebenen Fall $\triangle z_2 = 28$ gibt. Für die Reihe der geraden Zahlen entsteht damit die Reihe der Würfelrostblöcke W_{22} $n = 2$, W_{22} $n = 4, \ldots$

Für große Zahlen kann für alle drei Arten von Blöcken die Zunahme beim Wachstum $\triangle z \approx 3n^2 - 6$ angenommen werden mit den kleinen Fehlern $\pm$ 1 oder 4 für Eckwürfel. Für sehr große n genügt unter Weglassung der Würfel an den Kanten $\triangle z \approx 3n^2$, d. h. die Oberfläche des Gesamtwürfels n wird halb dicht mit neuen Zellen besetzt.

Der **Grenzfall** ist somit nach beiden Richtungen zu betrachten, nach der einen Richtung bei der fortgesetzt weitergehenden Teilung eines vorliegenden Würfels an seinen Kanten in je n gleiche Teile für $lim\ n = \infty$, und nach der anderen, von einem Würfel ausgehend, bei unbegrenztem Ansatz neuer Würfel in Scheitellage. Der erste Grenzfall führt von einem räumlich dicht angenommenen Würfel zu einem

halbdichten Würfelrostblock, wobei die Lockerung in der Grenze punktweise benachbart anzunehmen ist. Dabei geht aber schließlich die Würfelform in Punkten verloren, und die Entwicklung in der entgegengesetzten Richtung zurück ist nicht mehr möglich, weil dazu, wenn auch sehr kleine, Würfel nötig sind. Der erste Grenzfall ist also nicht zulässig; es sind nicht unbegrenzt kleine Würfel als möglich zu setzen, sondern es muß angenommen werden, daß nur kleinste Würfel bestehen, entsprechend der Quantentheorie der Physik. Der Raum als solcher ist nicht unbegrenzt teilbar, die kleinsten Raumteile müssen noch solche bleiben; sie dürfen nicht zu Punkten vernichtet werden. Damit sind aus der unbegrenzt angenommenen Teilbarkeit entspringende Widersprüche hier zu vermeiden.

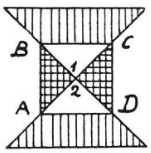
XV. Radiale Scheitelzellenpolyeder

An einem Prisma, senkrecht zu einer regelmäßigen Grundfläche von gerader Seitenzahl, werden durch gegenüberliegende Seitenkanten Schnittebenen gelegt, die einander in der Achse als vielfache Strecke schneiden, in der also die Rechtecke der Achsenschnitte einander durchdringen. Zudem werden noch weitere, aus Rechtecken zusammengesetzte Schnittflächen parallel zu dem Mantel des Prismas gelegt. Diese Teilrechtecke *einer* einen gesamten Umfang als Mantel ausmachenden Schnittfläche stoßen in Doppelstrecken zusammen, welche in den Achsenschnitten liegen. Durch diese Annahme als eine Fläche ist vermieden, daß mehr als zwei Flächen zusammen Strecken am Vielflach bilden. Die radial angeordneten Achsenschnitte und diese, über Vielecken in den Grundflächen des Prismas, parallel zum Mantel verlaufenden Schnittflächen zusammen teilen das Prisma in radial angeordnete Zellen, aus denen je eine Gesamtheit von Scheitelzellen ein Teilvielflach bildet mit Doppelstrecken und einer mehrfachen Strecke in der Achse.

1. **Quadratisches Prisma,** zerlegt **212** in zwei kongruente einseitige **13Flache.** Die drei Schnittflächen bestehen aus den

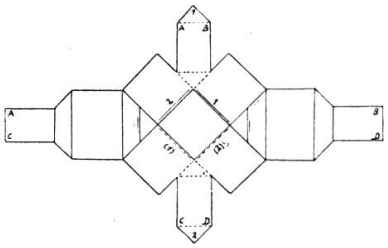
zwei Diagonalebenen und aus den vier Rechtecken, die, zusammen als eine Fläche genommen, die Achsenschnitte in den Doppelstrecken bei *A*, *B*, *C*, *D* durchsetzen. Das 13Flach hat vier Zellen, die in fünf Doppelstrecken zusammenstoßen. Für das Netz **213** ist die Annahme so getroffen, daß jedes Achsenschnittrechteck in zwei Quadrate zerlegt wird, die um ein leeres Quadrat angeordnet sind und die um die punktierten Kanten nach oben, um die übrigen dann nach unten so geklappt werden, daß zuerst (1) und (2) zusammenfallen und in diese dann noch 1 und 2. Dadurch werden als gegenüberliegend 1 und (1) sowie 2 und (2) zu Wendestrecken von Möbiusbändern und 1 ≡ 2, also zu einer *Doppelwendestrecke*, in welcher das Netz zur Einseitigkeit des Vielflachs sich schließt. Die vier Rechtecke an *A B*, *B D*, *D C*, *C A* bilden zusammen die innere Mantelschnittfläche und sind außen am Netz angehängt zur Einklappung in die inneren Lücken *l*.

212



13Flach, einseitig, $n = 4$

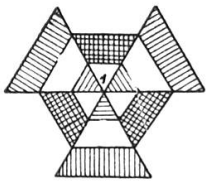
213



Doppelwendestrecke 1 ≡ 2

Das aus vier Flächen bestehende Scheitelgebiet in der Grundfläche zerfällt in zwei aus je zwei Flächen bestehende Untergebiete. In der Mitte stoßen zwei gleichartige Flächen zusammen, womit die Einseitigkeit schon aus den Flächen ersichtlich ist.

214

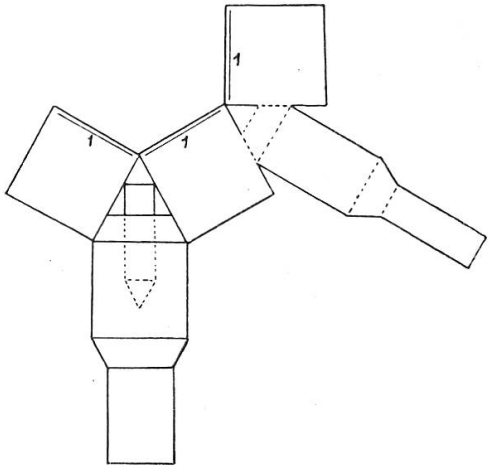


26Flach, zweiseitig, $n = 6$

2. **Sechsseitiges Prisma,** zerlegt in zwei **zweiseitige 26Flache 214** mit neun Zellen und sechs inneren Lücken. Zu den drei Ebenen der Achsenschnitte treten noch zwei Mantelschnittflächen, die längs der inneren Sechsecke verlaufen, in deren Ecken die 12 Doppelstrecken ansetzen. In 1 ist die dreifache Strecke. Im Netz **215** teilweise gezeichnet ist jeder Achsenschnitt durch zwei Quadrate enthalten, so daß sechs Quadrate entstehen um ein leeres Sechseck. Zwischen diesen

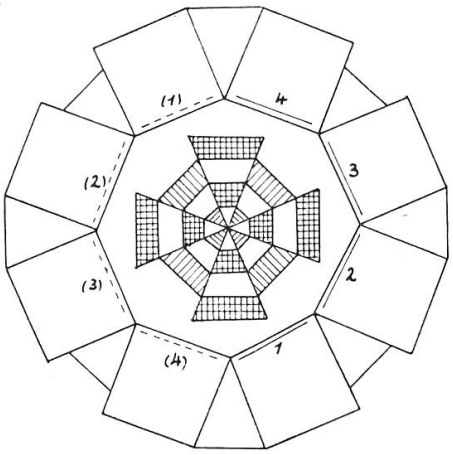
Quadraten sind die Grundflächen eingefügt und an diese die drei äußeren Seitenflächen angehängt sowie die 12 schmaleren Rechtecke, teilweise überdeckt, für die Lücken, als Teile der Mantelschnitte. Die sechs Strecken 1 fallen nach den Klappungen alle in die eine dreifache Strecke der Achse und zwar ohne Bildung von Möbiusbändern, da gegenüberliegende Quadrate mit gleichen Netzseiten zusammenstoßen. Das Scheitelgebiet der Grundfläche, bestehend aus neun Flächen, hat, durch Schraffur unterschieden, als Untergebiete drei und sechs Flächen. In 1 stoßen drei Flächen gleicher Netzseite zusammen.

215



Ergebnis. Durch Zusammenstoßen von drei Flächen des nämlichen Untergebietes bleibt die *Zweiseitigkeit* der Zellen auch am ganzen Vielflach erhalten, indem der drittfolgende Achsenschnitteil gleichseitig an den ersten als gegenüberliegend sich anschließt. Diese Klappungen sind nämlich keine Wendungen, da immer gleiche Seiten abwechselnd in Ober- und Unterseite *o* und *u* des Netzes gegeneinander kommen.

216



43Flach, einseitig, $n = 8$
Vierfache Wendestrecke 1 ≡ 4

3. **Achtseitiges Prisma,** zerlegt in zwei einseitige **43Flache 216** mit 16 Zellen. Vom Netz sind nur die acht Quadrate der Achsenschnitthälften gezeichnet mit den Wendestrecken 1 zu (1) bis 4 zu (4), die durch wechselndes Auf- und Abklappen alle in die eine Achse fallen, und zwar stoßen dabei gegenüberliegende Quadrate mit ungleichen Netzseiten zusammen, wodurch eine vierfache Wendestrecke ent-

steht zur Bildung der Einseitigkeit des 43Flachs. Das Scheitelgebiet der 16 Flächen einer Grundfläche des 43Flachs zerfällt in zwei Untergebiete o und u von je acht Flächen, und in der Mitte stoßen vier gleichartige Flächen zusammen.

Ergebnis. Stoßen Flächen gleichen Untergebietes zentrisch in *gerader* Anzahl an der Achse zusammen, so wird das Vielflach *einseitig*. Dazu muß die Seitenzahl des Prismas ein Vielfaches von 4 sein, damit die Anzahl der Achsenschnitte gerade ist. Bei den Klappungen werden nämlich im Netze nebeneinanderliegende Quadrate der Achsenschnitte mit gleichen Seiten o oder u gegeneinander gekehrt, so daß im Rund nach einer geraden Anzahl von Quadraten ungleiche Seiten an der Achse zusammenstoßen. Am fertigen Vielflach kann durch Einteilung der Grundfläche in die beiden Untergebiete die Art der Seitigkeit bestimmt werden.

Folgende Tabelle gibt die Zahlen der Elemente dieser Vielflache an für gerades $n = 2t$ und bei $(t - 1)$ Mantelschnittflächen.

Radiale Zellenvielflache F

t	n	z	f	e	k	c	h	l
2	4	4	13	18	32	— 1	4	2
3	6	9	26	38	72	— 8	11	6
4	8	16	43	66	128	—19	22	12

4. **Allgemein** für $n = 2t$, $t > 1$ entstehen die Formeln:

$$\overset{F}{z = t^2} \left\{ \begin{array}{ll} f = 2t^2 + 3t - 1 & c = -2t^2 + 3t + 1 \\ e = 4t^2 + 2 & h = 2t^2 - 3t + 2 \\ k = 8t^2 & l = t(t-1) \end{array} \right\} h = 2l - t + 2$$

Für *ungerade* t ist F *einseitig* oder also auch für h ungerade. Untergebiete: $o = t\,(t - 1) : 2$, $u = t\,(t + 1) : 2$. Für t oder h gerade ist F zweiseitig. $o = u = t^2 : 2$. t ist auch die Anzahl der Flächen gleichen Untergebietes an der Achse.

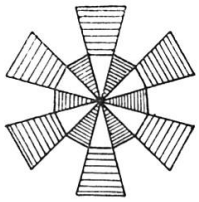
5. **Vereinfachung:** F_0. Außer den t Achsenschnitten werde, statt $(t - 1)$ Flächen, nur noch *eine* Mantelschnitt-

fläche genommen, bestehend aus $n = 2t$ Rechtecken, so daß $2t$ Doppelstrecken entstehen, nebst der $t$fachen Achse.

217 zeigt den Fall $n = 12$ mit einem Teil **218** des Netzes.

Beispiel: $n = 12$, $f = 37$, $e = 50$, $k = 96$, $c = -9$, $h = 12$, einseitig.

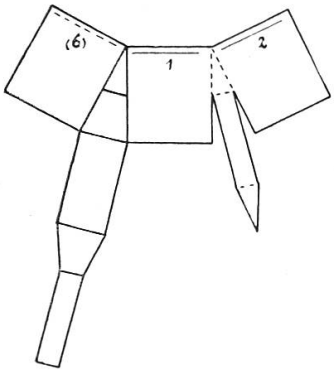
217



37Flach $n = 12$ einseitig vereinfacht $h = 12$

$$F_0 \quad z = 2t \left\{ \begin{array}{ll} f = 6t + 1 & c = -2t + 3 \\ e = 8t + 2 & h = 2t \\ k = 16t & l = t \end{array} \right\} h = 2l$$

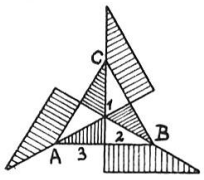
218



Man hat also damit zu jeder geraden Zusammenhangszahl $h = 2t$ ein einfaches radiales Scheitelzellenvielflach, das *einseitig* ist bei *gerader* Anzahl t der Zellen, die an der Achse des Vielflaches zusammenstoßen, das aber zweiseitig ist für t ungerade.

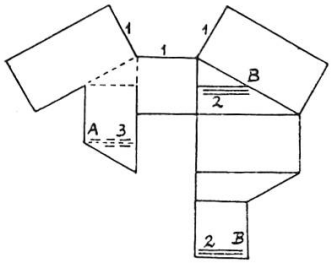
Anmerkung: Für Prismen ungerader Seitenzahl lassen sich die entsprechenden Konstruktionen ausführen, wie **219** für ein 19Flach $n = 3$, mit der Hälfte des Netzes **220** zeigt. Die entstehenden radialen Scheitelzellenvielflache werden dabei alle zweiseitig, da um die Achse 1 immer Zellen in ungerader Anzahl geordnet erscheinen. Doch können aus *zwei* solchen Vielflachen F_1 und F_2, weil nach Drehung die Zellen des einen auf die Lücken des andern passen, *einseitige Vielflache* zusammengesetzt werden, wie **221** zeigt. Dabei entsteht eine durchgehende Mittelfläche aus einzelnen Flächen der beiden Teile, die als neue Schnittfläche zu rechnen ist. Die Zusammensetzung kann dabei auf zwei Arten geschehen. Nimmt man die beiden Netze der einzelnen Vielflache, beide gleichartige nach Ober- und Unterseite, so liegen die entsprechenden *Doppelwendestrecken*, wie z. B. *D E*

219



19Flach $n = 3$ zweiseitig

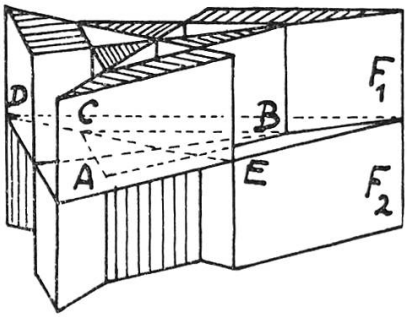
220



Doppelwendestrecken 2 und 3 zum 23Flach

in den Achsenschnitten in der Mittelfläche, in der die Flächenteile sich ebenfalls daran wenden. Außen stoßen dann wie in *E* Flächen gleicher Seite *o* zusammen. Die beiden Netze können aber auch mit gegenseitiger Vertauschung von Ober- und Unterseite gezeichnet werden. Dann fallen die Doppelwendestrecken in den Umfang des Dreiecks *A B C*, also in das Innere der Mantelschnittfläche, und die Wendung findet in dieser statt und zudem in der Mittelfläche. An den Außenflächen stoßen dann nämlich nur ungleiche Untergebiete *o* und *u* zusammen, so daß keine Wendestrecken außen endigen können. Bei Annahme innerer Schnittflächen, wie hier die Mantelschnittflächen, kann also die Seitigkeit des Vielflaches aus den Außenflächen allein nicht ersehen werden.

221



23Flach, $n = 3$, einseitig zusammengesetzt

XVI. Zentrische Zellen und die Kugel

Ein regelmäßiges Achteck werde um die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenseiten als Achse in vier Lagen $2t$ gleichwinklig gedreht. Damit wird ein 26Flach bestimmt mit acht Quadraten im Gürtel, mit nach beiden Seiten daran anstoßenden 16 Trapezen und zwei Achtecken als Deckflächen. Ebenso entsteht für $n = 12$ ein 62Flach mit 12 Quadraten, 48 Trapezen und 2 Zwölfecken. Allgemein entstehen für $n = 4t$ zweiseitige *Vielflache F* mit:

$$\begin{matrix} F \\ c = 2 \end{matrix} \begin{cases} f = 8t^2 - 4t + 2 \\ e = 8t^2 \\ k = 16t^2 - 4t \end{cases}$$

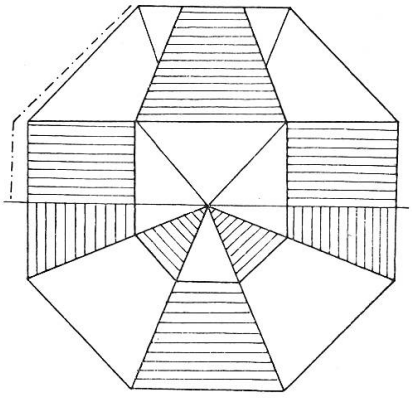
t	n	f	e	k
1	4	6	8	12
2	8	26	32	56
3	12	62	72	132

Durch *lim* $t = \infty$ wird als Grenzfall die Kugel erhalten.

