Zeitschrift: Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubünden

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Graubünden

Band: 57 (1916-1917)

Artikel: Zur Erkenntnistheorie über Raum und Zahl aus Historischem der Steinerschen Fläche

Autor: Merz, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-594848

Zur

Erkenntnistheorie über Raum und Zahl

aus Historischem der Steinerschen Fläche*.

Von Dr. K. Merz.

Ein Rückblick über die Literatur zur Steinerschen Römerfläche ist von doppeltem Interesse: indem er einerseits zeigt, auf welche verschiedene Arten das Problem behandelt wurde, wie an ihm neue Methoden sich entwickelten oder darauf Anwendung fanden, sowie, indem er anderseits allgemeinere, erkenntnistheoretische Aussichten eröffnen kann, aus den Beziehungen der anschaulich geometrischen Einsichten zu den Darstellungen arithmetischer Zusammenhänge in den algebraischen Formen. Je mehr sich nämlich die ihrem Anspruche nach vornehmste Methode der Deduktion als unzuverlässig erwiesen hat, die Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis darzulegen, um so notwendiger wird es sein, auf empirischem Wege den leitenden Grundsätzen nachzuspüren, denen die Forschung in ihrer historisch festgelegten Entwicklung gefolgt ist, indem die im momentan produktiv wirkenden Geiste als Einheit wirkenden Kräfte dort in ihren, den verschiedenen Verhältnissen angepaßten Erscheinungsformen eher wahrnehmbar sein können. Der die Entwicklung der Wissenschaft gleichsam von außen verfolgende spätere Beobachter wird in ihr zuverlässiger die der Gedankentätigkeit zugrunde liegenden Gesetze erkennen, als der nur aus sich selbst schöpfende Denker, der dadurch, daß er seine Denkgesetze finden will, die Denktätigkeit nach einseitigen Prinzipien zu zwingen verleitet wird.

---

* Ausführung eines Vortrages in der Sitzung der *Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft* vom 8. August bei Anlaß der Jahresversammlung 1916 der *Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft* in *Schuls.*

Doch kann bei der historischen Betrachtungsweise eine andere Schwierigkeit vorliegen, die nicht außer acht zu lassen ist, daß nämlich eine Entdeckung oder fruchtbare Idee nicht in dem literarisch angelegten Gewande ursprünglich erschienen ist, daß die Möglichkeit vorliegt, daß sich weit ausholende Theorien und daran schließende Deduktionen um den Kern gewunden haben, dem sie ihren ganzen Bestand verdanken.

Solche historische Betrachtungen, mit dem allgemeinen Ziel der Erforschung der Natur des Denkens, könnten besonders auf dem Gebiete der Mathematik von Bedeutung sein, indem die Anschauung des Raumes und der Vorgang der Konstruktion, sowie der Begriff der Zahl und der Rechnungsoperationen in ihrem Wesen aufgefaßt die Erkenntnistheorie begründen helfen.

Der erste Abschnitt bespricht die einzelnen Lösungen des Problems der Steinerschen Fläche, während der zweite die Verallgemeinerungen auf Grund algebraischer Formen angibt. Im dritten Abschnitt wird versucht, die verschiedenen Methoden der Behandlung erkenntnistheoretisch zu deuten und im vierten ist zur Ergänzung die Veranschaulichung der nichteuklidischen Geometrie besprochen. Der fünfte Abschnitt: Idealgeometrie und Weltgeometrie gibt eine Zusammenfassung der Ergebnisse.

Der dritte und fünfte Abschnitt können für sich allein gelesen werden ohne besondere mathematische Einzelkenntnisse.

I. Die Steinersche Fläche.

Nach einer Mitteilung von Herrn Prof. *Geiser*[1] hat sich *Jakob Steiner* dahin ausgesprochen, daß er, vom Satz über den rechten Winkel mit dem Scheitel auf dem Umfang eines Kreises ausgehend, zur Konstruktion seiner Römerfläche gelangt sei. Wie auch dieser rechte Winkel um seinen Scheitelpunkt gedreht wird, die Schnittpunkte seiner Schenkel mit dem Kreis ergeben als Verbindungsgeraden immer Durchmesser, also lauter Sehnen, die alle durch den nämlichen festen Punkt gehen. Dieser elementare Satz, den jeder Anfänger der Geometrie als den vom

[1] *C. F. Geiser*: Zur Erinnerung an Jakob Steiner. Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft 1873.

Peripheriewinkel über dem Halbkreis kennen lernt, bildet also den Keim zu der weitgehenden geometrischen Spekulation, die Steiner zur Entdeckung seiner Fläche führte. Er ersetzt zunächst die Gesamtheit jener rechten Winkel durch ein allgemeines involutorisches Strahlenbüschel und den Kreis durch einen Kegelschnitt und erhält dabei wieder einen festen Punkt, durch den alle Sehnen gehen, welche je von einem Strahlenpaar des Büschels durch seine Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt bestimmt werden. Dann überträgt Steiner diese Eigenschaft auf den Raum, indem er den Kegelschnitt durch eine Fläche F zweiter Ordnung ersetzt, auf welcher er den Scheitel O eines polaren Strahlenbündels annimmt, welches aus unendlich vielen Tripeln konjugierter Strahlen besteht. Ein solches Tripel hat mit der Fläche F drei Durchstoßpunkte, die eine Ebene bestimmen. Zum Strahlenbündel O gehören dadurch unendlich viele solcher Ebenen, die alle durch den nämlichen Punkt S gehen, welcher ein Punkt der Steinerschen Fläche ist. Der einfachste und anschaulichste Fall eines Strahlentripels ist das von drei zueinander senkrechten Strahlen gebildete, das Steiner gelegentlich rechtwinkliges Dreibein nennt; es stellt drei konjugierte Durchmesser einer Kugel dar. Verallgemeinert bildet die Gesamtheit aller konjugierten Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung G ein polares Strahlenbündel. Die Strahlen des Bündels von O aus können also parallel gedacht werden zu den konjugierten Durchmessern einer beliebig außerhalb gedachten Fläche G. Zur ersten angenommenen Fläche F mit dem darauf liegenden Punkte O bestimmt also eine zweite Fläche G einen Punkt S der Steinerschen Fläche.

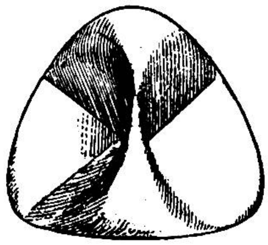
An die das polare Strahlenbündel bestimmende Fläche G wird ein Büschel solcher Flächen gefügt, die alle durch die nämliche Schnittkurve gehen. Dem Büschel entsprechen dann alle Punkte S, die auf einem Kegelschnitte k der Steinerschen Fläche liegen. Schließlich wird das Büschel aus G zu einem Bündel von Flächen zweiter Ordnung erweitert, die alle durch acht Grundpunkte gehen. Den unendlich mal unendlich vielen Flächen G des Bündels entsprechen alle Punkte auf einer Steinerschen Fläche, auf welcher unendlich viele Scharen von Kegelschnitten k liegen.