Diese der Kugel sich annähernden Vielflache F werden in zwei kongruente *einseitige Teilvielflache* F_1 zerlegt durch die Achsenschnitte der regelmäßigen n Ecke und durch die Pyramidenmantelflächen, die von der Mitte des Vielflachs nach den Kanten gehen, die in parallelen Ebenen liegen, senkrecht zur Achse. Die von der Mitte aus beidseitig sich ausdehnenden Mantelteile gelten zusammen als eine Fläche, so daß für $n = 8$ z. B. 16 Dreiecke zur nämlichen Schnittfläche gehören, welche die Achsenschnitte in acht Doppelstrecken durchsetzt. Die Achse ist als Durchdringung aller Achsenschnitte vielfache Strecke.

1. **Das zweiseitige 26Flach** für $n = 8$, zerlegt in zwei **einseitige 26Flache 222** durch die vier Achsenschnitte und durch zwei Mantelflächen. Die beiden Deckflächen als Achtecke werden je in acht Dreiecke zerlegt, und es entstehen an der Oberfläche 40 Flächen, die in zwei Scheitelgebiete von je 20 Flächen zu trennen sind, mit Untergebieten von 8 und 12 Flächen, wobei an den Polen je vier Dreiecke gleichen Untergebietes zusammenstoßen, sonst aber in jeder Ecke nur zwei Flächen ungleichen Untergebietes. Ein solches Scheitelgebiet bestimmt mit 20 Zellen, darunter vier nach der Mitte, ein einseitiges 26Flach, indem noch die sechs Schnittflächen zuzurechnen sind. Dieses 26Flach hat ebenfalls 20 Lücken, wie die Zellen an den 16 Doppelstrecken in Scheitellage und an der Achse als vierfache Strecke.

222

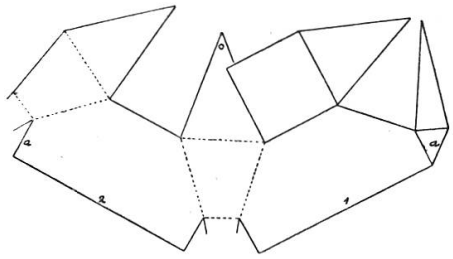


26Flach, $n = 8$, einseitig

Für das *Netz* **223** sind die vier Achsenschnitte in der Achse halbiert und die beiden Mantelflächen in ihre 32 gleichschenkligen Dreiecke von zwei Formen zerlegt. Zwischen zwei halbe Achtecke sind abwechselnd Trapeze und kleine Dreiecke von den Deckflächen gelegt, so daß eine

Kette von acht Gliedern entsteht, von denen nur zwei gezeichnet sind. An Mittelseiten von Achteckhälften kommen abwechselnd Quadrate des Gürtels und seitlich Trapeze und an beide noch Manteldreiecke, die teilweise überdecken. Beim wechselnden Auf- und Abklappen schließen die Mittellinien 1 bis 4 mit (1) bis (4) Möbiusbänder, so daß die Achse zur vierfachen Wendestrecke wird. Die Dreiecke der Mantelschnittflächen kommen gleichseitig nebeneinander, doch entsteht eine Wendung im Mittelpunkt von einer Mantelfläche zur anderen.

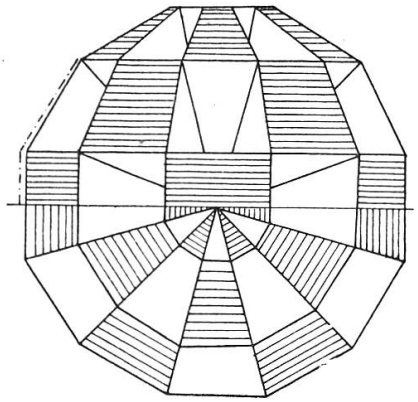
223



Zum Netz des 26Flachs

2. Das **62Flach** für $n = 12$ zerlegt in zwei **einseitige 51Flache 224** durch sechs Achsenschnitte und drei Pyramidenschnitte. Die Gesamtoberfläche hat 84 Flächen und ein Scheitelgebiet daraus 42 Flächen, zu denen 42 Zellen gehören. Die Untergebiete bestehen aus 18 und 24 Flächen. In den Polen stoßen sechs flächengleiche Untergebiete zusammen, wodurch die Achse als sechsfache Wendestrecke zu erkennen ist, so daß darin sich sechs Möbiusbänder schließen. Für das Netz **225** sind die Zwölfecke der Achsenschnitte halbiert und je zwei der Hälften an die Gegenseiten eines Quadrates angesetzt und dann durch kleine Dreiecke der Deckflächen verbunden zu einer sechsgliedrigen Kette, von der nur zwei Glieder gezeichnet sind mit angehängten übrigen Flächen. Die drei Mantelschnittflächen liefern 72 Dreiecke in drei Arten.

224



51Flach, $n = 12$ zentrische Zellen

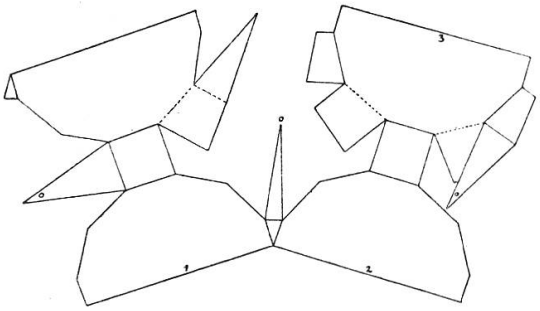
3. **Allgemein** für $n = 4t$ erhält man für die *einseitigen* Vielflache F_1 folgende Elemente:

$$F_1 \begin{cases} f_1 = 4t^2 + 5t & h = 4t^2 - t + 1 \\ e_1 = 8t^2 + 2 & z = 4t^2 + 2t \\ k_1 = 16t^2 + 4t & h = z - 3t + 1 \\ c = -4t^2 + t + 2 & l = z \end{cases}$$

t	n	f_1	e_1	k_1	c_1	h	z
1	4	9	10	20	—1	4	6
2	8	26	34	72	—12	15	20
3	12	51	74	156	—31	34	42

Die *Zusammenhangszahl* eines zentrischen Zellenpolyeders ist also linear abhängig von der Ordnungszahl und von der Anzahl der Lücken. Im *Grenzfall* $\lim t = \infty$ erfüllt eines der Teilvielflache in der Kugel einen zentrisch strahlenförmig halb gelockerten Raumteil.

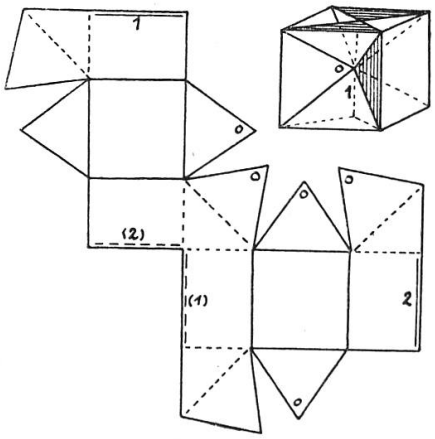
225



Zum Netz des 51Flachs

4. **Vereinfachung** für den Fall $t = 1$ durch Rückführung aus den vorigen Formeln. Aus dem 6Flach erhält man zwei *einseitige 9Flache* **226.** Dieser Fall läßt sich auf den Würfel anwenden, indem man zwei der Diagonalrechtecke als die beiden Achsenschnitte nimmt. Dadurch erhält man eine interessante Zerlegung des Würfels, auf die man sonst nicht so leicht gekommen wäre. Die weitere dritte Schnittfläche ist der Mantel der Pyramide von der Mitte des Würfels zu den beiden Quadraten senkrecht zur Achse. Durch die vier Würfel-

227 226



9Flach mit 6 Zellen

diagonalen gehen damit eigentlich je drei Flächen, da sie aber keine Kanten bilden, sondern Doppelstrecken, so können die vier Teile dieses Mantels als eine Schnittfläche für die Zerlegung des Würfels betrachtet werden. Das entstehende 9Flach hat an fünf Doppelstrecken sechs Zellen: zwei vierseitige Pyramiden über zwei Gegenflächen des Würfels und vier dreiseitige Pyramiden über Vierteln von Würfelflächen. Das gezeichnete Netz gibt nach der Aufklappung die Achse $1 \equiv 2$ als Doppelwendestrecke und den Schnitt der Würfeldiagonalen als Wendepunkt für die Netzseiten o und u in der Mantelschnittfläche. In den Endpunkten der Achse stoßen je zwei Dreiecke des gleichen Untergebietes o zusammen, das also aus vier Flächen besteht, während das andere u aus den ganzbleibenden zwei Würfelflächen gebildet wird. Dieses 9Flach hat diese sechs Außenflächen und die drei Schnittflächen. Jede Zelle für sich ist ganz von der nämlichen Netzseite begrenzt, vier von o und zwei von u. Der Würfel zerfällt in zwei deckungsgleiche solche 9Flache.

E. Doppelstrecken in Polyederkanten

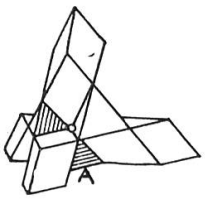
XVII. Innenpolyeder und Hohlpolyeder

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten die Schnittebenen in Bündeln oder Büscheln durch die gegebenen konvexen Polyeder gelegt wurden, sollen sie auch noch so angenommen werden, daß sie ein dazu inneres konvexes Polyeder einschließen. Dabei seien die Schnittebenen parallel zu Flächen des ursprünglichen Polyeders gelegt und zwar vorerst zur Vorbereitung nur durch einen inneren Punkt O, von dem aus dann die Ebenen verschoben werden.

1. **Tetraeder** in einseitiges **16Flach** und zweiseitiges **20Flach** zerlegt, um einen 6fachen Punkt O. Durch das regelmäßige Tetraeder gehen durch seinen Schwerpunkt O die vier Schnittebenen parallel zu dessen Flächen. Die vier Ebenen schneiden einander in $d = 6$ Doppelstrecken durch O und

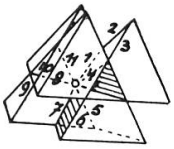
zerlegen den Rauminhalt des Tetraeders in 14 Zellen $z = 2(d + 1)$. In jeder dieser Ebenen entsteht als Schnittfläche ein Dreieck mit drei Doppelstrecken durch O. Jede Fläche des Tetraeders **228** und **229** wird in sieben Teile zerlegt: in ein inneres Dreieck, an dessen Seiten drei Trapeze anliegen und in dessen Ecken drei Rauten anstoßen. Von diesen 28 Flächen bilden die inneren Dreiecke und die Rauten das eine Scheitelgebiet von 16 Flächen, die mit den vier Schnittflächen das 20Flach **228** zusammensetzen, bestehend aus acht Zellen: vier Tetraedern um O und vier Sechsflachen, mit Rauten nach den Ecken. Im Netz **232** sind um das innere Dreieck *(A)* der Grundfläche drei Dreiecke als Teile von Schnittflächen angefügt, die aufgeklappt die mittlere Zelle über A mit der Spitze in O ergeben. Die übrigen Teile der Schnitte sind Trapeze und Rauten mit je einer Ecke, die auch in O fällt. Die übrigen 12 Rauten und vier Dreiecke geben die äußeren Flächen der Zellen. Die vier Eckzellen zeigen nach der Aufklappung die nämliche eine Netzseite, und die vier Mittelzellen die andere. Damit besteht an allen Doppelstrecken ein Wechsel der Netzseiten, so daß die Zweiseitigkeit der Zellen auch am ganzen 20Flach erhalten bleibt. $f = 20$, $e = 28$, $k = 48$, $c = 0$, $h = 3$.

228



20Flach

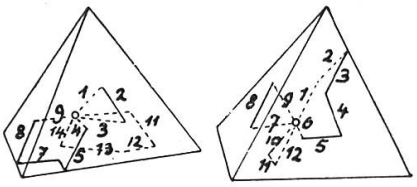
229



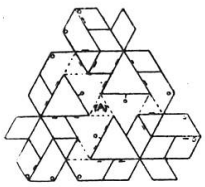
16Flach

Das einseitige **16Flach 229** besteht aus sechs deckungsgleichen Zellen, als 6Flache mit zwei Trapezen, zwei Rauten und zwei Dreiecken. Sie haben drei parallele Kanten und eine in O liegende Spitze, nach der Doppelstreckenhälften als vier Kanten gehen. In den drei ausgeführten Netzen sind die Trapeze, die zu zweien ein Sechseck bilden, äußere Flächen dieser Zellen, während die übrigen Flächen Teile der inneren Schnittdreiecke sind. Im Netz **234** sind drei Schnittdreiecke je in Trapez und Dreieck zerlegt, und das vierte ist durch die drei Doppelstrecken in drei Dreiecke und drei Rauten geteilt.

230 231



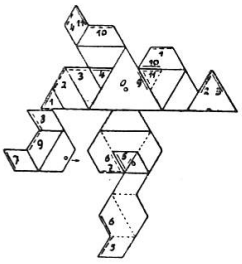
Wendestrecken



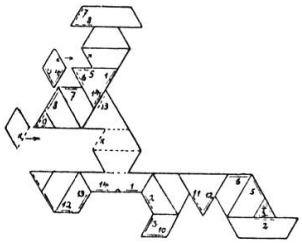
232

Durch Aufklappung entstehen 14 Wendestrecken **230**, die von *O* aus ein Dreieck 1, 2, 3 bilden, ein Sechseck 4 bis 9 und ein Fünfeck 10 bis 14; davon sind je die erste und letzte der Strecken halbe Doppelstrecken, und die übrigen acht sind Kanten. Im Netz **235** ist aus drei Schnittdreiecken je eine Raute geschnitten, wie bei 9 und 10, so daß diese Teile durch die Aufklappung ineinander verschränkt werden und den Hauptteil des 16Flachs bestimmen, an den noch die drei Trapeze des vierten Schnittdreiecks kommen. Durch die Wendestrecken entstehen **231** ein Sechseck 1 bis 6 und zwei Dreiecke 7, 8, 9 und 10, 11, 12. Im Netz **233** ist eines der Schnittdreiecke mit *O* ganz gelassen, weshalb die anderen in Rauten zerfallen. Die Wendestrecken bilden **229** zwei Vierecke 1 bis 4 und 8 bis 11 und ein Dreieck 5, 6, 7. Von den Zellen zeigen vier die Oberseite des Netzes und zwei, die an 5 und 6, die Unterseite. $f = 16$, $e = 24$, $k = 48$, $c = -2$, $h = 5$.

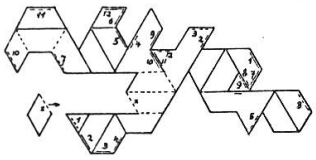
233



234

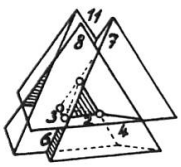


235



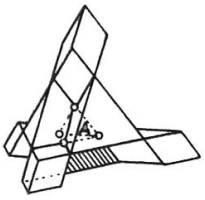
2. **Tetraeder** mit **Innentetraeder**, in einseitiges **16Flach 236** und zweiseitiges **20Flach** 237 zerlegt. Die vier Schnittebenen, in gleichen Abständen von den Flächen, schließen das innere Tetraeder ein, dessen Kanten, verlängert bis zum äußeren, die sechs Doppelstrecken bilden mit vier dreifachen Punkten in den Ecken. Die vier Ebenen zerlegen das Tetraeder in 15 Zellen, von denen das 16Flach sieben Zellen umfaßt: das innere Tetraeder und seine sechs Scheitelzellen über den Kanten. $f = 16$, $e = 24$, $k = 42$, $c = -2$, $h = 5$. Das

236



16Flach mit Innentetraeder

237

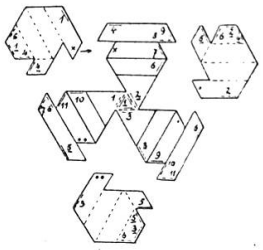


20Flach mit Hohltetraeder

20Flach hat über den Flächen des als Lücke geltenden inneren *Hohltetraeders* vier mittlere Zellen und dazu noch vier Eckzellen mit Rauten, also acht Zellen. $f = 20$, $e = 28$, $k = 48$, $c = 0$, $h = 3$.

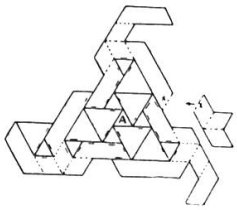
Das Netz **238** des 16Flachs ist um die Grundfläche 1, 2, 3 des *inneren Tetreaeders* angeordnet; an dieses Dreieck schließen sich Teile der Seitenflächen an, die aufgeklappt jenes Tetraeder bilden. Daran sind Trapeze angefügt, wie bei 6 und 7, der äußeren Flächen von drei seitlichen Zellen. Die Trapeze für die unteren Zellen sind wie bei 2 und 6 herausgerückt wegen Überdeckung. Durch die Aufklappung entstehen sechs Doppelwendestrecken $1 \equiv 1_1$ bis $6 \equiv 6_1$ und vier einfache Wendestrecken 7 bis 10. Diese liegen oben, und die daranstoßenden Trapeze zeigen die Unterseite des Netzes, während die drei unteren Zellen wie bei 6 die Oberseite zeigen. In $2 \equiv 2_1$ wenden z. B. beide durch 2 gehenden Schnittflächen ihre Netzseiten.