Die auf diese Art entstehende Fläche wird auch Römerfläche genannt, weil *Steiner in Rom* 1843 diesem Gedankengange folgte. Steiner selbst hat über diese Fläche nichts veröffentlicht.

Der zur Bestimmung eines Punktes *S* der Steinerschen Fläche verwendete Satz vom polaren Strahlenbündel in *O* auf F wurde, wie Weierstraß angibt, von *Hesse* 1837 analytisch bewiesen in der Abhandlung über Flächen zweiter Ordnung (Journal von Crelle 18), wo er ihn zur Konstruktion der Hauptachsen verwendet in Anlehnung an Arbeiten von Poncelet und Dupin. In Reye, Geometrie der Lage, 2. Teil (S. 270) wird der Satz nach *Frégier* benannt (Annales de Math., Gergonne. VII. p. 97) und nach *Schröter* (Crelle 64) synthetisch bewiesen. Cremona verweist auf *Chasles* 1837 bei seiner Ableitung.

Erst nach dem 1863 erfolgten Tode Steiners fand die Erforschung der Römerfläche ihre Fortsetzung, indem vorerst *Kummer* in seiner Abhandlung, vom 16. Juli 1863 in den Monatsberichten der Berliner Akademie „über Flächen vierten Grades, auf welchen Scharen von Kegelschnitten liegen“ (Crelle 64), eine Gleichung der Steinerschen Fläche aufstellte und zwar ausgehend von der Eigenschaft, daß Scharen einfach berührender Ebenen aus der Fläche (zwei) Kegelschnitte schneiden. Die aufgestellte Gleichung ist eine Verallgemeinerung des Falles, daß die drei Doppelgeraden der Fläche als Koordinatenachsen angenommen werden. Kummer erwähnt auch zugleich, daß Weierstraß die Koordinaten eines Punktes der Fläche durch Funktionen zweiten Grades von zwei Parametern berechnete. In einer der Abhandlung von Kummer zugefügten Note teilt *Weierstraß* noch folgendes mit:

„Auf diese merkwürdige Fläche, welche Herr Kummer in seinem Vortrage als eine von Steiner entdeckte anführte, ist dieser, wie ich von ihm erfahren habe, gekommen, als er sich vor etwa 25 Jahren mit Untersuchungen über polare Beziehungen zwischen Punkten und Systemen von Linien und Flächen zweiten Grades beschäftigte. Da ich Grund habe zu bezweifeln, daß in den hinterlassenen Papieren unseres verstorbenen Kollegen über diesen Gegenstand etwas Zusammenhängendes finden werde, so möge es mir gestattet sein, bei dieser Gelegenheit das mir vor einigen Jahren darüber Mitgeteilte, so unvollständig es sein möge, bekannt zu machen. — — Diese Fläche (von Steiner) ist identisch mit der von Hr. Kummer aufgestellten, indem sie die charakteristischen Eigenschaften der letzteren besitzt. Steiner hatte nämlich gefunden, daß wenn man einen der bezeichneten Kegelschnitte *(k)* betrachtet, in der Ebene desselben stets noch ein zweiter liege und daraus den Schluß gezogen, daß die Fläche vom vierten Grade sein müsse. Ferner hatte er erkannt, daß die Ebene zweier solcher Kegelschnitte in einem der vier Durchschnittspunkte derselben die Fläche berühre, und daß der geometrische Ort der drei andern ein System von drei Geraden sei, die in der Fläche liegend, sich in einem ausgezeichneten Punkte derselben schneiden."



Steinersche Fläche.
(Aus dem Katalog math. Modelle des Verlages Martin Schilling in Leipzig).

Kummer hat ein Modell der Steinerschen Fläche angefertigt (Monatsberichte der Berliner Akademie 1863. S. 539), von welchem der Verlag Martin Schilling in Leipzig Abgüsse liefert. Nach einem solchen sind die beigegebenen Bilder aufgenommen worden.

Die erste Ausführung der von Steiner angeregten Konstruktion seiner Fläche erfolgte bald darauf durch *Schröter* unter dem 26. Nov. 1863 in den Monatsberichten der Berliner Akademie in der Abhandlung: „Über die Steinersche Fläche vierten Grades" (Crelle 64). Das nach Steiner anzuwendende Bündel der Flächen G ersetzt Schröter durch ein Kegelschnittnetz in einer Ebene, das von einem außerhalb liegenden Punkte *O* auf F die polaren Strahlenbündel liefert. Einem der Kegelschnitte des Netzes entspricht dann ein Punkt *S* der Steinerschen Fläche, und jedem der im Netz enthaltenen Kegelschnittbüschel entspricht ein Kegelschnitt *k* der Fläche. Die gegenseitige Lage dieser *k* ist dann ableitbar aus den Beziehungen der Kegelschnittbüschel des Netzes, zu welchem eine Tripelkurve dritter Ordnung gehört. Damit beweist Schröter die von Steiner angegebenen Eigenschaften der Kegelschnitte auf der Fläche. Er weist auch den vierten Grad und die dritte Klasse der Fläche nach. Die drei Doppelgeraden gehen von *O* aus, dem dreifachen Punkt der Fläche.

Diese Untersuchung der Fläche nach *synthetischer Methode* bringt noch wesentliche Ergänzungen durch *Cremona* in der Abhandlung vom 12. Februar 1864: „Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents" (Crelle 63). Die Eigenschaften des Kegelschnittnetzes, das Schröter annimmt, werden aus polaren Eigenschaften einer Kurve dritter Ordnung abgeleitet. Die Kuspidalpunkte werden erkannt, die zu zweien auf jeder Doppelgeraden liegen und die vier singulären Tangentialebenen, welche die Fläche längs Kegelschnitten berühren. In reicher Fülle werden Eigenschaften erwiesen, womit die von Steiner angeregte Konstruktionsmethode ihren größten Erfolg zeigt.

Auch die analytische Behandlung der Steinerschen Fläche wird weiter geführt und zwar vorerst in Verfolgung des von Steiner gewiesenen Weges und mit dem von Weierstraß bereits gegebenen Ziele. *Cayley* geht in der Note vom 26. Mai 1864 (Crelle 64) von den eine Fläche zweiter Ordnung S einhüllenden Ebenen aus, die zwei Flächen F u. G zweiter Ordnung in Kegelschnitten *f* u. *g* schneiden, von denen *f* unendlich viele Tripel von Punkten besitzt, die konjugiert zum andern *g* sind. Dann wird G als Kegel spezialisiert, dessen Spitze *O* auf F liegt. S reduziert sich dann auf zwei Punkte *O* und einen Punkt *S* der Steinerschen Fläche. Durch Erweiterung des Kegels G zu einem Kegelbündel treten drei homogene Parameter in die Rechnung ein, und der geometrische Ort von *S* wird in Punktkoordinaten erhalten, die proportional sind zu quadratischen Funktionen dieser Parameter. Der Gang der Rechnung ist symbolisch angedeutet. Weitere Folgerungen fehlen. Nach dieser Methode folgt auch im Wesentlichen die Parameterdarstellung der Steinerschen Fläche aus einer Simultaninvarianten zweier quadratischer Formen, von denen die eine die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung in Punktkoordinaten und die andere in Ebenenkoordinaten gibt.

Erst durch *Clebsch* wird 1867 (Crelle 67) mittelst der Abbildung der Fläche auf eine Ebene die analytische Methode zur Entwicklung der Eigenschaften der Steinerschen Fläche fruchtbar angewendet. Aus der von Kummer gegebenen Gleichung wird eine einfache Parameterdarstellung der Punktkoordinaten der Fläche gegeben, auf welche diejenige durch allgemeine Funktionen zweiten Grades in drei homogenen Parametern stets gebracht werden kann. Auch wird die Darstellung durch Quadrate linearer Funktionen der drei Parameter angegeben, woraus die Haupttangentenkurven, die 4. Ordnung 2. Art sind, leicht angegeben werden können, da sie in der Abbildung als einem Vierseit eingeschriebene Kegelschnitte erscheinen. Eine einfache und übersichtliche Entwicklung der Eigenschaften der Steinerschen Fläche nach dem Vorbilde Clebschs ist von *Lacour* 1898 erschienen (Nouvelles annales de Math. 3. p. 437 und 499). In *Gerbaldi:* „La superficie di Steiner...“, Torino 1881, werden die Ergebnisse aus der allgemeinen ebenen Abbildung mit Hilfe der Lehre von den ternären quadratischen Formen entwickelt.

Die von Clebsch angewandte Abbildung der Steinerschen Fläche auf eine Ebene, in welcher die in den quadratischen Funktionen auftretenden Parameter als homogene Koordinaten gedeutet werden, führt zu einer neuen Betrachtungsweise der Fläche, nämlich zu der durch quadratische Transformation, welche sowohl die synthetische als die analytische Methode befolgend, in gegenseitiger Beeinflussung, zu dem einfachsten und übersichtlichsten Wege führt, die Fläche kennen zu lernen. Diese Methode wurde zuerst durch *Berner* angegeben: De transformatione secundis ordinis. Diss. inaug. Berolini 1864.

Unmittelbar nach Clebsch hat nämlich *Reye* in der „Geometrie der Lage“, wie aus dem Vorwort vom 5. Oktober 1867 sich ergibt, die Steinersche Fläche aus dem Gebüsch der Flächen zweiter Ordnung und ihrer projektiven Beziehung zu den Ebenen des Raumes erhalten (III. Abt. 4. Aufl. 1910. S. 143 und 149). Vier Flächen F zweiter Ordnung, die nicht im nämlichen Büschel liegen, bestimmen ein Gebüsch, welches das Bündel aus dreien enthält und noch alle Büschel aus den Flächen im Bündel und der vierten Fläche gebildet. In bezug auf einen angenommenen Punkt werden die F dessen Polarebenen E zugeordnet. Jedem Flächenbüschel entspricht damit ein Ebenenbüschel. Einer Ebene I im Raume der F angenommen entspricht eine Steinersche Fläche S im Raume der E. Den F, welche I berühren, entsprechen Tangentialebenen E der Fläche S. Die Beziehungen der Flächen F des Gebüsches zu der Ebene I werden umgedeutet in Beziehungen von Ebenen E zur Steinerschen Fläche S. Ferner wird noch als besonderer Fall (S. 248) das Gebüsch der Flächen mit gemeinsamem Poltetraeder betrachtet. Die Diagonalen des Vierseits, welches die Ebene I aus dem Tetraeder schneidet, entsprechen den Doppelgeraden der Steinerschen Fläche S. Dieses Verfahren der Zuordnung von Ebenen zu Flächen zweiter Ordnung, dem eine quadratische Transformation zugrunde liegt, gestattet auf eine leichtere Weise zu einem Überblick über die Eigenschaften der Steinerschen Fläche zu gelangen, als es durch die ursprüngliche Konstruktion möglich ist, die zwar den Vorzug hat, das Problem in schöner, einleuchtender Weise vorzuführen, aber in seiner Ausführung bald in verwickelte Einzelheiten führt. Eine eingehende Darstellung: über die Flächen zweiten Grades, welche ein gemeinsames Poltetraeder haben, gibt *Meister* (Zeitschrift für Math. u. Phys. 34. 1889).

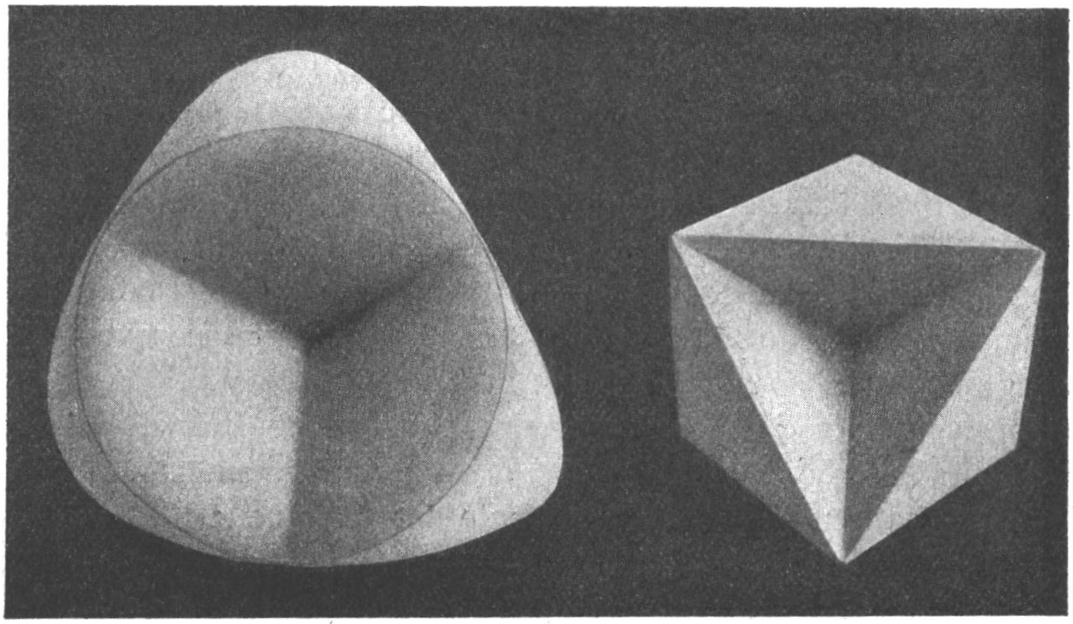
Auf eine andere synthetische Weise und zwar als besondere Fläche dritter Klasse wurde „Die Römische Fläche von Steiner“ noch 1871 von *Sturm* (Math. Annalen 3.) aus einer Flächenschar zweiter Klasse konstruiert, also aus den Flächen zweiten Grades F die acht Ebenen berühren, mit Hilfe ihrer Tangentialkegel von den auf die Flächen projektiv bezogenen Punkten einer Geraden aus, welche aber die besondere Lage hat, zwei der vier Kegelschnitte, zu denen die F ausarten, zu treffen. Die Tangentialkegel umhüllen dann eine Steinersche Fläche. Die angenommene Gerade wird zu einer Doppelgeraden und ihre zwei Stützpunkte werden zu Kuspidalpunkten der Fläche. Dabei erfahren besonders die allgemeinen und besonderen Tangentialkegel und ihre Berührungskurven eine eingehende Betrachtung und ferner die Schnittkurven mit Flächen zweiter Ordnung. Die Konstruktionsmethode von Sturm erweist sich als sehr geeignet, viele