238



Das Netz **239** des 20Flachs ist entsprechend um *A* angeordnet. Die leeren Dreiecke im Netz sind durch kurze Striche umgeben, die Rand andeuten. Je drei zusammenstoßende Rauten gehören zu den vier Eckzellen. Diese zeigen **237** die Unterseite des Netzes, die mittleren Zellen aber die Oberseite, so daß die zusammenstoßenden Zellen überall die Netzseiten wechseln an den Doppelstrecken, wodurch die Zweiseitigkeit eintritt. Das Hohltetraeder hat innen die Unterseite des Netzes. Alle Randkanten des Netzes schließen sich mit gleicher Netzseite.

239

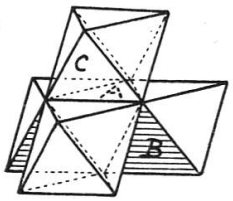


3. **Tetraeder** zerlegt in **4 Oktaeder** und **11 Tetraeder.** Die besondere Anordnung der Schnittebenen wird hierzu erhalten, indem man die Kanten des Tetraeders je in drei gleiche Strecken teilt und die acht Ebenen legt, die je durch drei Teilpunkte parallel zu Flächen gehen. Dadurch wird jede Tetraederfläche in neun Dreiecke zerlegt. An den

sechs Dreiecken der Kanten liegen Tetraeder, und an den inneren drei Dreiecken Oktaeder. Auf der Grundfläche des ursprünglichen großen Tetraeders liegen damit sechs kleine Tetraeder und zwischen ihnen drei Oktaeder, zwischen denen noch eine Lücke bleibt für ein inneres Tetraeder. Damit hat diese unterste Schicht sieben Tetraeder und drei Oktaeder. Auf dem inneren Tetraeder liegt in der zweiten Schicht noch ein Oktaeder, von drei Tetraedern umgeben, und darauf ist noch ein Tetraeder aufgesetzt.

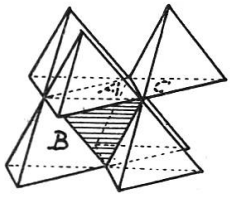
Die vier Oktaeder für sich in Scheitellage zueinander bilden ein *20Flach* **240,** bestehend aus 16 Oktaederdreiecken und vier Schnittdreiecken doppelter Seite. Die vier Oktaeder umschließen als innere Lücke ein *Hohltetraeder,* dessen Kanten die sechs Doppelstrecken sind und dessen Ecken als dreifache Punkte in die Flächen des ganzen Tetraeders gerückt sind. $f = 20$, $e = 16$, $k = 36$, $c = 0$. Das Hohltetraeder ist in Scheitellage zu den sechs äußeren Lücken, in welche Tetraeder passen. Das Netz **242** dieses 20Flachs kann um eine Fläche A des Hohltetraeders angeordnet werden, die im Innern eines Schnittdreiecks zwischen Doppelstrecken liegt. An A ist eine Raute B angesetzt, als Teil eines anderen Schnittdreiecks, mit angefügten sechs Oktaederdreiecken. So lassen sich an A die drei unteren Oktaeder B anfügen. Für das obere Oktaeder sind seine Flächen C an die Seite x von B noch anzusetzen. Dieses 20Flach wird zweiseitig. Alle Oktaederflächen zeigen außen die Oberseite des Netzes, und nur im Inneren des Hohltetraeders ist die Unterseite, indem in den Doppelstrecken der Wechsel der Netzseiten stattfindet, ohne Wendestrecken. Dieses 20Flach zeigt daher trotz der sechs Doppelstrecken überall die nämliche Netzseite außen.

240



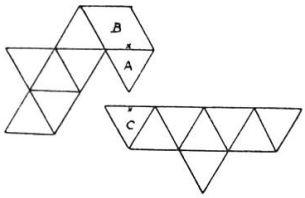
20Flach der 4 Oktaeder mit Hohltetraeder

241



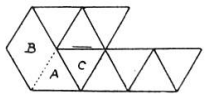
16Flach der 7 Tetraeder

242



Das *16Flach* der sieben Tetraeder **241** besteht aus dem inneren Tetraeder als Mittelzelle und aus den, an dessen Kanten in Scheitellage liegenden sechs Tetraedern, zwischen denen vier Lücken sind für Oktaeder. $f = 16$, $e = 16$, $k = 30$, $c = 2$, $h = 1$. Die Flächen bestehen aus 12 Dreiecken der kleinen Tetraeder und vier Schnittdreiecken doppelter Seite. Das Netz **243** läßt sich wieder um A anordnen, mit Rauten B für die unteren drei Tetraeder und mit Dreiecken C für die oberen, wobei die drei Rauten B je zwei Dreiecke überdecken. B ist entgegengesetzt zu klappen als die anderen Flächen. Dieses 16Flach wird ebenfalls zweiseitig; das mittlere Tetraeder zeigt die Netzunterseite, während die übrigen Tetraeder die Oberseite zeigen, indem in den sechs Doppelstrecken diese Seiten wechseln. Damit stoßen in den dreifachen Punkten drei Flächen gleicher Netzseite zusammen.

243



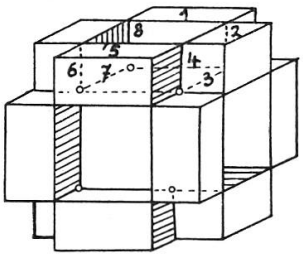
In den beiden vorigen Fällen des 20Flachs und des 16Flachs sind die vier Ecktetraeder weggelassen. Sie können beibehalten werden, indem man nur die vier inneren Schnittebenen nimmt. Dann tritt an Stelle des 20Flachs auch ein 16Flach, zusammengesetzt aus vier 7Flachen, je mit drei Rauten und vier Dreiecken, indem auf jedes Oktaeder ein Tetraeder gesetzt ist. $f = 16$, $e = 20$, $k = 36$, $c = 0$, $h = 3$. Die Zahl der Kanten bleibt erhalten, indem die drei Seiten der vier früheren Dreiecke durch die drei Kanten nach den Spitzen der vier aufgesetzten Tetraeder ersetzt werden.

4. **Würfel** mit **Innenwürfel** zerlegt in **30Flach** und **36Flach,** beide einseitig. Die sechs Schnittebenen liegen parallel zu Würfelflächen in gleichen Abständen und schließen den Innenwürfel ein. Der Würfel wird dadurch in 27 Zellen zerlegt, von denen 13 Zellen das 30Flach **244** bilden, nämlich der Innenwürfel und an dessen Kanten 12 Zellen in Scheitellage, während das 36Flach **245** aus 14 Zellen besteht, sechs Zellen, die den Hohlwürfel einschließen und acht Zellen an dessen Ecken. In den sechs Schnittflächen sind je vier Doppelstrecken, welche die Quadrate des Innenwürfels einschließen,

dessen Ecken acht dreifache Punkte sind. $f = 30$, $e = 48$, $k = 84$, $c = -6$; $f = 36$, $e = 56$, $k = 96$, $c = -4$.

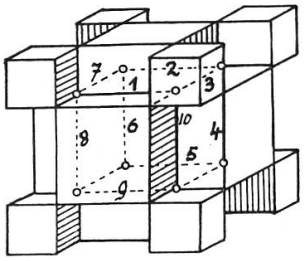
Für die Netze sind zwei parallele Schnittquadrate E_1 und E_2 ganz gelassen, und daran sind Außenflächen angesetzt, an welche die Teile der übrigen vier Schnitte als Rechtecke angefügt sind. Da Flächen im Netz einander überdecken, sind einzelne Teile auseinander gerückt, und ihr Zusammenhang ist durch x oder v angedeutet. Aus dem Netz **246** entstehen am 30Flach 16 Wendestrecken, die zwei einander gegenüberliegende gleiche räumliche Achtecke bilden, wie das eine 1 bis 8 **244**, mit Kanten 1 und 5 und im übrigen mit Doppelstrecken. Die vier oberen Zellen zeigen die Unterseite des Netzes, wie auch die unteren Zellen, während die vier dazwischen stehenden die Oberseite weisen. Aus dem Netz **247** entstehen 10 Wendestrecken am 36Flach **245**, von denen 1 und 2 Doppelwendestrecken sind, zwischen denen 3 bis 10 ein geschlossenes Achteck bilden. Die acht Eckwürfel zeigen die eine Netzseite und die übrigen Zellen die andere, so daß aus diesem Wechsel die Einseitigkeit außen nicht er-

244



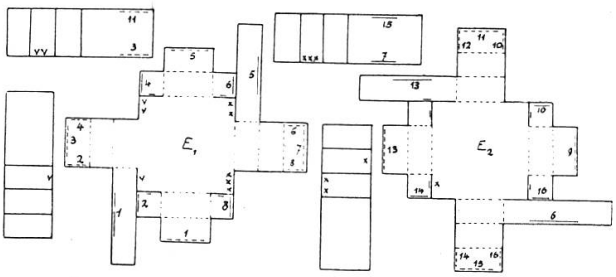
30Flach mit Innenwürfel

245

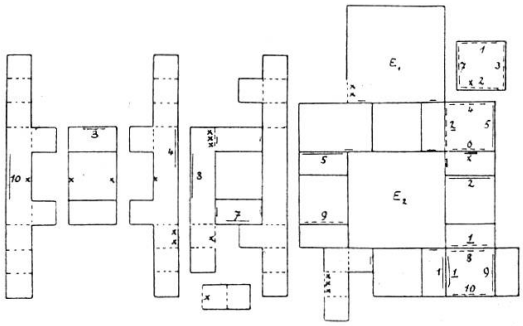


36Flach mit Hohlwürfel

246



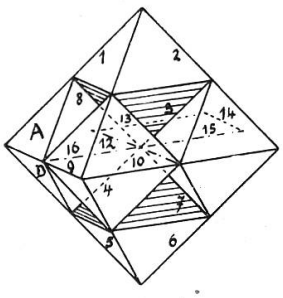
247



kennbar ist, weil die Doppelwendestrecken im Innern liegen. An der Innenseite des Hohlwürfels finden sich die Netzseiten zusammenhängend, als Ersatz für die Außenseite. Diese beiden Vielflache sind auch beim Würfelrostblock angegeben, aber ohne diese beiden einheitlichen Netze.

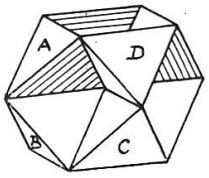
5. **Oktaeder,** zerlegt in **12Flach** und **28Flach** durch vier Ebenen durch *O*, parallel zu den Flächen. Diese Ebenen schneiden vier Sechsecke heraus, die einander in sechs Doppelstrecken durchdringen, welche die Mitten von Gegenkanten verbinden und einander im sechsfachen Punkt *O* schneiden. Die Ebenen teilen das Oktaeder in sechs Oktaeder und acht Tetraeder, als in 14 Zellen.

248



28Flach der 6 Oktaeder

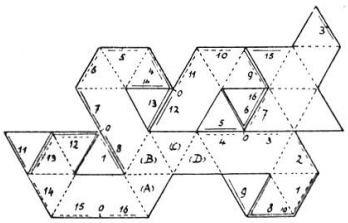
249



12Flach der 8 Tetraeder

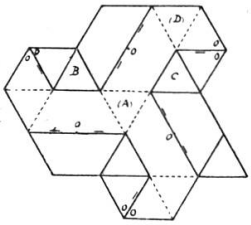
Das *28Flach* **248** setzt sich aus den sechs Oktaedern zusammen, zwischen welche acht Tetraeder in die Lücken passen, und es besteht aus 24 Dreiecken und vier Sechsecken. $f = 28$, $e = 18$, $k = 48$, $c = -2$. Im Netz **250** sind an die Flächen *A*, *B*, *C*, *D* einer Ecke je die Hälften von Schnittsechsecken angefügt, die aufzuklappen sind, bis die vier *O* zusammenfallen, worauf in gleicher Weise auch die übrigen Flächen eingeklappt werden können. Dazu sind die übrigen Hälften der Sechsecke in Rauten und Dreiecke geteilt, wobei im Netz viermal zwei Dreiecke mit Doppelrand, überdecken. Durch die Aufklappung entstehen 16 Wendestrecken, die am 28Flach vier Quadrate einschließen, von denen je zwei gegenüberliegende zusammen ein überschlagenes Sechseck bilden, wie 1, 2, 3—4, 5, 6, 7—8 mit *O* als Doppelpunkt, der damit vierfach wird. Die Zelle *A* wie auch ihre Gegenzelle zeigen *u* des Netzes, und die übrigen vier Zellen zeigen zur einen Hälfte *o* und zur anderen *u*.

250



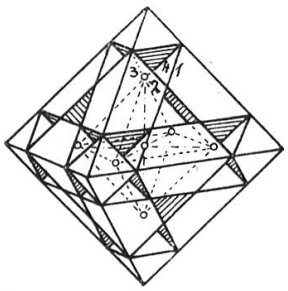
Das *12Flach* **249** der acht Tetraeder besteht aus acht Dreiecken und vier Sechsecken.[11] Seine sechs Lücken sind vierseitige Trichter von Kantenquadraten aus. Schließt man diese Lücken durch die sechs Quadratflächen ab, so entsteht ein 14Flach des Archimedes. Im Netz **251** sind um *(A)* drei Hälften von Sechsecken angefügt, die aufzuklappen sind, bis die drei *O* zusammenfallen. Das vierte Sechseck ist in vier Dreiecke mit *O* geteilt, die zwischen die ersten drei Sechsecke sich einfügen. Alle Netzränder schließen sich gleichseitig. Die acht Tetraeder wechseln an allen Doppelstrecken ihre Netzseiten, so daß auch an den äußeren Dreiecken als an zwei getrennten Untergebieten die Zweiseitigkeit ersichtlich ist. $f = 12$, $e = 12$, $k = 24$, $c = 0$.

251



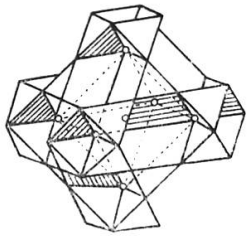
6. **Oktaeder,** zerlegt in einseitiges **56Flach** und zweiseitiges **40Flach 252** und **253.** Die acht Schnittebenen sind parallel zu den Flächen des Oktaeders in gleichem Abstand gelegt, so daß sie ein *Innenoktaeder*[7] umschließen. Jede Oktaederfläche wird in ein inneres Dreieck, umgeben von drei Trapezen, geteilt, neben denen noch zwei Dreiecke gegen jede Ecke liegen, so daß 80 Flächen entstehen. Die Trapeze und die Eckdreiecke bilden das eine Scheitelgebiet von 48 Flächen, die mit den acht Schnittsechsecken wie *A* in **254** das 56Flach bilden. Die übrigen 32 Dreiecke gehören zum 40Flach. Das Oktaeder zerfällt damit in 51 Zellen $z = 2\,(d + 1) + 1$, wo $d = 24$ die Anzahl der Doppelstrecken ist. Außer den 12 Kanten des Innenoktaeders gehen durch jede Ecke, als sechsfacher

252



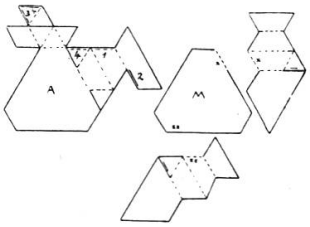
56Flach mit innerem Oktaeder

253



40Flach mit Hohloktaeder

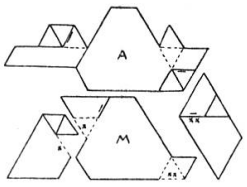
254



Punkt, noch je zwei Doppelstrecken parallel zu Kanten. Dieses Oktaeder gehört zum *56Flach* als innere Zelle, über deren Kanten die 12 Zellen mit den Trapezen liegen und über dessen Ecken sechs Zellen als kleine Oktaeder angesetzt sind in Scheitellage zu den seitlichen Zellen, was zusammen seine 19 Zellen ausmacht. Am *40Flach* dagegen ist das innere Oktaeder als Lücke oder *Hohloktaeder* zu nehmen, da es in Scheitellage zu den 18 äußeren Lücken ist. Über den Flächen dieses Hohloktaeders sind acht Zellen in Form von Pyramidenstumpfen, die je von drei Tetraedern umgeben sind, so daß 32 Zellen bestehen. Je vier solcher Tetraeder schließen Lücken ein in Eckenscheitellage zum Hohloktaeder. $f = 56$, $e = 54$, $k = 124$, $c = -14$, $h = 17$; $f = 40$, $e = 48$, $k = 96$, $c = -8$, $h = 11$.

Für das Netz **254** des 56Flachs sind zwei Schnittsechsecke A und M in parallelen Ebenen ganz gelassen. An M sind die Flächen des Mittelstückes angesetzt und an A die Flächen der beiden Außenstücke des 56Flachs. Die großen Trapeze und die langen sind Teile der übrigen sechs Schnittsechsecke. Die 28 Wendestrecken entstehen an Lücken neben Eckzellen als windschiefe Vierecke wie 1 bis 4 **252**. Die Zellen zwischen A und M zeigen die eine Netzseite, die außerhalb liegenden die andere. Das Netz **255** des 40Flachs kann ebenso zusammengesetzt werden. Es ergeben sich trotz der vielfachen Durchdringungen keine Wendestrecken, so daß dieses 40Flach zweiseitig bleibt. Jede der Zellen stößt mit drei Zellen anderer Netzseite zusammen, was merkwürdig ist. **253.**

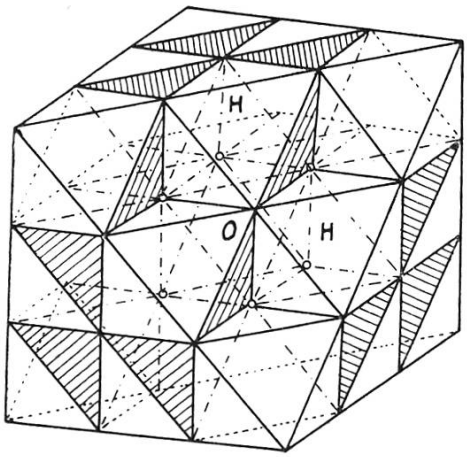
255



7. **Oktaeder,** zerlegt in **19 Oktaeder** und **32 Tetraeder 256.** Die Kanten des Oktaeders sind je in drei gleiche Strecken geteilt, und durch diese Teilpunkte werden Ebenen gelegt parallel zu Oktaederflächen. Damit entstehen acht Ebenen, die Sechsecke herausschneiden. Jede Oktaederfläche wird in neun Dreiecke geteilt, statt in 10 Flächen, wie im vorigen Fall, indem das Mitteldreieck hier zu einem Punkt wird. Auf einer Oktaederfläche als Grundfläche liegen als erste Schicht

sechs kleine Oktaeder an den Seiten und dazwischen 10 Tetraeder. Darüber sind in der zweiten Schicht sieben Oktaeder und 12 Tetraeder und zuoberst als dritte Schicht wieder sechs Oktaeder und 10 Tetraeder. Damit zerfällt das ganze Oktaeder wieder in 51 Zellen, wie im vorigen Fall. Entsprechend bilden die 19 Oktaeder in Scheitellagen ein *56Flach* mit 32 Lücken, in welche Tetraeder passen, von denen acht Hohltetraeder *H* sind, über den Flächen des inneren Oktaeders *O*. Die Hohltetraeder haben je eine Ecke in der Mitte der Flächen des großen Oktaeders. Daher ist das Ergänzungsvielflach ein 32Flach, statt des vorigen 40Flachs. Dieses *32Flach* der 32 Tetraeder hat seine Zellen um das Hohloktaeder angeordnet, über dessen Flächen sind die acht Innentetraeder und an deren je drei übrigen Kanten stoßen noch die 24 Außentetraeder an. Die Netze sind entsprechend dem vorigen Fall. $f = 56$, $e = 38$, $k = 108$, $c = -14$; $f = 32$, $e = 32$, $k = 72$, $c = -8$.

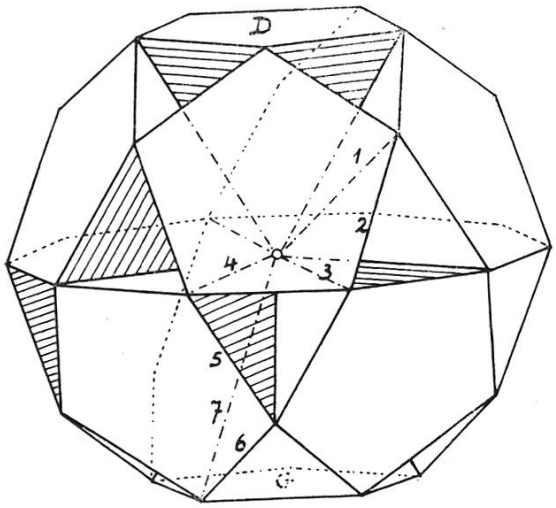
256



56Flach

8. **Dodekaeder,** regelmäßiges, zerlegt in **18Flach** und **66Flach 257** und **258,** beide einseitig. Durch die Mitte *O* des Dodekaeders werden die sechs Ebenen parallel zu dessen Flächen gelegt, wodurch sechs Schnittzehnecke entstehen, welche einander in $d = 15$ Doppelstrecken durchdringen, mit *O* als 15fachem Punkt. Die Oberfläche des Dodekaeders wird in 12 Fünfecke und in 60 Drei-

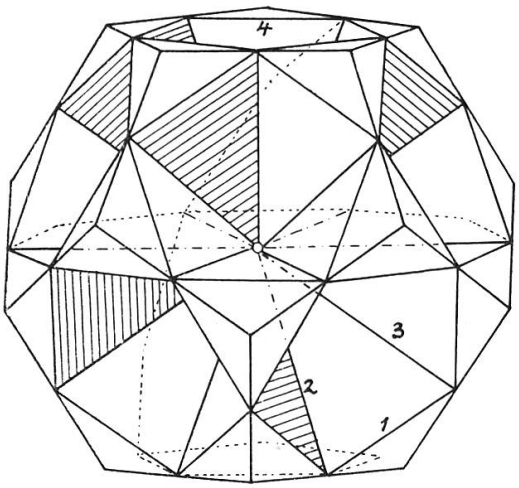
257



18Flach

ecke, als die beiden Scheitelgebiete zerlegt. Jedes der Scheitelgebiete läßt sich nicht in abgeschlossene, einander trennende Untergebiete zerlegen, so daß beide Teilvielflache einseitig werden. Sie besitzen zusammen 32 Zellen, $z = 2\,(d + 1)$.

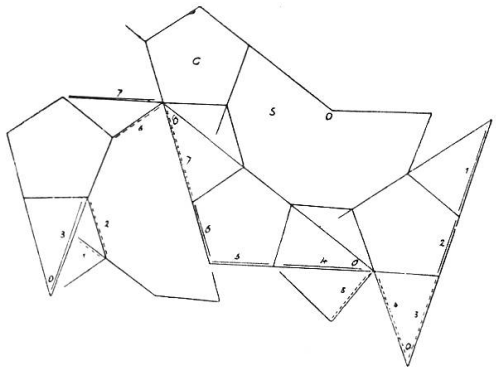
258



66Flach

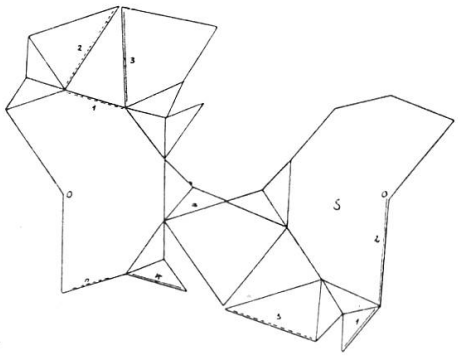
Das *18Flach* **257** der 12 Fünfecke und sechs Schnittzehnecke besteht aus 12 Zellen als fünfseitige Pyramiden von O aus, zwischen denen 20 dreikantige Lücken eindringen. Schließt man diese durch Dreiecke ab, so entsteht ein 32Flach des Archimedes. Das Netz **259** dazu läßt sich um ein Fünfeck G anordnen, wie gezeichnet für eine angefügte Fläche S als Teil eines Schnittzehnecks, aus dem von O aus vier Zehntel geschnitten sind. Durch Aufklappung fallen die fünf O in einen Punkt, womit ein Gestell aus den S errichtet ist, an denen Fünfecke wie 2 angesetzt sind, mit Ausschnitten als Dreiecke 1 und (3), die, nach O hineingeklappt, die Schnittzehnecke wieder ergänzen. Nur das G gegenüberliegende Fünfeck D zeigt die untere Netzseite, die übrigen zeigen die obere. In einer seitlichen Lücke sind die Wendestrecken 1, 2, 3 und in einer anstoßenden und in einer unteren Lücke 4 bis 7, die von O aus geschlossene Züge bilden; was fünffach auftritt. Das zu G parallel liegende Zehneck hat in allen seinen fünf Doppelstrecken Wendestrecken, so daß es aus 10 Dreiecken zusammengesetzt ist, die fortgesetzt die Netzseiten wenden. $f = 18$, $e = 30$, $k = 60$, $c = -12$, $h = 15$.

259



Das *66Flach* **258** besteht aus 60 Dreiecken, welche dreiseitige Ecken des Dodekaeders bilden, sowie aus den sechs Schnittzehnecken. Damit entstehen 20 Zellen, zwischen denen fünfkantige Lücken nach *O* eindringen. Das Netz **260** hat als Hauptflächen wieder die fünf Teile *S* der Schnittzehnecke; daran sind kleine Dreiecke 1 für die Ecken angesetzt und große (3) als Ausschnitte, wie auch das Viereck neben *a*, wo der Zusammenhang zwischen den fünf Teilen hergestellt ist. Um dieses Netz zu finden, wurde eine Hilfsfläche *G* des vorigen Netzes verwendet, die entfernt wurde, sobald der Zusammenhang *a* gewählt war. Wendestrecken, in denen Oberseite *o* und Unterseite *u* des Netzes ineinander übergehen, bilden fünf Dreiecke wie 1, 2, 3 in seitlichen Lücken und ein Kantenfünfeck bei 4. Diese Lücke zeigt in ihr die entgegengesetzte Netzseite, als die Gegenlücke unten, an deren Rand keine Wendestrecken sind. Es ist hier eigentümlich, daß aus Lücken oder überhaupt Zellen in benachbarter Scheitellage schließlich Gegenzellen entstehen durch die ganze Anordnung am Vielflach. Das zum Kantenfünfeck von 4 parallele Schnittzehneck enthält keine Wendestrecken, weil die 10 an ihm liegenden Zellen außen in *o* und *u* wechseln, während die übrigen Zellen alle *o* zeigen, so daß nur an fünf mittleren Ecken *u* ist und an den 15 anderen *o*. $f = 66$, $e = 50$, $k = 120$, $c = -4$, $h = 7$.

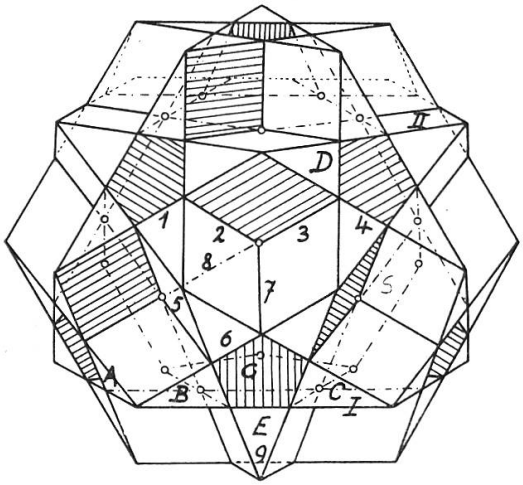
260



9. **Dodekaeder,** regelmäßiges, zerlegt durch **Innendodekaeder** in einseitiges **72Flach 261** und zweiseitiges **84Flach 262.** Zu jeder Fläche des Dodekaeders wird eine parallele Schnittebene gelegt, welche die anstoßenden Kanten halbiert. Man erhält damit 12 Schnittfünfecke, je mit 5 Doppelstrecken, welche die Flächen *G* des Innendodekaeders einschließen. Nur $d = 30$ Schnittgeraden der 12 Ebenen fallen in das Innere, weitere 30 gehen außen durch die Ecken der Schnittfünfecke, als durch die Mitten der Dodekaederkanten, paral-

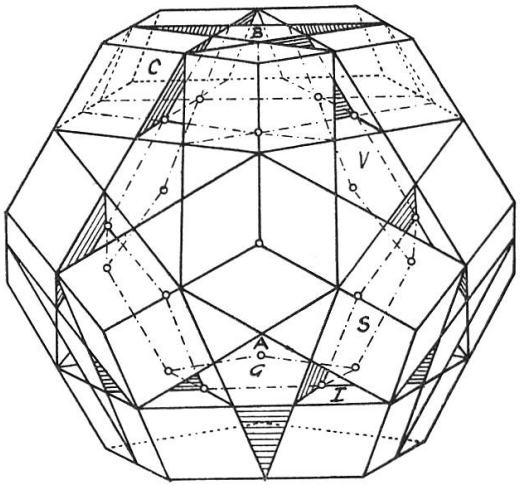
lel zu den dazu senkrechten Kanten und bilden ein Ikosaeder, aus dessen Flächen die Dodekaederecken herausragen. Die Flächen des Dodekaeders werden in ein mittleres Fünfeck, in fünf daran stoßende Dreiecke als Stern und in fünf Rau=

261



72Flach mit Innendodekaeder

262



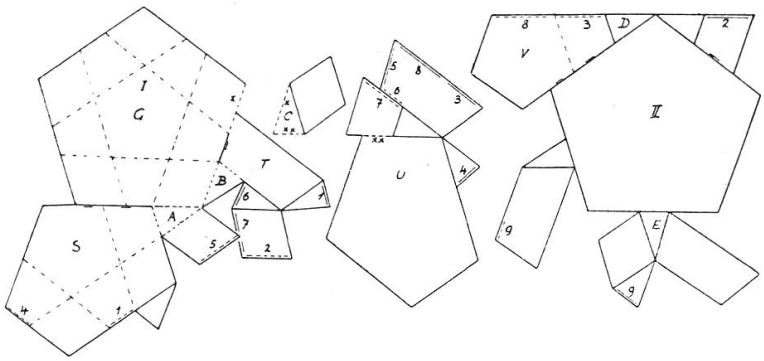
84Flach mit Hohldodekaeder

ten in den Ecken geteilt. Die 60 Dreiecke bilden das eine Scheitelgebiet, das mit den 12 Schnittfünfecken das 72Flach ausmacht, und die 12 Fünfecke und 60 Rauten gehören zum 84Flach. Im *72Flach*[7] liegen an den Kanten des *Innendodekaeders,* als an Doppelstrecken 30 gleiche Zellen, nämlich 6Flache mit zwei äußeren Dreiecken und mit zwei Trapezen und zwei Rauten als Teilen der Schnittflächen. Das 72Flach ist also aus 72 Zellen zusammengesetzt. Zum *84Flach* gehört das *Hohldodekaeder,* in Scheitellage zu den übrigen äußeren Lücken und eingeschlossen von den 12 Mittelzellen, als fünf=seitige Pyramidenstumpfe. An diese schließen sich an den Ecken des Dodekaeders 20 von Rauten begrenzte 6Flache an, so daß 32 Zellen das 84Flach ausmachen. Das Dodekaeder wird als im ganzen in 63 Zellen zerlegt: $z = 2\ (d + 1) + 1$. $f = 72$, $e = 90$, $k = 180$, $c = -18$, $h = 21$; $f = 84$, $e = 140$, $k = 240$, $c = -16$, $h = 19$.

Für das Netz **263** des 72Flachs sind zwei Schnittfünfecke I und II ganz gelassen, so daß die übrigen 10 zu teilen sind in ein Trapez mit T nebst einer Raute. In I liegt die Grund=fläche G des Innendodekaeders, und an I ist A angefügt, woran der Teil einer Schnittfläche ist mit einer unteren Sei=

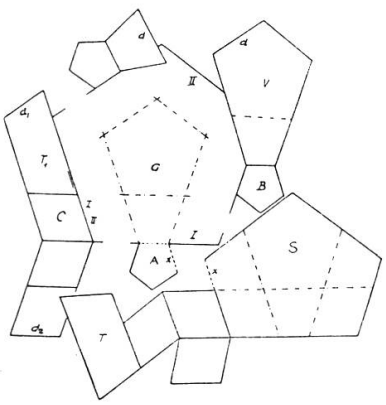
tenfläche S des Innendodekaeders. An B liegt T als Ergänzung zu einem S. Ferner ist U durch C mit I zu verbinden. Fünf solcher Flächen umschließen den unteren Teil des Innendodekaeders. Die Flächen des oberen Teiles sind wie V durch D an II gesetzt und passen in die unteren S, womit das Innendodekaeder eingeschlossen ist. An die vorspringenden Teile der S können die Seitenflächen, wie 4, für das Mittelstück zwischen I und II angefügt werden. Für die Teile außerhalb I und II werden die Flächen wie an E angesetzt. Aus diesem Netz entstehen die Wendestrecken 1 bis 4, die, weitergeführt, zusammenhängend um das 72Flach **261** sich schließen. Zudem bilden 5 bis 8 noch ein angefügtes Trapez, fünfmal. Von den Wendestrecken sind 2, 3 und 7, 8 auf Doppelstrecken. Außerdem sind die oberste und unterste Lücke je von fünf Wendestrecken wie 9 eingefaßt. Die fünf unter I liegenden Zellen zeigen *o*, die über II zeigen *u*. Am Mittelteil zeigen die untersten Zellen *u*, wie A und B, alle übrigen *o*. Wo Zellen gleicher Netzseite in Ecken zusammenstoßen, finden sich Endpunkte von Wendestrecken. Jede der 30 Außenzellen ist an zwei Sternen beteiligt, welche die 12 fünfseitigen Mittellücken einschließen.