Einzelnheiten über die Eigenschaften der Steinerschen Fläche abzuleiten.

Auf eine Anwendung der einfachsten quadratischen Transformation in synthetischer Darstellung sei noch hingewiesen: *Stahl* „Zur Theorie der Zentrafläche des Ellipsoids", 1885 (Crelle 101), worin aus der abwickelbaren Fläche der Haupttangentenkurve der Steinerschen Fläche die Zentrafläche abgeleitet wird. Diese besitzt Rückkehrkegelschnitte, die in den acht Ebenen liegen, auf deren jede die Steinersche Fläche abgebildet werden könne (S. 94). In den einleitenden Abschnitten wird aus zwei Raumkurven dritter Ordnung, die auf dem nämlichen Kegel zweiter Ordnung liegen, die Reziproke der Steinerschen Fläche mit ihren Haupttangentenkurven konstruiert. Diese besitzen Spitzen in den vier Knotenpunkten der Fläche. Entsprechend sind die vier singulären Tangentialebenen der Steinerschen Fläche, welche diese in Kegelschnitten berühren, die vier Wendeebenen ihrer Haupttangentenkurven. Diese Abhandlung: „Die Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse" enthält eine Zusammenfassung der Eigenschaften dieser Kurve, aus welchen die Ergebnisse für die Zentrafläche durch quadratische Transformation gewonnen werden.

Eine weitere Anregung zur analytischen Behandlung dieser Methode wird in *Reye* „Über quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittscharen" (Math. Annalen 48) 1897 gegeben. Durch allgemeine quaternäre quadratische Formen werden die homogenen Koordinaten x der Punkte des Raumes transformiert in Koordinaten y, so daß die Ebenen E in y einem Flächengebüsch F in x entsprechen. Umgekehrt entspricht einer Ebene I in x eine Steinersche Fläche S in y. Von besonderer Bedeutung wird die einfachste quadratische Transformation, welche die Quadrate der x als neue Koordinaten y nimmt, weil diese Annahme am leichtesten die Eigenschaften der Steinerschen Fläche aus der Abbildung auf eine Ebene erkennen läßt. In Timerding: „Über die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamem Poltetraeder übergeführt werden" (Annali di Mat. III. 1. 1898), findet sich eine eingehende Entwicklung der allgemeinen Eigenschaften dieser Raumtransformation, sowie die Anwendung außer auf andere Flächen auch auf die Steinersche Fläche (S. 112) mit Angabe der Entstehung der bereits früher aufgestellten Gleichungen der Fläche nach dieser Betrachtungsweise. Die Abbildung der Steinerschen Fläche wird auf die eine von acht assoziierten Ebenen, von denen jede verwendet werden kann, ausgeführt. Mit dieser ausschließlichen Berücksichtigung von nur einer Ebene, die der früheren Abbildungsweise von Clebsch folgt, geht aber der räumliche Zusammenhang der einzelnen Teile der Fläche in der Abbildung verloren.

Unter der Annahme dagegen, daß alle jene acht Ebenen gleichberechtigt seien und unter Weglassung dafür der durch Involution bezw. Symmetrie entstehenden Wiederholungen oder Spiegelungen erhält man eine räumliche Abbildung der Steinerschen Fläche, bestehend in einem Oktaederoktanten[1], dessen einzelne ebene Teile den Verlauf der Fläche darstellen mit ihren Singularitäten und ihrer Selbstdurchdringung in den Doppelgeraden.



Steinersche Fläche und Oktaederoktant

[1] *K. Merz.* Die Steinersche Fläche in quadratischer Transformation. Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft 1914. II. S. 102.

II. Zur biquadratischen Form.

In dem bisher gezeichneten Entwicklungsgang über die Erforschung der Steinerschen Fläche wurde ihre Konstruktion auf synthetische Weise aus Verbindungen von Flächen zweiten Grades ausgeführt und es wurden analytisch ihre Eigenschaften aus der Gleichung der Fläche abgeleitet und zwar vornehmlich durch Abbildung auf eine Ebene, wobei Kurven auf der Fläche durch solche von der Hälfte des Grades in der Ebene ersetzt wurden, woraus die Methode der quadratischen Transformation sich bildete, welche weiter durch Anwendungen in synthetischer Art angeregt auch in analytischer Form die Entstehung der Fläche aus einem aus Ebenen zusammengesetzten Gebilde zeigte. Diese letztere Entstehungsart macht zwar, da man aus der projektiven Geometrie an die Erhaltung der Ebenen gewöhnt ist, vorerst den Eindruck von gewaltsamen Verbiegungen und von unnatürlichen Umdeutungen räumlicher Gesetze. Doch hat sie dafür den Erfolg, daß sie die einfachste Art gibt, um aus dem leicht als Modell herzustellenden Oktaederoktanten eine Vorstellung von der Gestalt der Steinerschen Fläche und ihrer Eigentümlichkeiten zu geben.