263



Das Netz **264** des 84Flachs enthält entsprechend dem vorigen I mit G des Hohldodekaeders, und mit I ist durch A ein S verbunden wie auch T. An II ist B mit V, die in d an das zugehörige Trapez anschließen. Die Zellen außerhalb I und II entstehen aus C und T_1 und angesetzten Rauten, die

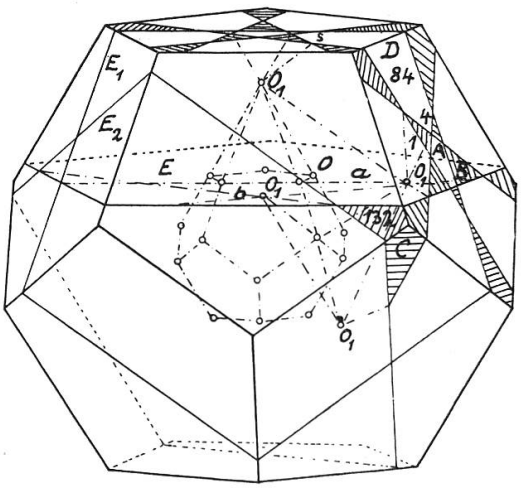
264



T_1 ergänzen. Bei der Aufklappung entstehen keine Wendestrecken, so daß dieses 84Flach eigentümlicherweise zweiseitig wird. Dies erklärt sich, da alle Mittelzellen mit den Fünfecken A oder B die Unterseite u des Netzes zeigen und die übrigen Zellen mit Rauten C die Oberseite o. Diese Zellen mit C stoßen also o an o, aber in einer Ecke, nach der keine Doppelstrecke geht, weil die hier durchgehende Schnittgerade hinausfällt. Eine solche Ecke gilt also für zwei Ecken von zwei in ihr zusammenstoßenden Zellen. Die 12 Mittelfünfecke bilden daher ein durch die Rauten abgeschlossenes Untergebiet und ebenso die 60 Rauten für sich, da sie an diesen Ecken nicht zusammenhängen.

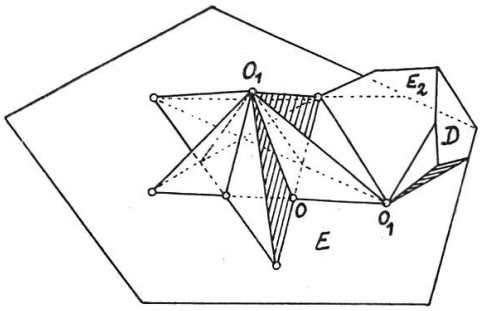
10. **Dodekaeder,** regelmäßiges, zerlegt in **84Flach** und **132Flach 265,** beide einseitig. Die zu den Flächen des Dodekaeders parallelen Ebenen E werden über die Mitten der anstoßenden Kanten hinaus geschoben, bis von diesen noch ein Viertel abgeschnitten wird. In jeder der Flächen entsteht damit in der Mitte ein Fünfeck A mit in einem Stern angeordneten fünf anstoßenden Dreiecken B, von deren Spitzen noch fünf Vierecke C nach den Ecken gehen, so daß dazwischen noch fünf seitliche Fünfecke D bleiben. Jedes Dodekaederfünfeck ist also in 16 Flächen geteilt. Aus den A und D samt den 12 Schnittebenen wird das 84Flach gebildet und aus den B und C ebenso das 132Flach. Im Schnittfünfeck E entstehen durch die Schnittebenen E_1 parallel zu den anstoßenden Flächen fünf Schnittgerade a, die ein inneres Fünfeck mit Ecken O einschließen und durch die E_2 parallel zu den nächsten Flächen weitere fünf Schnittgerade b, die je durch zwei Schnittpunkte O_1 der a gehen **269**. Damit fallen

265



84Flach und 132Flach mit Innen- und Hohldodekaeder

266

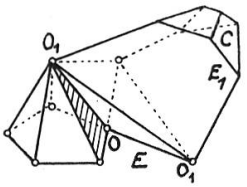


Stern der Innenvierflache und 8Flach

$d = 60$ Doppelstrecken ins Innere des Dodekaeders. Diese 12 Ebenen schließen das Innendodekaeder ein mit seinen Kanten auf den 30 a und den 20 Ecken in den O. Über dessen Flächen stehen Innenpyramiden, mit ihren Spitzen in den O_1, durch welche 10 Doppelstrecken gehen: 5 a und 5 b, mit jenen anliegenden Innenvielflachen **266.**

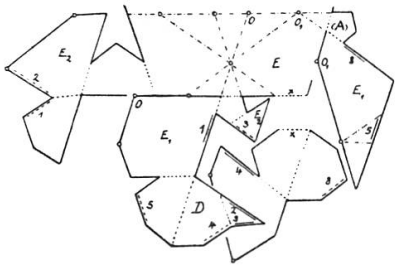
Das *84Flach* hat das *Innendodekaeder* als innere Zelle, so daß die Innenpyramiden zu Lücken werden, eingeschlossen von fünf Innenvierflachen als Zellen. An deren Kanten stoßen 8Flache, nach zwei Flächen D sich erstreckend, und zwischen diesen sind Pyramiden von A und O_1, in Spitzenscheitellage zu den Innenpyramiden. Das 84Flach hat also außer dem Innendodekaeder noch 30 Innenvierflache als Zellen und 30 Zellen mit D und 12 Zellen mit A, zusammen 73 Zellen. Das *132Flach*, um das *Hohldodekaeder*, hat die 12 Innenpyramiden als Zellen und daran anstoßend 20 9Flache C **267**, zwischen denen 60 Vierflache B eingesetzt sind, so daß 92 Zellen entstehen. Das Dodekaeder wird also zusammen in 165 Zellen zerlegt, darunter 42 Innenzellen.

267



Innenpyramide und 9Flach

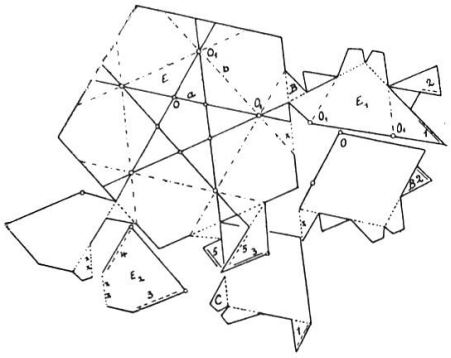
268



In **268** ist ein kleiner Teil des Netzes des 84Flachs gezeichnet. An ein Schnittfünfeck E ist A angesetzt, und daran folgen Teile von E_1, welche eine Innenpyramide einschließen. Dann sind Fünfecke wie D angefügt für Teile von E_2. Als Wendestrecken entstehen 1 bis 8, so daß das 84Flach einseitig wird. Wegen der inneren Zellen kann dieses Vielflach nicht aus einem Netz aufgeklappt werden.

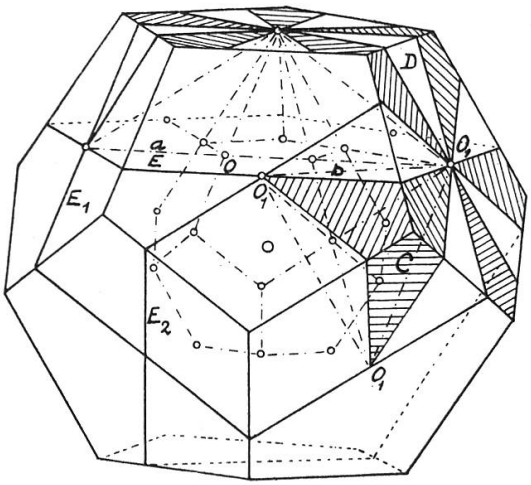
Für das Netz **269** ist an das Schnittfünfeck E durch B ein Teil von E_1 angefügt, der an ein a zu klappen ist, während E_2 an ein b kommt. Die Wende=strecken fallen in Kanten 1, 2 und in Doppelstrecken 3, 4. Zu einer einfachen, übersichtlichen Darstellung verfertigt man Mo=delle einzelner Zellen wie **266** und **267.** Über E allein kommen dann zusammen 46 Zellen, von denen 21 zum 84Flach gehören, während die übrigen dessen Lücken ausfüllen. $f = 84$, $e = 180$, $k = 330$, $c = -66$; $f = 132$, $e = 150$, $k = 360$, $c = -78$.

269



11. **Dodekaeder,** zerlegt in zwei einseitige **72Flache 270.** Die Schnittebenen parallel zu den Flächen sind so gelegt, daß die Spuren durch die Mitte O_1 der anliegenden Fünf=ecke gehen, so daß diese von O_1 aus in fünf Dreiecke D und fünf Vierecke C zer=legt werden. In dem Schnitt=fünfeck E einer solchen Ebene entstehen je fünf Schnittgerade a und b, mit den übrigen Ebenen. Die a schließen ein Fünfeck G des Innendodekaeders ein, über dem eine Innenpyra=mide nach O_1 geht, und die b verbinden Spitzen O_1 un=tereinander, wodurch an die Seitenflächen dieser Pyra=mide anliegende Innenvierflache bestimmt sind. In O_1 fal=len die Flächen A und B des vorigen Falles in einen Punkt zusammen. Daher müssen die Netze anders hergestellt wer=den. Man geht **271** von G aus, woran der Teil E_1 angesetzt wird, als Trapez mit D. An x wird eine weitere Seitenfläche

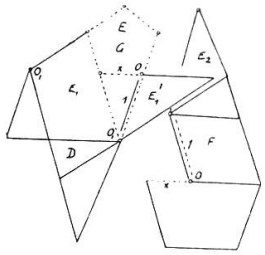
270



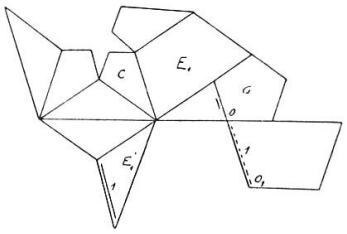
72Flach zu 72Flach

der Innenpyramide angesetzt mit F, was die Wendestrecke 1 in E in einer Doppelstrecke ergibt, so daß dieses 72Flach einseitig wird, wobei Zellen D gleicher Netzseite zusammenstoßen. Da die Zelle D in Scheitellage ist zum Innenvierflach, wird die Innenpyramide zur Lücke und damit das Innendodekaeder zur Zelle. An deren Kanten stoßen die 30 Innenvierflache an und an diese die Zellen D, so daß mit dem Innendodekaeder 61 Zellen vorhanden sind. $f = 72$, $e = 72$, $k = 150$, $c = -6$, $h = 9$. Das 72Flach mit den 20 Zellen C als 9Flache hat dazwischen die 12 Innenpyramiden, welche das *Hohldodekaeder* einschließen. Es bestehen nur noch 32 Zellen, da vom 132Flach 60 Zellen B verschwunden sind in O_1. $f = 72$, $e = 92$, $k = 180$, $c = -16$, $h = 19$. Das ganze Dodekaeder ist also in 93 Zellen zerlegt. Im Netz **272** ist wieder E_1 an G gesetzt und daran C, und E_1' bildet die Wendestrecke 1 als Doppelstrecke. Die zusammenstoßenden Zellen C zeigen gleiche Netzseite, was Einseitigkeit anzeigt.

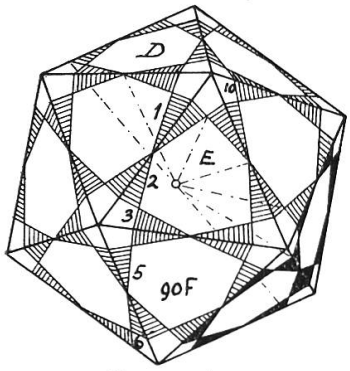
271



272



273

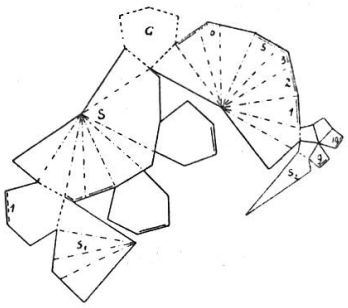


Ikosaeder zerlegt in 90Flach und 130Flach

12. **Ikosaeder,** regelmäßiges, zerlegt **273** in **90Flach** und **130Flach,** beide einseitig. Die 10 Schnittebenen gehen durch die Mitte O des Ikosaeders, parallel zu dessen Flächen, und schneiden gleichseitige Zwölfecke heraus, mit den größeren, fast flachen Winkeln an den Kantenmitten, wie 1, 2 **274.** Ein Schnittzwölfeck enthält neun Doppelstrecken. Jedes Dreieck des Ikosaeders wird in ein inneres Sechseck D mit drei Scheitelvierecken und in sechs Dreiecke geteilt. Die Sechsecke und Vierecke gehören zum 90Flach, die Dreiecke zum 130Flach. Das 90Flach

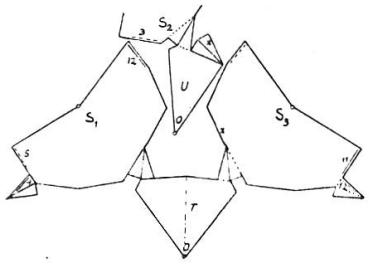
hat 32 Zellen, das 130Flach 60 Zellen, zusammen 92 Zellen, $z = 2\ (d + 1)$ für $d = 45$. Für das Netz **274** des *90Flachs* setzt man an ein Sechseck G die anstoßenden Schnittzwölfecke S mit Ausschnitten zweier Art, je nach den Ecken von G. Durch Aufklappung verschränken sich die S, indem ihre Mitten O zusammenfallen, und sie bilden ein Gerüst, an dem die anderen Flächen anzusetzen sind, was so geschehen kann, daß G und die drei in Ecken anstoßenden Flächen u zeigen, wie auch die drei Flächen, die an D, gegenüber G, anstoßen, während D und die übrigen 12 Seitenflächen o zeigen, womit 18 Ecken entstehen, in denen je zwei Sechsecke wie D mit ungleichen Netzseiten zusammenstoßen, so daß noch 12 Ecken bleiben, an denen dies mit gleichen Netzseiten geschieht. Von diesen 12 Ecken gehen Wendestrecken auf Doppelstrecken nach O. Von den außen liegenden Wendestrecken sind 1, 2, 5 an Sechsecken und 3, 6, 10 an Vierecken um Ikosaederecken, von denen die drei um G die Netzseite o zeigen und die übrigen u. Diese 60 Vierecke stoßen in 18 Ecken in gleicher Netzseite mit Sechsecken zusammen, wodurch ebenfalls deren Doppelstrecken zu Wendestrecken werden an Ausschnitten wie S_1 und S_2, welche S zu Zwölfecken ergänzen.

274



Um das Netz **275** für das *130Flach* zu erhalten, beginnt man wie **274** mit G, worauf aber ein anderer Zusammenhang zwischen S_1 und S_3 gesucht werden muß, da G wegzulassen ist. Mittelst Dreiecken können S_1 und S_3 durch einen Ausschnitt T zum Netz verbunden werden, wie auch S_2 durch U, auch durch einen Ausschnitt aus einem Schnittzwölfeck. An Stelle von G und D treten dann Gegenlücken, an Kantensechsecken mit Wendestrecken 1 bis 6 und 7 bis 12. Die Lücke für G zeigt u und die von D zeigt o, so daß die Dreiecke an ihren Kanten die entgegengesetzte Netzseite zeigen.

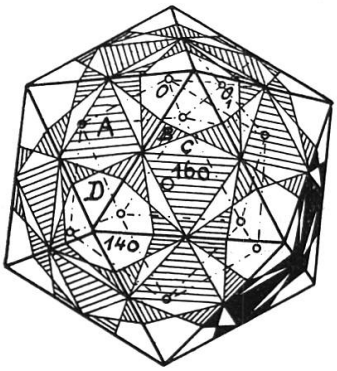
275



Die weiter anstoßenden Dreiecke wechseln in den Netzseiten. $f = 90$, $e = 162$, $k = 300$, $c = -48$, $h = 51$; $f = 130$, $e = 150$, $k = 300$, $c = -20$, $h = 23$.

13. **Ikosaeder,** regelmäßiges, zerlegt in **140Flach** und **160Flach 276 mit Innenikosaeder.** Zu jeder Fläche des Ikosaeders wird eine parallele Schnittebene E gelegt, welche die drei in Seiten anstoßenden Dreiecke in Mittelparallelen schneidet. Dabei werden noch die sechs je zu zweien in den Ecken anstoßenden Flächen auch von E geschnitten, so daß ein Neuneck entsteht **277**. E wird von 18 anderen solchen Ebenen geschnitten, nämlich von den drei E_1, parallel zu den anstoßenden Dreiecken, in drei a und von den E_2, parallel zu den sechs in Ecken anstoßenden Flächen, in sechs b als Doppelstrecken. Die nächsten Schnittgeraden als sechs c gehen durch Ecken des Neunecks, und weitere drei d fallen außerhalb. Im Ikosaeder drin liegen damit in den 20 Schnittneunecken 90 Doppelstrecken. Außerhalb fallen 100 Schnittgerade, davon 10 ins Unendliche.

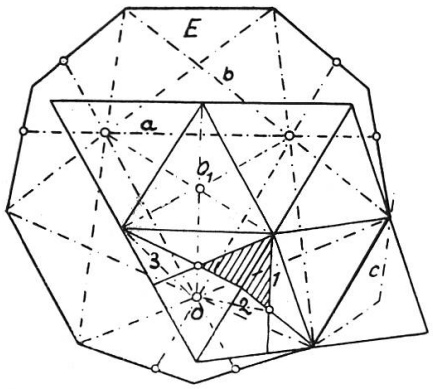
276



160Flach und 140Flach mit Innen- und Hohl-Ikosaeder

Die a umschließen Dreiecke des Innenikosaeders, mit Ecken O. Die b treffen sich in O_1 als Spitzen von Innenpyramiden. Jedes Dreieck des Ikosaeders wird von neun Ebenen geschnitten, und es entstehen dadurch 13 Teile: ein Dreieck A, sechs Dreiecke B, drei Dreiecke C und drei Vierecke D. Die A und B gehören zum 160Flach, die C und D zum 140Flach. An diese Flächen schließen sich die äußeren Zellen an: 20 Zellen A und 60 Zellen B sowie 60 Zellen C und 12 Zellen D. Außerdem bestehen noch Innenzellen, nämlich 20 Innenpyramiden über den Flä-

277



Schnittneuneck

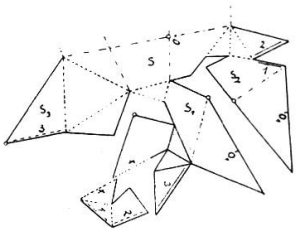
chen des Innenikosaeders und 30 Innensechsflache, an dessen Kanten, je zwischen zwei Innenpyramiden, an diese anliegend; dies gibt samt dem Innenikosaeder zusammen 203 Zellen.