Die Abbildnug auf eine Ebene durch quadratische Funktionen von Parametern führte auch zum Nachweis der Eigenschaften der Fläche aus der Lehre der ternären quadratischen Formen, also zu ihrer Festlegung in dem allgemeinen System dieser Formen, unabhängig von besonderen geometrischen Annahmen. Diese Richtung zeigt sich im ferneren noch ausgesprochener im Zusammenhang der Steinerschen Fläche mit der rationalen Raumkurve 4. Ordnung 2. Art, ihrer Haupttangentenkurve, durch welche die Fläche zu einem Resultat von Berechnungen im System der biquadratischen Formen wird. Darin zeigt sich das Bestreben, die Ergebnisse, die aus einzelnen besonderen Lösungsarten erzielt wurden, in die allgemeinen Gesetze der Formenlehre endgültig einzureihen, sie also von der geometrischen Anschauung, aus welcher sie ihre Anregung erhielten, vollständig unabhängig zu machen, die Raumgebilde ganz durch algebraische Formen zu ersetzen.

In vollendeter Weise vereinigt *Laguerre* beide Methoden, indem er von anschaulich geometrischen Einsichten geleitet (Oeuvres II. p. 275), zu ihrer Verfolgung durch die analytische Methode übergeht (Recherches analytiques sur la surface réciproque de la Surface de Steiner, O. II 281 oder Nouvelles Annales de Math. 1872/73), worauf er noch nachträglich eine geometrische Darlegung seiner Abbildungsart bietet: Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la Réciproque de la Surface de Steiner (O. II 319). Bei dieser sehr interessanten, eine reiche Menge tief liegender Ergebnisse fördernder Untersuchungen, spielt ein eigenartiger Satz eine führende Rolle sowohl als Ziel der anhebenden Untersuchung wie auch als Ausgang zu weiteren Forschungen. Die zur Steinerschen Fläche reziproke Fläche K, die kubische Fläche mit vier Doppelpunkten, besitzt von jedem ihrer Punkte aus zwei Tangentialkegel zweiter Ordnung, welche K in kubischen Kurven berühren. Die von den Tangenten dieser Berührungskurven gebildeten Developpablen schneiden nun aus K zwei Haupttangentenkurven heraus. Die Grundlage der Berechnung bildet eine biquadratische Form, deren Koeffizienten lineare Funktionen kartesischer Raumkoordinaten sind. Diese Form gibt die Gleichung einer beweglichen Ebene, welche die Developpable der Haupttangentenkurve auf K einhüllt. Die Doppelkurve dieser developpablen Fläche ist eine biquadratische Kurve, die auf der zu K polarreziproken Steinerschen Fläche liegt, bezüglich der Fläche zweiter Ordnung, die von der quadratischen Invarianten der ursprünglichen Form gebildet wird. Die Abhandlung enthält zugleich die Theorie der Raumkurve 4. Ordnung 2. Art. Die Rechnungsführung ist ein Kunstwerk in allen Einzelnheiten der Anwendung von Substitutionen und von Invarianten.

In *Eckardt* „Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes“ (Math. Annalen V 1872) findet sich auch die Zuordnung einer Ebene zu der Reziproken der Steinerschen Fläche mittelst reziprok genommener Punktkoordinaten. Aus den gemeinschaftlich umhüllenden Kegeln zweier solcher Flächen K mit gemeinsamen Doppelpunkten folgt die Durchdringung zweier Steinerscher Flächen, die einem Tetraeder eingeschrieben sind, in acht

Kegelschnitten. (Diese Durchdringung folgt auch unmittelbar aus den Schnittgeraden zweier Oktaederoktanten, wobei auch die gegenseitige Lage der entstehenden acht Kegelschnitte ersichtlich ist.)

Die nahe Beziehung der Steinerschen Fläche zu den biquadratischen Formen wird auch in *Bertini:* Sulla curva gobba die 4⁰ ordine 2a specie (Rendiconti dell' Ist. Lombardo V 1872) durch das Ergebnis dargelegt, daß die Ebenen, welche diese Raumkurve in harmonischen Punkten schneiden, eine Steinersche Fläche einhüllen. Die Berechnungen nehmen eine besondere Lage des Koordinatensystems zur Kurve an.

In *Beltrami:* Ricerche di Geometria analitica 1879 (Opere III p. 168) werden die Raumkurve 4. Ordnung 2. Art und die Steinersche Fläche als die bedeutendsten Beispiele behandelt für eine allgemein aufgestellte Funktion, die linear in n Variablen ist und in den Nennern der einzelnen Glieder Potenzen gleichen Grades je von einem Binom, linear in einem Parameter, besitzt, von solcher Bildungsweise, daß ihre n Variablen proportional gesetzt werden können zu Parameterausdrücken, die aus der allgemeinen Funktion entstehen. Diese Funktion bedeutet in den Anwendungen eine Ebene, die nach den Parametern ihre Lage ändert und eine Kurve oder Fläche einhüllt, die dann sogleich eine Parameterdarstellung ihrer Punktkoordinaten erhalten. Dadurch wird eine einheitliche Aufstellung der Gleichungen erzielt für die Kegelschnitte und die Haupttangentenkurven auf der Steinerschen Fläche und für die Berührungskurven eines Tangentialkegels von einem Punkt der Fläche aus, auch mit Verwendung der Abbildung auf eine Ebene. Aus dieser Methode, die also vornehmlich von der Bewegung einer Ebene im Raum nach Parametern bestimmten Grades ausgeht, läßt sich auch schön ersehen, wie die Tangentialebenen, die in den Punkten eines Kegelschnittes der Steinerschen Fläche gelegt werden, eine kubische Raumkurve einhüllen.

Eine übersichtliche Darlegung findet sich in *Rohn:* „Die Raumkurve 4. Ordnung 2. Spezies“ (Leipziger Berichte 1890 II, 1891 I), worin die bisherigen nach verschiedenen Methoden gefundenen Ergebnisse über diese Kurve und ihre Beziehung zur Steinerschen Fläche zusammengefaßt erscheinen in einheitlich geführter Berechnung, begünstigt durch eine besondere Wahl des Koordinatentetraeders gebildet aus den Hauptsehnen der Kurve, die zugleich Doppelgeraden der Fläche sind, und ihrer Hauptebene, welche diese Sehnen bezüglich des Dreifachen Punktes harmonisch teilt. Von den Raumkurven dritter Ordnung, die Oskulanten zu dieser auf der Steinerschen Fläche liegenden Raumkurve 4. Ordnung sind und auf ihrer Developpablen liegen, wird nachgewiesen, daß ihre Schmiegungsebenen die Fläche einhüllen (was in Umkehrung dem Ergebnis im vorigen Absatz entspricht). Nach Berechnungen aus den Gleichungen dieser Abhandlung sind Faden Modelle der abwickelbaren Fläche der Kurve hergestellt worden (Martin Schilling, Leipzig, Katalog math. Modelle, Serie XXI).

Die bisher genannten Arbeiten nahmen die Kurve 4. Ordnung 2. Art. und damit die durch sie gelegte Steinersche Fläche, die sie zur Haupttangentenkurve hat, in besonderer Lage zum Koordinatensystem an, um die Berechnungen zu vereinfachen und vollständig durchführen zu können. In *Berzolari:* Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi all curve gobbe razionali del quart' ordine (Annali di Mat. II. 20) 1892 wird nach Vorarbeiten von *Armenante* und ferner von *Groß:* „Über die Kombinanten binärer Formensysteme" (Math. Annalen 32) 1887, die große und umfangreiche Arbeit geleistet, ausgehend von vier allgemein angenommenen biquadratischen Funktionen eines Parameters, welche die homogenen Raumkoordinaten eines Punktes darstellen, die Eigenschaften der Kurve in daraus entwickelten symbolisch angedeuteten Formen anzugeben. Als Grundlage dient der Satz von *Gordan* (Math. Annalen 5. 1872), nach welchem die Kombinanten der vier angenommenen Formen zugleich die In- und Kovarianten einer einzigen erzeugenden Funktion sind, die als Determinante in vier Reihen der Parameterwerte der ursprünglichen Formen geschrieben werden kann. Dazu treten noch erweiterte Kombinanten mit Reihen von Koordinaten. Von den sieben hier vorkommenden elementaren Kombinanten stellen zwei die Schmiegungsebene und die Ebene dar, welche durch drei Kurvenpunkte geht, deren Schmiegungsebenen sich in einem Punkte der Kurve treffen, der dann auch in dieser Ebene liegt. Aus diesen beiden elementaren Kombinanten wird die Gleichung der Steinerschen Fläche gebildet. Die Abhandlung enthält eine solche Menge von Formen, daß die früheren aus geometrischen Überlegungen erwachsenen Ergebnisse gering erscheinen gegenüber dieser Vielgestaltigkeit, woraus die weite Überlegenheit der algebraischen Formenlehre über die geometrische Anschaubarkeit hervortritt.

Schließlich sei noch die Note von *Brill:* „Über die Gleichung der auf einer Ebene abbildbaren Flächen", 1892 (Math. Annalen V) angeführt, in welcher die siebengliedrige Determinante angegeben wird, welche die Steinersche Fläche darstellt aus den vier allgemeinen quadratischen Funktionen der Parameter. In der Mitteilung von *Vahlen:* „Über die Steinersche Fläche", 1895 (Acta math. 19) wird die merkwürdige Haupteigenschaft der Fläche, von jeder Tangentialebene in zwei Kegelschnitten geschnitten zu werden, erklärt aus der Zerlegbarkeit der die Tangentialebene darstellenden Determinante, die eine ternäre quadratische Form ist, in zwei lineare Faktoren.

In dem gegebenen literarischen Rückblick wurde versucht, besonders über die Hauptrichtungen, nach denen die Steinersche Fläche betrachtet wurde, ein übersichtliches Bild zu geben. Außerdem wird diese Fläche noch an vielen Stellen in der Literatur erwähnt und zwar häufig für einzelne ihrer Eigenschaften, welche ihre Eigentümlichkeit noch mehr hervorheben. Aus *Pascals Repertorium* (II. 1902) seien noch als Beispiele folgende Sätze hier angefügt. *Darboux:* Außer den Flächen zweiten Grades und den Regelflächen dritter Ordnung ist die Steinersche Fläche die einzige Fläche, auf welcher durch jeden Punkt unendlich viele Kegelschnitte gehen (1880). *Picard:* Die Römerfläche ist die einzige Nicht-Regelfläche, auf welcher alle ebene Schnitte rationale Kurven sind (1886). *Kronecker* und *Castelnuovo:* Außer den Regelflächen ist die Steinersche Fläche die einzige irreduzible Fläche, welche von jeder Ebene eines gewissen doppelt unendlichen Systems in reduziblen Kurven geschnitten wird (1894). Den Schluß bilde noch der schöne Satz von *Lie:* Der Ort der Pole einer festen Ebene in bezug auf alle Kegelschnitte einer Steinerschen Fläche ist wiederum eine Steinersche Fläche.

Übersicht der besprochenen Abhandlungen, bezeichnet durch die Namen ihrer Verfasser.

Steiner (Rom 1843) † 1863. *(Frègier, Hesse* 1837.)

Synthetisch:		Quadr. Transf.:		Analytisch:			
Schröter	1863			*Kummer* 1863 — *Weierstraß*			
Cremona	1864	*Berner*	1864	*Cayley*	1864		
Reye	1867	*Reye*	1867	*Clebsch*	1867	Biqudratische Form:	
Sturm	1871					*Bertini*	1871
				Eckardt	1872	*Laguerre*	1872
		Stahl	1885	*Gerbaldi**	1881	*Beltrami**	1879
				Brill	1892	*Rohn*	1890
				Vahlen	1895	*Berzolari*	1892
		Reye	1896	*Lacour*	1896		
		Timerding	1898				
				* Quadr. Form		* Allgemeinere Funktion	

Herrn Prof. Dr. *C. F. Geiser* danke ich für seine gütigen Angaben der Literatur und der Bibliothek der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich für die bereitwillige Überlassung derselben zur Einsicht.

Anmerkung: Die Durchsicht dieser mannigfaltigen Abhandlungen über die Steinersche Fläche zeigt, wie jede Auffassungsart des Problems sich für die einen oder anderen Ergebnisse besonders günstig erweist, so daß die Frage nahe liegt, ob nicht nach Abwägung der einzelnen Schwierigkeiten eine Lösung möglich ist, welche die Hauptergebnisse in leichter Weise zugänglich macht. Auf eine solche Aufgabestellung[1] wurde ich durch Herrn Prof. *C. F. Geiser* gewiesen, und ihre Ausführung gab überhaupt die Veranlassung zu diesem Gang durch die mathematische Literatur. Diese Aufgabe geht von der Bewegung einer Geraden aus, mit drei festen Punkten in den Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Gerade in allen ihren Lagen bildet das Normalensystem eines unendlich großen Ellipsoides *(Darboux)* und führt somit zur Zentrafläche. Das, allerdings imaginäre, Oktaeder mit acht ihrer Rückkehrkegelschnitte wird dann durch quadratische Transformation das räumliche Bild einer Steinerschen Fläche. Die jenen acht Kegelschnitten entsprechende Haupttangentkurve

[1] *K. Merz.* Parallelflächen und Zentrafläche eines besonderen Ellipsoides und die Steinersche Fläche. Chur. 1914.

erscheint in der einfachsten und zugleich symmetrischen Parameterdarstellung durch Biquadrate. Parallelflächen und Zentrafläche werden zu Developpablen von rationalen Raumkurven vierter Ordnung in besonders interessantem Zusammenhang mit der Steinerschen Fläche, der Analogien zeigt zu Ergebnissen von *Laguerre*. Die von *Stahl* benutzte Transformation erscheint damit in entgegengesetztem Gang noch weiter ausgeführt für die Steinersche Fläche und zwar in analytischer Darstellung. Das Ganze gibt einen einheitlichen Einblick in die geometrischen Beziehungen in einem der schönsten Gebiete algebraischer Kurven und Flächen.