Das *160Flach* hat 111 Zellen, nämlich das Innenikosaeder, dann an dessen Kanten die 30 Innensechsflache, ferner die 20 Zellen *A* als dreiseitige Pyramiden und die 60 Zellen *B* als 5Flache. Dabei liegen unter den Zellen *A* die 30 Hohlpyramiden in den Verlängerungen von deren drei Kanten, also in Spitzenscheitellage. Die äußeren Lücken *C* sind in Kantenscheitellage zu den damit als Lücken zählenden Hohlpyramiden. Von den *D* aus gehen äußere fünfkantige Lücken hinein zu den Ecken des Innenikosaeders, dazu in Eckenscheitellage, je umgeben von fünf Zellen *B*. $f = 160$, $e = 150$, $k = 360$, $c = -50$, $h = 53$.

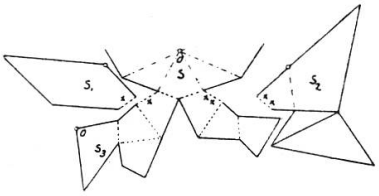
Das *140Flach* hat 92 Zellen, nämlich 20 Innenpyramiden, welche das *Hohlikosaeder* einschließen, 12 10Flache *D* wie Kreisel und 60 Zellen *C* als 6Flache, welche zu fünfen die *D* umgeben. Zum Hohlikosaeder sind die Innensechsflache Lücken in Kantenscheitellage; sie reichen bis an die Ecken der Dreiecke *A*. In diesen Ecken der *A* findet zweifache Scheitellage statt, einmal zwischen *A* und *B*, weil die Spur der Schnittebene von einer Seite von *A* auf eine solche von *B* übergeht und dann zwischen den *C*. In einer Ecke von *A* endigen zwei Doppelstrecken *b*, und außerdem geht noch eine äußere Schnittgerade *c* durch. $f = 140$, $e = 162$, $k = 360$, $c = -58$, $h = 61$.

Im Netz **278** des 160Flachs sind an einen Teil *S* eines Schnittneunecks Dreiecke *B* angesetzt und an diese S_1, S_2 und S_3 als Teile anderer Schnittneunecke. Daraus ergeben sich bei der Aufklappung Wendestrecken 1 als Kante, 2 und 3 als Stücke von Doppelstrecken, als Anfang eines Zuges um *A* herum. Die obere Zelle *A* zeigt *o*, die drei seitlichen zeigen *u*, während die Zellen *B* darin abwechseln. Doch lassen sich diese Netze nicht vervollständigen, da wegen der Innenzellen einzelne Flächen keinen Zusammenhang erhalten. Man kann sich mit zwei Netzen z. B.

278

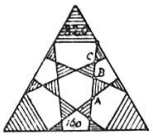


279



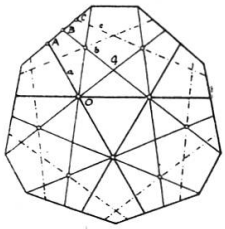
für den Teil über *E* behelfen, indem man an dem einen die Schnitte durch *a* und am anderen die durch *b* ansetzt und die beiden Aufklappungen ineinander gesetzt denkt. Man bestimmt damit einen Kranz von Wendestrekken an Kanten von *B* um *A* herum. Aus dem Netz **279** ergeben sich dagegen keine Wendestrecken für das 140Flach.

280



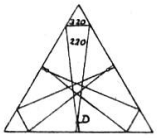
Anhang. Mit Verkleinerung des Innenikosaeders durch Verschiebung der Schnittebenen rücken weitere Schnittgeraden in das Schnittneuneck. Durch die Teilung der Ikosaederdreiecke nach **280** erhält man 320Flach und 160Flach, mit dem Schnittneuneck **281.** Nach **282** entstehen 320Flach und 220Flach, wobei auch der Spurpunkt *D* in das Dreieck fällt und *d* in das Neuneck **283.** Eine Vereinfachung tritt ein, wenn die Ebenen durch *P* **284** und **285** gehen, als Mitte des Dreiecks, wodurch 200Flach und 140Flach entstehen.

281

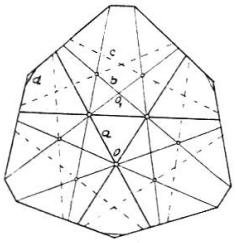


Schnittneuneck

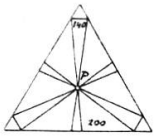
282



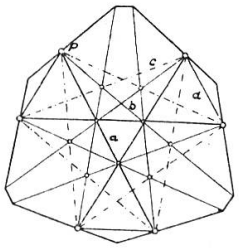
283



284



285



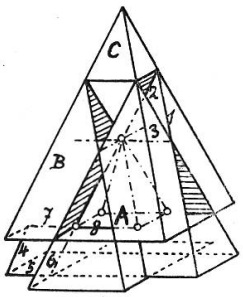
In den Schnittflächen **283** und **285** fallen je 18 Doppelstrecken in das Innere des Neunecks, nämlich 3 *a*, 6 *b*, 6 *c* und 3 *d*, so daß nur noch die 10 Doppelstrecken im Unendlichen darin fehlen. Dadurch entsteht die größte Zahl von inneren Flächenteilen zur Bildung der Innenzellen.

XVIII. Reihe mit Innen- und Hohlpyramide

Zu den Flächen einer Pyramide werden in gleichem Abstand parallele Schnittebenen gelegt, welche miteinander eine Innenpyramide einschließen. Die Schnittebenen zerlegen die Pyramide in Zellen, welche zwei Vielflache je aus den in Doppelstrecken zusammenstoßenden Scheitelzellen bilden. Das eine Teilvielflach enthält die *Innenpyramide* als Zelle, das andere aber als Lücke, wobei sie als *Hohlpyramide* aufzufassen ist infolge der Einlagerung des Vielflaches in den Raum.

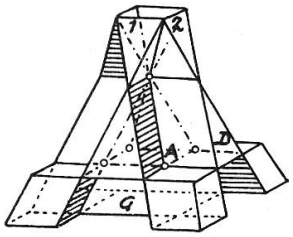
1. Eine **quadratische Pyramide** wird auf diese Weise in ein **25Flach** und ein **26Flach** zerlegt, die beide einseitig werden. Die fünf Schnittebenen ergeben $d = 10$ Doppelstrecken und schließen die Innenpyramide, mit der Grundfläche A, ein **286.** Ihre Kanten liegen in acht Doppelstrecken; außerdem bestehen noch zwei Doppelstrecken, die durch deren Spitze O gehen parallel zur Grundfläche. Daher ist O als sechsfacher Punkt zu rechnen, während die Ecken von A dreifache Punkte sind. Die ursprüngliche Pyramide zerfällt in 23 Zellen, von denen 10 Zellen das 25Flach bilden, welches die Spitze über C beibehält, während die übrigen 13 Zellen das 26Flach **287** ausmachen, das oben bei 1 eine vierseitige Lücke hat.

286



25Flach mit Innenpyramide

287



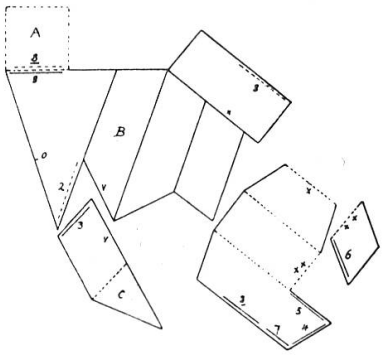
26Flach mit Hohlpyramide

Nimmt man vorerst die *Innenpyramide* als *Zelle,* so sind im *25Flach* über ihren acht Kanten Scheitelzellen, von denen vier Zellen mit Trapezen wie B über Seitenkanten liegen und vier Zellen mit Rechtecken neben A an Grundkanten, wozu noch die Zelle mit C an der Spitze kommt, die zwischen den Verlängerungen der Seitenkanten der Innenpyramide liegt, also zu dieser in Punktscheitellage ist, im Gegensatz zu der gewöhnlichen Kantenscheitellage, in

welcher diese Zelle C zu den Seitenzellen wie B liegt. Dieses 25Flach hat außen 12 Trapeze in den Seitenflächen, vier Dreiecke an der Spitze bei C und vier Rechtecke unten in der Grundfläche. Dazu kommen noch die fünf Schnittflächen, nämlich vier Trapeze und ein Quadrat, die je vier Doppelstrecken enthalten, in denen sie einander durchdringen. Zwischen den 10 Zellen sind 13 Lücken: davon fünf Lücken über den Flächen der Innenpyramide, vier Lücken an deren Grundecken von A und noch vier Lücken unter der Oktaederzelle an der Spitze, weil durch diese noch zwei Doppelstrecken gehen.

Das Netz **288** des 25Flachs F_1 läßt sich um die Grundfläche A der Innenpyramide regelmäßig anordnen, wie für ein Viertel gezeichnet ist. An A werden vier Dreiecke, wie das mit O, angesetzt, die aufgeklappt die Spitze O der Innenpyramide ergeben. An diese Dreiecke mit O sind Trapeze wie B angesetzt für die Seitenkantenzelle und daran Rechtecke, wie das mit 8, welche um A angefügt die quadratische Schnittfläche zusammensetzen. Dazu kommen in x die Flächen der unteren Zellen und das Trapez mit 4 als unterster Teil der seitlichen Schnitt-Trapeze. Durch die Aufklappung wird 8 zur Doppelwendestrecke, indem in ihr beide Schnittebenen, nämlich die zur Grundfläche und die zu einer Seitenfläche parallele, die Netzseite wenden. Daran anstoßend entstehen noch einfache Wendestrecken 4 bis 7, die eine Raute bilden. Außerdem entstehen noch an den oberen Lücken die Wendestrecken wie 1, 2, 3. Alle diese Wendestrecken treten viermal auf, so daß 32 Wendestrecken bestehen, darunter vier Doppelwendestrecken, für dieses einseitige 25Flach. $f = 25$, $e = 33$, $k = 64$, $c = -6$, also $h = 9$.

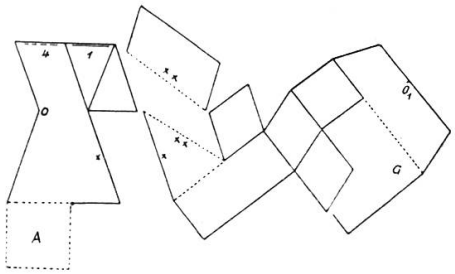
288



Für das Ergänzungsvielflach dazu, für das *26Flach* F_2, werden die Zellen des 25Flachs zu Lücken, so daß die Innenpyramide als innere Lücke zur *Hohlpyramide* wird, die von fünf Zellen über ihren Flächen eingeschlossen wird, nämlich

von einem Pyramidenstumpf unter A und von dreiseitigen Prismen mit D über den Seitenflächen. Zudem sind an den Ecken von A vier Sechsflache mit Rauten, und über der Spitze sind vier Tetraederzellen, welche die vierkantige Lücke bei 1 einschließen. Für das Netz **289** dieses 26Flachs ist von den Trapezen, als den vier Schnittflächen, der untere Teil mit O_1 unter A abgeschnitten, so daß der Teil mit O bleibt, nachdem längs Doppelstrecken der Einschnitt nach O herausgenommen wurde. Diese Teile mit O vierfach um A angesetzt und aufgeklappt, geben bei O verschränkt ein Gerüste für das 26Flach, an welchem die anderen Flächen angesetzt werden können, wie **289** an einem Viertel zeigt. Das Trapez mit O_1 kommt dann wieder unter den Teil mit O mit gleicher Netzseite, und daran schließt sich G als inneres Quadrat in der Grundfläche. Die Wendestrecken 1 bis 4 bilden das oberste Kantenquadrat an der Lücke, so daß ein sehr hübscher einfacher Fall für die *Möbiusbänder* eintritt. Die vier Eckzellen an G und die vier obersten Zellen, wie die an 1, zeigen alle die Oberseite des Netzes, während die Grundzelle über G und die vier Seitenzellen wie D die Unterseite zeigen. Die Hohlpyramide hat innen die Oberseite des Netzes. Die zusammenstoßenden Zellen wechseln also an den Doppelstrecken ihre Netzseiten, und nur die obersten vier Tetraederzellen sind mit gleichen Netzseiten benachbart, was die Wendestrecken 1 bis 4 zur Folge hat, an denen die Netzunterseite in der oberen Lücke übergeht in die Netzoberseite außen an diesen Zellen. $f = 26$, $e = 36$, $k = 64$, also $c = -2$ oder $h = 5$.

289

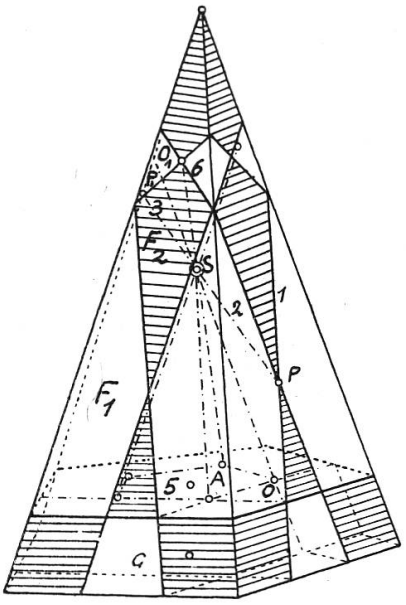


Dabei sind Kanten und Ecken der Hohlpyramide nicht mitgezählt; sie sind als Doppelstrecken und mehrfache Punkte besonders beschrieben, ebenso sind die Flächen daran nicht als die der Hohlpyramide gezählt, sondern als die Schnittebenen, die darüber hinaus bis an die Kanten der ganzen Vielflache reichen. Die Innenpyramide oder Hohl-

pyramide entsteht als Folge der Einlagerung der Vielflache in den Raum, ihre Elemente sind im Netz nicht wesentlich. Aber im Raum erscheint sie doch als Zelle oder Lücke. Erst wenn aus dem Netz das Vielflach im Raum dargestellt werden soll, müssen die Doppelstrecken berücksichtigt werden, um die Durchdringungen ausführen zu können; erst dadurch ergibt sich die Eintragung der mehrfachen Elemente als nötig, unter dem Zwang der wirklichen Ausführung der Konstruktion. Dieser Zwang führt damit zu neuen Erkenntnissen.

Nach den Grundsätzen der Anordnung der Scheitelzellen ergeben sich umgekehrt aus räumlichen Beziehungen die flächenhaften nach Einseitigkeit und Zweiseitigkeit in den Vielflachen.

290

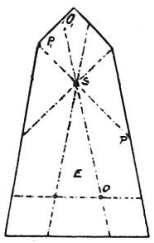


36Flach F_1
mit Innenpyramide
37Flach F_2
mit Hohlpyramide
n = 5

2. **Fünfseitige Pyramide,** zerlegt in **36Flach und 37Flach,** beide einseitig **290.** Von den sechs Schnittebenen schneidet diejenige parallel zur Grundfläche G ein regelmäßiges Fünfeck heraus, in welchem von Doppelstrecken eingeschlossen die Grundfläche A der Innenpyramide liegt. Die übrigen fünf Ebenen, parallel zu den Seitenflächen, ergeben Fünfecke E **291,** die auch je fünf Doppelstrecken enthalten. Die Kanten der Innenpyramide liegen damit in 10 Doppelstrecken. Außerdem gehen noch fünf Doppelstrekken PP_1 durch die Spitze S der Innenpyramide. Die ursprüngliche ganze Pyramide wird in 33 Zellen geteilt, von denen 16 Zellen zu F_1, ohne die an der Spitze, gehören und 17 Zellen zu F_2, mit der Spitze. F_1 hat die Innenpyramide als Zelle und dazu über deren Kanten 10 Scheitelzellen und zwar fünf an den Grundkanten und fünf an den Seitenkanten.

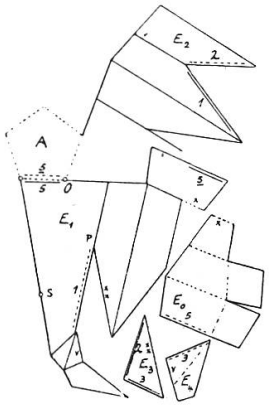
Außerdem hat F_1 noch fünf Zellen über deren Spitze S, wo sie die obere Lücke einschließen. An Stelle dieser Lücke hat F_2 die Zelle der Spitze der ursprünglichen Pyramide und darunter an S noch fünf Zellen, unter denen die fünf seitlichen Zellen liegen, welche die *Hohlpyramide* einschließen. Diese ist unten noch abgeschlossen durch die Fläche A der Grundzelle, an welche noch fünf Eckzellen anstoßen.

291

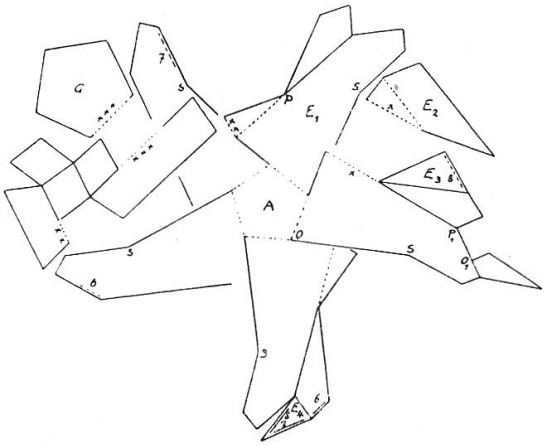


Für das Netz **292** des 36Flachs F_1 sind die Schnittflächen **291** E in die Teile E_1, E_2, E_3, E_4 und E_0 zerlegt, welche samt den übrigen Flächen sich regelmäßig um A anordnen lassen. Durch die Aufklappung entstehen einfache Wendestrecken, wie 1 bis 4, und Doppelwendestrecken, wie 5, an allen Grundkanten der Innenpyramide, in denen sowohl die Schnittebene von A als auch die seitlichen Schnittebenen ihre Netzseiten wenden. Im Netz **293** des 37Flachs F_2 bildet E_1 den Hauptteil der durch die Seitenflächen der Innenpyramide gehenden Schnittflächen, der durch E_2, E_3 und E_4 zu E ergänzt wird. Durch die Aufklappung entstehen am 37Flach nur oben Wendestrecken, wie an der Kante 6 **290**, an deren Enden noch 7 und 8 als Wendestrecken auf nach S gehenden Doppelstrecken anschließen. Nur die Zelle an der Spitze zeigt nämlich die gleiche Netzseite wie ihre anstoßenden oberen Seitenzellen, während im übrigen an diesem 37Flach je zwei zusammenstoßende Zellen verschiedene Netzseiten weisen, wobei keine Wendestrecken auftreten.

292

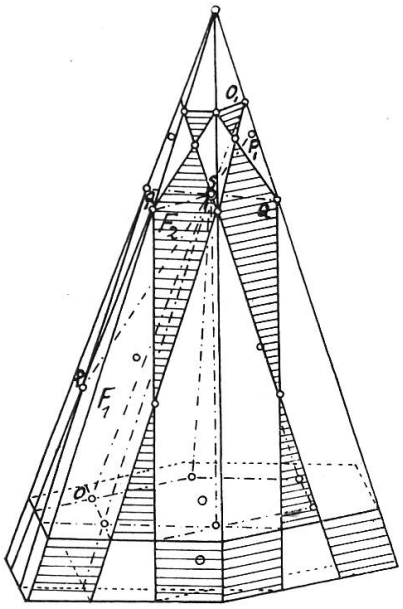


293



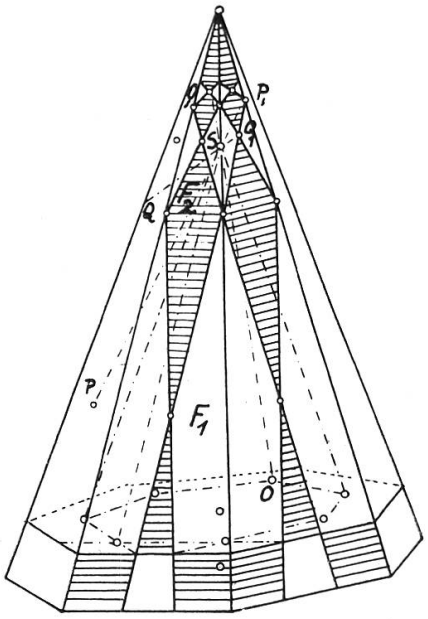
3. Zur **Verallgemeinerung** sind zum vorigen Fall $n = 5$ noch die für 6, 7, 8 gezeichnet in **294, 295** und **296.** Daraus ergeben sich die folgenden Formeln für ganze Zahlen n zu den in den Tabellen enthaltenen Werten.

294



$n = 6$

295



$n = 7$

I. n ungerade.

1. F_1 mit Innenpyramide, ohne Spitze

$f_1 = (n + 1)^2$
$e_1 = n^2 + 5n$
$k_1 = (5n^2 + 13n) : 2$
$c_1 = (2 + n - n^2) : 2$
$h_1 = (n^2 - n + 4) : 2$
$\triangle h_1 = 2n + 1$

2. F_2 mit Hohlpyramide, mit Spitze

$f_2 = (n^2 + 9n + 4) : 2$
$e_2 = n^2 + 6n + 1$
$k_2 = 2n^2 + 10n$
$c_2 = (6 + n - n^2) : 2$
$h_2 = (n^2 - n) : 2$
$\triangle h_2 = 2n + 1$

$$h_1 - h_2 = 2$$

n	f_1	e_1	k_1	c_1	h_1	f_2	e_2	k_2	c_2	h_2
3	16	24	42	— 2	5	20	28	48	0	3
5	36	50	95	— 9	12	37	56	100	— 7	10
7	64	84	168	—20	23	58	92	168	—18	21

$n = 3$ ist ausgeführt beim Tetraeder

II. n gerade.

1. F_1 mit Innenpyramide, mit Spitze

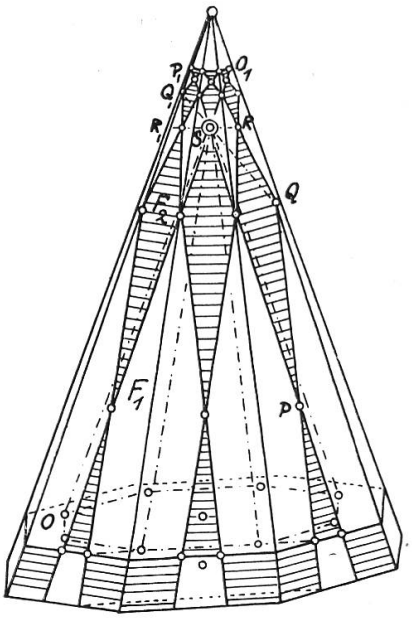
$f_1 = (n + 1)^2$
$e_1 = n^2 + 4n + 1$
$k_1 = (5n^2 + 12n) : 2$
$c_1 = (4 - n^2) : 2$
$h_1 = (n^2 + 2) : 2$
$\triangle h_1 = 2n + 2$

2. F_2 mit Hohlpyramide, ohne Spitze

$f_2 = (n^2 + 8n + 4) : 2$
$e_2 = n^2 + 5n$
$k_2 = 2n^2 + 8n$
$c_2 = (4 + 2n - n^2) : 2$
$h_2 = (n^2 - 2n + 2) : 2$
$\triangle h_2 = 2n$

$$h_1 - h_2 = n$$

296



$n = 8$

n	f_1	e_1	k_1	c_1	h_1	f_2	e_2	k_2	c_2	h_2
4	25	33	64	— 6	9	26	36	64	— 2	5
6	49	61	126	—16	19	44	66	120	—10	13
8	81	97	208	—30	33	66	104	192	—22	25

4. Um den **Grenzfall** zu erhalten, sei festgesetzt, daß die Seiten des regelmäßigen Vielecks der Grundfläche der Pyramide in bestimmtem Verhältnis geteilt werden, z. B. in drei gleiche Teile, womit durch Parallele durch die Teilpunkte zu den benachbarten Seiten ein inneres Vieleck erhalten wird, ähnlich zur Grundfläche, und womit die Lage der Schnittebenen bestimmt ist, als parallel zu den Seitenflächen der Pyramide. Für wachsendes n rückt dieses innere Vieleck immer näher an das äußere und geht schließlich mit diesem in den nämlichen Kreis über, wobei aber nur der innere Kreis eine stetige Linie ist, während der äußere Kreis für die beiden Teilvielflache einzeln je punktweise unterbrochen ist

durch die Lücken. Doch bleibt bei Annahme irgendeines Punktes auf diesem Kreis unbestimmt, ob er zu F_1 oder F_2 gehört. Von diesem Kreis erstrecken sich zwei Kegelmantelflächen, wobei wieder die innere dicht ist, während die äußere in zwei Scheitelgebiete von Flächenelementen als Dreiecke und Vierecke zerfällt und damit als einzeln für F_1 oder F_2 gelockert und nicht dicht ist. Die Innenpyramide von F_1 wird ein voller, dichter Kegel, und die Hohlpyramide von F_2 ein mit dichtem Mantel abgeschlossener Hohlkegel. Beim Übergang zu $\lim n = \infty$ läßt man die ungeraden Zahlen für sich durchlaufen und ebenso die geraden, um den fortwährenden Wechsel der Spitze mit Lücke zu vermeiden und die Annäherung zum Kegel von einer Seite her zu erhalten. Die Annäherung ist aber unstetig, entsprechend der Reihe der ganzen Zahlen.

F. Hohlzellenpolyeder ohne Doppelstrecken

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten durch die Doppelstrecken der Schnittebenen die hohen Zusammenhangszahlen erreicht wurden, können diese auch erzielt werden durch Zellen mit einer durchgehenden Höhlung, wobei Doppelstrecken fehlen. An Stelle der Trennung der einzelnen Zellen durch Doppelstrecken tritt ein mehrfacher Zusammenhang der Flächen und der von ihnen umschlossenen Raumteile um die einzelnen Löcher der Zellen. Dabei entstehen zweiseitige Roste. Doch kann auch eine besondere Art von einseitigem Rost gebildet werden, wobei aber die Löcher sich je in einem Punkte schließen, der die Durchdringung vertritt.

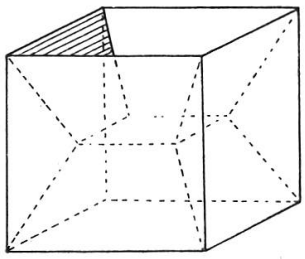
XIX. Hohlblock, Henkel und Roste

An einem Prismenmantel verbindet man seine beiden Ränder durch Flächen nach innen in gleichem Sinn, wodurch ein zweiseitiger Hohlblock entsteht, entsprechend dem Torus,

oder man verbindet in gewendetem Sinn, so daß ein einseitiger Block entsteht, wie der Kleinsche Schlauch.

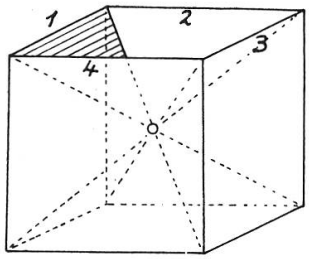
Beide Fälle lassen sich zugleich am einfachsten am Würfel zeigen, von dem man nur vier seiner Flächen nimmt als Prismenmantel. Zuerst wird jede der oberen Randstrecken mit der darunter liegenden unteren durch zwei Trapeze verbunden, so daß 8 Trapeze entstehen, die nach einem Quadrat im Innern des Würfels gehen. Diese 8 Trapeze bilden mit den 4 Quadraten des Würfelmantels als **12Flach 297** einen zweiseitigen Hohlblock. $f = 12$, $e = 12$, $k = 24$, $c = 0$, $h = 3$. Jede Würfelfläche bildet mit den beiden anstoßenden Trapezen ein zweiseitiges Band, das nun durch ein einseitiges zu ersetzen ist, indem man eine obere Randkante mit der gegenüberliegenden unteren durch eine Diagonalfläche des Würfels verbindet. Dann bildet dieses Rechteck mit dem Prismenmantel ein Möbiusband. Alle vier solcher Diagonalflächen zwischen den beiden Rändern des Würfelmantels schließen zwei Pyramidentrichter ein nach der Würfelmitte. Man erhält damit ein **einseitiges 8Flach 298**. Von den gelegten Diagonalflächen gehören aber jeweils nur zwei gegenüberliegende Dreiecke in Scheitellage zusammen als eine Fläche zum 8Flach, indem von jedem Rechteck die zwei seitlichen Dreiecke wegfallen. $f = 8$, $e = 8$, $k = 16$, $c = 0$, $h = 3$. Die Würfeldiagonalen zählen als Kanten; es fehlen nämlich Doppelstrecken, und die Durchdringung besteht nur aus dem Schnittpunkt O der vier Diagonalen.

297



Hohlblock

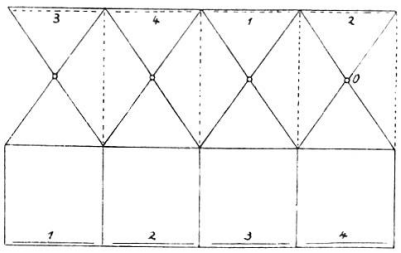
298



Einseitiges 8Flach

Im Netz **299** dieses einseitigen 8Flachs können aber die in O zusammenhängenden gegenüberlie-

299



genden Dreiecke nicht als solche allein verwendet werden; man muß, um den Zusammenhang herstellen zu können, noch eines der seitlichen Dreiecke belassen. Aus den Rechtecken der Diagonalflächen wird daher je nur eines der seitlichen Dreiecke herausgeschnitten, wie oben links **299.** Bei der Aufklappung dieses Netzes verschränken sich dann diese Ausschnitte, und das Modell **298** schließt sich in den Wendestrecken 1—4, an denen die eine Netzseite mit der anderen zusammenstößt zu deren Übergang für die Entstehung der Einseitigkeit. Damit erhalten der Würfelmantel außen und der eine Trichter die eine Netzseite, während der andere Trichter die andere Netzseite zeigt. Das Netz dieses einseitigen Hohlblockes kann auch nach **300** zusammengesetzt werden. Dann zeigt sich aber außen überall die nämliche Netzseite; es fehlen Wendestrecken, und an ihre Stelle tritt einzig O als vierfacher Wendepunkt. Also findet die Wendung der Netzseiten innert der Fläche zweier in O zusammenstoßender Dreiecke statt. Daher kann dieser einseitige Hohlblock auch als 12Flach gezählt werden: $f = 12$, $e = 8$, $k = 20$, wobei O nicht als Ecke zählt, sondern als letzter Rest der Durchdringung besteht, infolge der Einlagerung des Netzes in den Raum.

300

Der **zweiseitige Hohlblock** läßt sich für beliebige n seitige Prismen bilden: $f = 3n$, $e = 3n$, $k = 6n$. Er hat die kleinste Flächenzahl als **9Flach,** entstanden aus dem dreiseitigen Prisma für $n = 3$.

Der **einseitige Hohlblock** entsteht in der beschriebenen Weise nur für gerades $n > 3$, mit $f = 2n$, $e = 2n$, $k = 4n$, nach dem ersten Fall oder ohne Wendestrecken, nur mit O als Wendepunkt der Netzseiten mit $f = 3n$, $e = 2n$, $k = 5n$. Im Grenzfall entsteht daraus der Mantel eines Kreiszylinders mit eingefügtem Kegel als Doppeltrichter, dessen Spitze Durchdringungspunkt für diese einseitige Fläche ist. Dadurch ist der einseitige Schlauch[2] in sehr einfacher Weise ersetzt.

Durch Weglassung einer der Würfelflächen erhält man aus einem Hohlblock einen **Henkel,**[2] wieder zwei- oder ein-

seitig. Von dem an Stelle des weggelassenen Quadrates entstandenen Loche geht ein zusammenhängender Raumteil um den Hohlteil des Blockes, beim einseitigen Henkel bis an den vierfachen Punkt O reichend. Durch Aufsetzung dieser Henkel auf konvexe Polyeder entstehen Vielflache zunehmender Zusammenhangszahl.

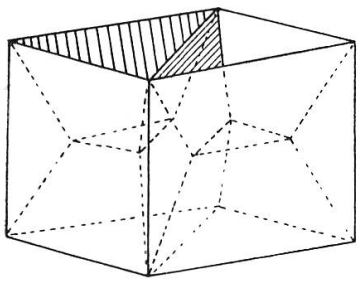
Ein Würfel, an welchem eine seiner Flächen ersetzt wird durch einen angepaßten zweiseitigen Henkel von **297**, ergibt ein **14Flach**: $f = 14$, $e = 16$, $k = 30$, $c = 0$. Entsprechend entsteht aus einem Würfel mit einem angesetzten einseitigen Henkel von **298** ein **10Flach**: $f = 10$, $e = 12$, $k = 24$, $c = 0$.

Allgemein entstehen aus einem n seitigen *Prisma*, mit n *Henkeln* statt der Seitenflächen, folgende zwei Arten von Vielflachen für $n > 2$:

$$A \text{ zweiseitig: } f = 2 + 11n,\ e = 10n,\ k = 23n,$$
$$B \text{ einseitig: } f = 2 + 7n,\ e = 6n,\ k = 15n,$$
$$\text{also } c = -2n + 2,\ h = 2n + 1.$$

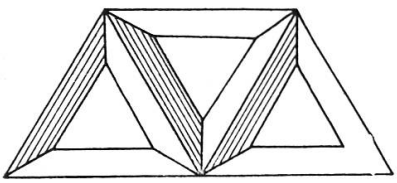
Durch Aneinandersetzen von Henkeln als Zellen z entstehen **Roste**, welche Brezeln [5] entsprechen. Ein Doppelhohlblock mit $z = 2$ ist **301** gezeichnet: $f = 16$, $e = 14$, $k = 32$, $c = -2$, $h = 5$. Ein Rost aus drei nebeneinander gesetzten Zellen ist **302** dargestellt. Setzt man allgemein z solcher Zellen von $n = 3$ aneinander in einer Reihe, so entstehen die Roste: $f = 16 + 6\,(z - 2)$, $e = 14 + 5\,(z - 2)$, $k = 32 + 13\,(z - 2)$, also $c = 2 - 2z$, aber erst gültig für $z > 1$, denn für $z = 1$ besteht der einfache Block: $f = 9$, $e = 9$, $k = 18$. Beim Ansetzen der zweiten Zelle vermehren sich die Seitenflächen um 1, weiterhin aber bleiben immer nur 4 solcher, weil die neu anzusetzende Fläche in die Ebene einer schon vorhandenen Fläche fällt und nicht zählt.