III. Raum und Zahl.

Aus diesem Rückblick über die Entwicklung der Betrachtungsweise der Steinerschen Fläche möchten noch einige Folgerungen dargelegt werden, die versuchen sollten, aus der mathematischen Denkweise auf die allgemeinen Grundlagen der Erkenntnis zu schließen. Da möge die Überschrift vorausgeschickt werden, die *Kant* einem Abschnitt gibt in der Betrachtung über Gewißheit in Mathematik und Philosophie: „Das Objekt der Mathematik ist leicht und einfältig, der Philosophie aber schwer und verwickelt.“ (Werke. Inselverlag 1916. IV. 289.) Diese Schwierigkeit tritt ein, sobald von dem sicheren Gang der Folgerungen und den unumstößlichen Ergebnissen nach ihrem eigentlichen Ursprung gefragt wird, indem die Feststellung der Grundbegriffe und die Gültigkeit ihrer Verknüpfungen für die Wirklichkeit untersucht werden. Der Grund der Sicherheit in den mathematischen Untersuchungen liege in der Ersetzung ihrer Begriffe durch konkrete Zeichen, mit welchen die Rechnungen nach übereingekommenen Regeln geführt werden, statt mit den den Begriffen zugrunde liegenden Sachen. Jede Rechnung wäre dann gleichsam ein physikalisches Experiment in ihren Zeichen und in der Möglichkeit, jederzeit diesen Vorgang durchzuführen und in seinen inneren Beziehungen nachzuprüfen, bestünde die Sicherheit des Ergebnisses. Ebenso ersetzt die Geometrie ihre Begriffe durch bestimmte, wahrzunehmende Figuren, und die allgemeinen Regeln werden an als wirklich angenommenen Fällen erkannt. Der Vorzug der Geometrie gegenüber andern Erfahrungswissenschaften müßte dann in der Möglichkeit liegen, ihre Erfahrungen als besonders einfache immer wieder vollständig konstruieren zu können. Der Grund dazu beruht dann in der Wirklichkeit des absoluten Raumes, wie aus *Kant:* „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume", 1768 (Werke IV. S. 315) geschlossen werden kann: „Ein nachsinnender Leser wird daher den Begriff des Raumes, so wie ihn der Meßkünstler denkt — — nicht für ein bloßes Gedankending ansehen" (1764).

Die Gewißheit der Einsichten der Mathematik entspringt also aus der *synthetischen Bildung* ihrer Begriffe, in welchen einige wenige Grundbegriffe durch willkürliche Verbindungen die Objekte bilden. Die Erklärung der Grundbegriffe wie Einheit, Raum ist dabei für die Mathematik gleichgültig, da deren Definitionen doch keinen Einfluß auf die Synthese ihrer Gebilde haben könnten. Die Schwierigkeit der Philosophie liegt nun in der Analyse der Grundbegriffe, die als solche gegeben sind, durch Worte umschrieben werden und als verwickelte Erkenntnisse aufgelöst werden sollen. Die Methode der Philosophie ist also gerade die entgegengesetzte zu derjenigen der Mathematik. Ein entsprechendes Verfahren ließe sich in der analytischen Geometrie angeben, indem zu einer algebraischen Form die geometrische Deutung gesucht werden soll. Diese Form kann man sich aus der Arithmetik entstanden denken, ohne Hinblick auf räumliche Vorstellungen. Sie ist dann durch Synthese aus Zahlen erwachsen und bildet für den Geometer einen zusammengesetzten Begriff, den er in die Raumelemente und ihre Beziehungen untereinander zu zerlegen hat, indem er eine Deutung der Zahlwerte durch geometrische Gebilde vornimmt. In gleicher Art müßte die Philosophie die ihr durch die Sprache gegebenen Begriffe zergliedern, was aber, entsprechend dem vorigen Beispiel, nur möglich wird, wenn die Entstehung der Begriffe verfolgt werden kann, die nun aber hier, statt durch eine übersichtliche Rechnung, durch sehr verwickelte Erfahrungen entstanden sind. Einer solchen Analyse könnten daher historische Betrachtungen aus dem Gebiete der Wissenschaften am ehesten dienlich sein.

In einem Überblick der verschiedenen Arbeiten über die Steinersche Fläche zeigt sich in erster Linie ausgesprochen der synthetische Gang, durch welchen aus Elementen der Raumanschauung die geometrischen Gestalten herauswachsen zu immer größerer Reichhaltigkeit ihrer Formen, wobei die jeweils schon gewonnenen Gebilde dazu verwendet werden, durch ihre gegenseitige Anordnung im Raum zu neuen von höherer Ordnung zu führen. Die Idee, durch welche Steiner selbst zu der Fläche kam, bildet jedenfalls eines der schönsten Beispiele dieses natürlichen Aufbaues der Geometrie. Dabei kann als ursprünglichstes Grundelement die Gerade betrachtet werden, wie sie aus Beobachtungen und zwar vornehmlich aus genauen Zeichnungen in Erfahrung tritt und zwar unter, sei es unabsichtlicher oder absichtlicher, Täuschung durch den Gesichtssinn, der sie als stetig und mit verschwindender Breite gibt. Jeder Versuch, dieses sinnliche Bild eingehender zu analysieren, zerstört die Vorstellung der Geraden. Wie wichtig solche Anschauungen für den Beginn der geometrischen Überlegungen sind, zeigt sich in einem schönen Beispiel bei Jakob Steiner selbst, der mit dem Reißzeug seines Schülers, des ältesten Sohnes von W. v. Humboldt, zu Kreiskonstruktionen angeregt wurde, die ihn zu wichtigen Ergebnissen führten. Wie aber das Wesen der Geometrie trotzdem nicht in diesen Anschauungen liegt, wenn sie ihrer auch als Ausgangspunkt bedarf, zeigt sich darin, daß sie in ihren Verknüpfungen der ersten Elemente die Darstellbarkeit weit überholt. Die Phantasie des Geometers arbeitet dann mit gedanklichen Bildern der Anschauung, in welchen die gegenseitige Zuordnung der Elemente die führende Rolle spielt. Die Elemente selbst können dann durch andere ersetzt werden, die Gerade etwa durch den Kreis, wodurch unter Beibehaltung des zuerst ersehenen Zusammenhanges ganz neue geometrische Ergebnisse für die Anschauung entstehen. Damit eilt die geometrische Erkenntnis der Erfahrung voraus. Die Zuversicht in ihre Bestätigung enthält dann aber die metaphysische Hypothese, daß der wirkliche Raum der Erfahrung den Gesetzen unterliege, welche die Vorstellung auf Anregung der ersten einfachen Erfahrungen für sich verallgemeinert hat.