301



Doppelhohlblock z = 2

302

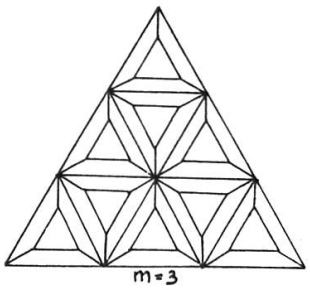


Hohlblockrost z = 3

Für die fortgesetzte Reihe von z nebeneinander gesetzter quadratischer Blöcke **297** als Henkel, ohne innere Würfelflächen, erhält man:

$$f = 12 + 8\,(z - 1),\ e = 12 + 8\,(z - 1),$$
$$k = 24 + 18\,(z - 1).$$

303



Rost z = 9

Durch die Anordnung der Zellen $n = 3$, als Henkel ohne innere Prismenflächen, über einem *Dreieck* **303**, entstehen bei m Zellen an einer Dreieckseite die **zweiseitigen Roste**:

$$f = 6m^2 + 3,\ e = 4m^2 + 3m + 2,$$
$$k = 12m^2 + 3m + 3,$$

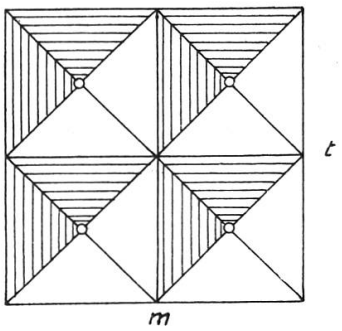
also mit $c = -2m^2 + 2$ oder $c = -2z + 2$ und $h = 2z + 1$, da $z = m^2$.

Ebenso lassen sich aus Zellen nach **298 einseitige Roste** bilden. In einer fortlaufenden Reihe von aneinander gefügten quadratischen Zellen dieser Art erhält man:

$$f = 8 + 4\,(z - 1),\ e = 8 + 4\,(z - 1),$$
$$k = 16 + 10\,(z - 1).$$

Die nämlichen quadratischen Zellen, in Quadraten **304** angeordnet, mit m Zellen an einer Quadratseite, bilden zusammen, unter Weglassung der inneren Würfelflächen als an Henkeln, den einseitigen Rost:

304



Einseitiger Rost m = 2

$$f = 4m^2 + 4,\ e = 2m^2 + 4m + 2,$$
$$k = m^2 + 4m + 4,$$

also $c = -2m^2 + 2$ oder $c = -2z + 2$.

Durch Anordnung dieser quadratischen Zellen **298** in Rechtecken mit den Seiten m und t entstehen die ebenfalls einseitigen Roste:

$$f = 4mt + 4,\ e = 2mt + 2m + 2t + 2,$$
$$k = 8mt + 2m + 2t + 4,\ \text{also } c = -2mt + 2.$$

Alle diese betrachteten Roste, sowohl zwei- als einseitige, haben die ungerade Zusammenhangszahl $h = 2z + 1$. Diese ist also ersichtlich aus der Zahl der Zellen oder Lücken.

Zusammenfassung

Unter den konstruierten Scheitelzellenpolyedern zeigen die einfachen n seitigen Prismen (unter X) mit parallelen Doppelstrecken am übersichtlichsten das Verhalten von Einseitigkeit und Zweiseitigkeit. Das Teilvielflach F_1 mit der inneren Lücke, umgeben von n Zellen, hat die Zusammenhangszahl $h = 3$. Dabei ist es einseitig für ungerades n und zweiseitig für gerades n. Das zugehörige Ergänzungsvielflach F_2 mit dem inneren Prisma als Mittelzelle und mit n angefügten Seitenzellen hat $h = 1$ und ist immer zweiseitig. Das Doppelprisma F_{12}, an einer Mittelebene aus F_1 und F_2 zusammengesetzt, ist einseitig und hat $h = 1 + n$. Zu jeder Zusammenhangszahl $h > 3$ besteht ein solches Doppelprisma für $n = h - 1$. Die dabei noch fehlende Zahl $h = 2$ besteht für die Vielflache mit drei Doppelstrecken, welche einander im Innern im dreifachen Punkt schneiden, und für ein konvexes Polyeder mit einer Kreuzhaube daran.

Für Doppelstrecken im Bündel (XI) bei gerader Seitenzahl des Prismas entsteht mit den beiden Grundflächen als Hauptflächen ein einseitiges Vielflach aus Scheitelzellen und als Ergänzung dazu ein zweiseitiges mit zwei Pyramidenlücken an Stelle der Grundflächen. Die Zusammenhangszahlen werden quadratisch. Aus Prismatoiden (XII) ungerader Seitenzahl entstehen zwei deckungsgleiche einseitige Teilvielflache mit einer Grundfläche und einer gegenüberliegenden Hohlpyramide, womit die beiden Vielflache des vorigen Prismas in eines vereinigt sind.

Ein Ebenenbüschel, gelegt durch die Achse eines Prismas (XV) und noch geschnitten durch eine innere Mantelfläche, hat neben den Doppelstrecken noch eine vielfache Strecke in der Achse. Die Zusammenhangszahl nimmt bei den einfachen radialen Zellenpolyedern linear zu, und sie sind einseitig oder zweiseitig, je nachdem die Seitenzahl durch 4 teilbar ist oder nur durch 2. Die zusammengesetzten dieser ra-

dialen Vielflache sind einseitig, und h wächst quadratisch. Die zentrischen Zellenvielflache (XVI) sind einseitig, mit h quadratisch, und sie führen im Grenzfall zur Kugel.

Der Entscheid über die beiden Arten der Seitigkeit folgt aus der Aufklappung des Netzes sowie aus der Einteilung der Flächen eines Scheitelgebietes des geteilten Polyeders in seine beiden Untergebiete und hängt von der Anordnung der Zellen und Lücken ab. Ihre Berechnung wurde (XIII) an der Teilung eines Quadrates durchgeführt und (XIV) am geteilten Würfel. Bei Vielflachen mit Innenzellen (XVII) sind dabei noch die ins Innere fallenden Wendestrecken zu berücksichtigen.

Die Zusammensetzung der Scheitelzellenpolyeder aus Zellen und Lücken führt im Grenzfall zu gelockerten Raumteilen.

Die ganze Anordnung der betrachteten Vielflache erfolgte nach der Lage der Schnittebenen im konvexen Polyeder und damit auch nach dem räumlichen Zusammenhang der Doppelstrecken, die dann nachträglich auch entstehen aus der Einlagerung des Vielflaches aus dem flächenhaften Netz in den Raum. Denkt man sich ein so entstandenes geschlossenes Vielflach umgeformt, ohne den Zusammenhang der Flächen untereinander zu lösen, so ändern die Doppelstrecken ihre Lage, und sie erweisen sich als nicht der Fläche als solche zugehörend, sondern als durch den Verlauf der Fläche im Raum bedingt. Außer in Bündeln liegen die Doppelstrecken als im allgemeinen Fall in Kanten eines Polyeders. Man kann also die Aufgabe so fassen, daß im Innern eines konvexen Polyeders ein zweites solches angenommen wird, dessen Flächen verlängert werden zu Schnittebenen mit dem äußeren Polyeder. Dadurch wird der Raumteil zwischen den beiden Polyedern in Zellen geteilt, die zwei Scheitelgebiete bilden, so daß die Zellen eines solchen Gebietes nur auf Schnittgeraden der Schnittebenen als Doppelstrecken zusammenstoßen, aber keine Flächen gemeinsam haben. Die beiden so ausgewählten Teilvielflache können zweiseitig bleiben oder einseitig werden, je nach der Anordnung ihrer Zellen. Wenn die Zellen eines Teilvielflaches in zwei Untergebiete ge-

trennt werden können, daß jede Zelle des einen Untergebietes nur an Zellen des anderen stößt und damit jedes der beiden Untergebiete die Zellen des anderen trennt, so bleibt die Zweiseitigkeit erhalten, sonst aber wird sie gestört, und es tritt Einseitigkeit ein, wenn Zellen des nämlichen Untergebietes aneinander kommen. Das innere Polyeder kann auch ausarten und schließlich zu einem Punkte werden.

Damit richtet sich die erste allgemeine Frage dahin, wann überhaupt in einem Raumteil zwei getrennte Scheitelgebiete der Zellen entstehen und wann dann ein solches Scheitelgebiet aus zwei einander trennenden Untergebieten besteht und wann nicht, was dann Einseitigkeit bei der die Zellen einschließenden Fläche zur Folge hat. Auf der räumlichen Anordnung der Scheitelzellen beruhen damit Zweiseitigkeit und Einseitigkeit ihrer Gesamtfläche. Zur weiteren Einsicht in diese allgemeinen Beziehungen kann das Anschauungsmaterial dienen, das in den Scheitelzellenpolyedern hier vorgelegt ist.

Besondere Fälle mit Innenpolyedern sind in den Abschnitten XVII und XVIII ausgeführt. Im Abschnitt XIX ist schließlich noch die Bildung von Vielflachen aus Hohlzellen ohne Doppelstrecken dargestellt, nämlich durch aneinandergesetzte Henkel, wodurch mehrfach zusammenhängende Raumteile entstehen, durch Roste eingeschlossen, die den Brezelflächen entsprechen, zu denen aber auch noch die einseitigen solcher Roste treten. Diese beiden Arten von Rosten aus Hohlzellen stehen im Gegensatz zu den einfachen Würfelrosten im Abschnitt XIV, die durch Doppelstrecken voneinander getrennte Raumteile einschließen. Man gelangt damit zu zwei Arten von abgeschlossenen endlichen Raumteilen oder dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, nämlich zu solchen mit mehrfachem Zusammenhang innert der Grenzfläche und zu solchen mit mehrfacher Trennung durch Doppellinien der gesamten einschließenden Fläche. Diese Fläche stellt den umhüllenden Zusammenhang her zwischen den sonst getrennten Raumteilen der Scheitelzellenpolyeder.

Literatur-Nachweise

[1] **K. Merz,** Parallelflächen und Zentrafläche eines besonderen Ellipsoides und die Steinersche Fläche. Beispiel einer quadratischen Transformation. Beilage zum Programm der Bündner. Kantonsschule. Chur 1914.
Erinnerungen an Prof. Geiser als Lehrer siehe im Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens, LXXV. Band 1938, Seite 89: Das Heptaeder.

[2] **H. Seifert und W. Threlfall,** Lehrbuch der Topologie, 1934, S. 140; Henkel S. 5, 220, einseitiger Schlauch S. 12.

[3] Commentarii Mathematici Helvetici: Der Oktaederoktant oder ein Heptaeder, v. 8, p. 379, 1936; Einseitiges Pentadekaeder, v. 10, p. 1, 1937; Vielflache mit Doppelstrecken, aus Prismen, v. 10, p. 270, 1938.

[4] **Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Einseitige Polyeder aus Oktanten. (Phys.-math. Klasse 1937, II, S. 21.)**

[5] **Hilbert,** Anschauliche Geometrie, 1932, S. 266; Brezel S. 260, Kleinsche Fläche S. 271.

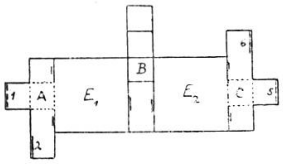
[6] Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrgang 83, 1938, S. 108: Einseitige Polyeder aus dem Tetraeder. Jahrgang 84, 1939, S. 1: Einseitige Ergänzungsvielflache aus dem Tetraedertyp und S. 137: Kreuzhauben aus dem Oktaedertyp; S. 236: Würfelzerlegungen (mit Innen-Tetraeder und -Oktaeder).
Modelle wurden der Sammlung des Mathematischen Institutes der Universität Zürich einverleibt sowie auch der Sammlung der Eidgenössischen Technischen Hochschule.

[7] **Brückner Max,** Vielecke und Vielflache, Leipzig 1900. Tafel I Figur 32 Seite 71, II 2 80, VII 29, VII 31 191, VII 35, VIII 1 191, VIII 18 72, VIII 36 191, VIII 39, IX 2 193, IX 13 138, XII 1 201.

Nachtrag zum Würfelrostblock

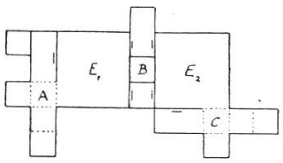
Für die beiden Blöcke 210 und 211 können einfachere Netze als wie 246 und 247 hergestellt werden. Solche Netze sind hier nachgetragen als Netz 305 zum Block W_{13} 210 und als Netz 306 zum Block W_{31} 211, beide für $n = 3$. Von den 6 Schnittflächen, welche den ursprünglichen Würfel in 27 Zellen teilen, sind in diesen Netzen zwei parallele Quadrate E_1 und E_2 ganz gelassen, und an diese sind Quadrate A, B, C als Flächen von Zellen angesetzt, wobei B die Schnittflächen E_1 und E_2 verbindet. An A, B, C sind dann weitere solche Quadrate angesetzt zur Bildung von Zellen und außerdem noch Rechtecke, die mit anderen solchen Quadraten zusammen die übrigen vier Schnittflächen senkrecht zu E_1 und E_2 nach der Aufklappung bilden. Die Netze sind in 305 und 306 nur teilweise gezeichnet. A und B, samt den anstoßenden Flächen, sind entsprechend 4 mal an den Seiten von E_1 anzusetzen und ebenso C 4 mal an E_2, wodurch dann im Netz Flächen übereinander kommen.

305



Am Netz **305** wird A nach oben geklappt, zu der Zelle oben links am Block 210, und B nach unten, für die hintere Zelle rechts in der mittleren Zellenschicht. Dann ist E_2 weiter zu klappen bis parallel zu E_1 und C entgegen für die Zelle unten links. Die übrigen Flächen des vervollständigten Netzes sind entsprechend zu klappen zur Bildung der weiteren Zellen. Dadurch werden 1, 2, .. Wendestrecken am oberen Rand der mittleren Lücke oben und 5, 6 .. an dem unteren Rand der gegenüberliegenden Lücke unten. Der Block 210 wird durch diese 8 Wendestrecken also einseitig. Die 4 oberen und die 4 unteren Zellen zeigen die Unterseite des Netzes, welche in den Wendestrecken an dessen Oberseite stößt, die in dem Innern der von diesen Zellen eingeschlossenen Lücken sichtbar wird. Die übrigen 4 Zellen, die in der mittleren Schicht liegen, zeigen die Oberseite des Netzes. Diese 4 Zellen stoßen also mit den Zellen anderer Netzseite der oberen und unteren Schicht zusammen in ihren 16 Ecken, so daß nach diesen Ecken keine Wendestrecken gehen.

Solche verbinden nur Ecken, in denen Zellen mit gleicher Netzseite zusammenstoßen, als mit Flächen des einen Untergebietes, wodurch der Übergang zur Einseitigkeit in den Wendestrecken entsteht. Dieser Block 210 hat zu den 12 äußeren Zellen noch eine innere Zelle, so daß er aus 13 Zellen besteht. Diese innere Zelle zeigt in der oberen und unteren Lücke die Oberseite des Netzes und in den 4 seitlichen Lücken dessen Unterseite. Die Kanten der inneren Zelle liegen in den 12 Doppelstrecken, in denen die 6 Schnittflächen einander durchdringen. Die Flächenteile der vier Schnittflächen, die senkrecht zu E_1 und E_2 stehen, fügen sich überall gleichseitig aneinander, so daß in den Doppelstrecken keine Wendestrecken entstehen. Dieser Block 210 stellt ein 30Flach dar. Ein entsprechendes Netz wie 305 kann auch zum 30Flach 244 zusammengesetzt werden.

Am Netz **306** für den Block 211 wird A nach oben geklappt zur Zelle oben links vorn und B nach unten zur mittleren Zelle rechts. Dann ist E_2 weiter zu klappen bis parallel E_1, so daß dann C an die untere Zelle links vorn kommt. Entsprechend werden die übrigen Zellen gebildet. Am Block entstehen 14 Zellen um einen Hohlwürfel als innere Lücke, nämlich die 6 Zellen über den Flächen des Hohlwürfels und die 8 Zellen an dessen Ecken. Der Hohlwürfel ist über seinen Kanten in Scheitellage zu den 12 äußeren Lücken des Blockes. Durch die Aufklappung schließen sich alle Flächen des Netzes gleichseitig aneinander, so daß der Block 211 zweiseitig wird. Die 8 Eckzellen zeigen die untere Netzseite und die übrigen 6 Mittelzellen die obere. Jede Zelle stößt also außen in Ecken nur mit Zellen anderer Netzseite zusammen, so daß also die Flächen mit Oberseite und Unterseite des Netzes je 2 getrennte Untergebiete im Scheitelgebiet der Gesamtflächen bilden und kein Übergang zwischen den beiden Untergebieten stattfindet, was die Zweiseitigkeit der Gesamtfläche des Blockes bedingt, der ein 36Flach darstellt. Ebenso ist damit auch das 36Flach 245 zweiseitig.

306