Für *Kant* wird diese Hypothese Gewißheit, diese Erkenntnis, aus der geometrischen Sinneswelt gewonnen, ist für ihn ein durch die Synthese der Erfahrung gegebener philosophischer Begriff, dessen Analyse ihn zu der für die gesamte Erkenntnistheorie grundlegenden Lehre von der reinen Anschauung des Raumes führt (Prolegomena 1783. W. IV. S. 405). Die genauere Verfolgung der Entstehung dieses Ergebnisses, durch seine Kritik aus den früheren über den Raum, ist von größtem Interesse, würde aber hier zu weit führen. Daß der Raum kein bloßes Gedankending ist, in welchem beliebige Phantasien gleichberechtigt sind, hat seinen letzten Grund darin, daß der Raum die Form ist, welche aller sinnlichen Anschauung zugrunde liegt, er ist gleichsam ein Instrument, mit welchem wir die mannigfaltigen sinnlichen Eindrücke anordnen, um zu einer Übersicht zu gelangen. Da wir die äußere Welt überhaupt nicht anders als in den Gesetzen des Raumes wahrnehmen können, ist es ausgeschlossen, daß wir in der Anwendung dieser Gesetze zu einem Ergebnis gelangen, welches im Widerspruch mit der Erfahrung sein könnte. Eine vollständigere als diese in sich geschlossene Begründung von der Wahrheit geometrischer Einsichten ist nicht denkbar. Sie hebt die Geometrie einfach über alle Zweifel weg.

Kaum ist aber damit der letzte Grund erkannt, so taucht nach *Kant* hinter ihm das Unerforschliche auf als Gespenst in der Rolle des Ding an sich. Damit müssen die letzten Ursachen dorthin verlegt werden und die ganze Gewißheit der Geometrie wird zu einer Vorstellung, die irgendwie von dem Ding an sich in uns geweckt wird und das sich damit in Formen hüllt, die nur Schein sind. Diese Schlußweise auf den dargelegten historischen Rückblick angewandt verführt geradezu zu dem Versuch, für das besprochene Gebiet der Geometrie den algebraischen Formen diese eigenartige Rolle zuzutrauen.

Doch sei vorerst noch auf eine metaphysische Rettung der Geometrie hingewiesen, wie sie aus *Hartmanns* transzendentalem Realismus entnommen werden kann (System der Philosophie. I. S. 111). Der reale Grund, auf welchem sowohl unser Bewußtsein als die Erscheinungswelt bestehen, ist der nämliche: er ist das Unbewußte. Wenn also aus der nämlichen Grundlage einerseits das Bewußtsein entspringt, anderseits die äußeren Vorgänge der Natur, so erklärt sich „die vernünftige Konformität beider Gebiete nach Gesetzen und Formen“. Eine solche Auffassungsweise, daß nicht nur unsere Vorstellungen einzig im reinen Raum denkbar seien, sondern daß überhaupt alle Erscheinungen nur durch den der Vorstellung wesensgleichen Raum ermöglicht werden, widerspricht auch nicht der Lehre von Kant. Anderseits wird zwar diese auch nach der Seite des Subjektivismus erweitert, womit aber für die Geometrie aller Grund verloren geht. Die Bedeutung der Anschauung für die Geometrie wird durch den transzendentalen Realismus dadurch erklärt, daß das Bewußtsein, als Erscheinung, nur durch andere äußere Erscheinungen vom unbewußten Realen Kenntnis erhalten kann. Im Unbewußten müssen alle Erkenntnisse als vollständige Einsichten gedacht werden, wie sie etwa bei intuitiven Entdeckungen in der Wissenschaft vorkommen für einzelne Ergebnisse, wie also im betrachteten Fall bei Jakob Steiner, worauf dann die konstruierende und rechnende Ausführung die Idee ganz zu erkennen sucht, um sie in Formen und Zeichen darzustellen. Dem Unbewußten entspricht das schöpferische Genie, dessen Ziele dem Bewußtsein den Weg der Entwicklung weist.

Nachdem soeben versucht wurde, vornehmlich die synthetische Behandlungsweise des Problems der Steinerschen Fläche als eine Illustration, wie sie so übersichtlich kaum leicht gefunden werden kann, für eine der wichtigsten Fragen der Erkenntnistheorie zu verwenden, ist noch die Bedeutung der analytischen Methode zu beleuchten, wie sie in das Gebiet der algebraischen Formenlehre führt. An Stelle der Anschauung tritt hier der rechnerische Zusammenhang der Zahlen, und den geometrischen Örtern entsprechen algebraische Beziehungen. Diese ermöglichen eine Verallgemeinerung in der Darstellung der geometrischen Begriffe und zugleich eine knappe Bergung der Ergebnisse in Formeln, welche die Umschreibung der Konstruktionen und der Eigenschaften der entstehenden Gebilde in Worten ersetzen. Dabei erweist sich die geometrische Idee, von der Anschaulichkeit geleitet, als Führerin durch die weit mannigfaltigeren Möglichkeiten der Wege der Arithmetik zu fruchtbaren Methoden und abschließenden Ergebnissen. Die fernere

Bedeutung dürfte dann weniger in der nachträglichen Formulierung der geometrischen Beziehungen liegen, als in der Förderung der ohne die Anschauung sich in unübersichtlichen Einzelheiten verlierenden Rechnungsmethoden, um die Arithmetik zu weitergehenden Forschungen zweckdienlich zu gestalten. Diese muß sich in den Anfängen der Lösungen an die geometrischen Bedingungen anpassen, sucht sich dann aber von den besonderen Annahmen loszulösen und immer mehr gegenüber den räumlich vorgeschriebenen Beziehungen die in ihr selbst innewohnenden, rein aus den Zahlenzusammenhängen folgenden Gesetzmäßigkeiten auszugestalten, um noch allgemeineren Betrachtungsweisen dienen zu können, als die Raumanschauung erfordert.

Der Gang von der synthetischen Geometrie durch die analytische erzielt also eine von Vorstellungen sinnlicher Art noch entferntere Darstellungsart des Problems; in den algebraischen Formen wird, wenn auch in konkreten Zeichen, eine abstraktere Lösung erreicht, die aus rein logischen Gründen, ohne der Anschauung zu bedürfen, die Erledigung in für alle Fälle ausreichende Formen einschließt. Die Existenz der durch diese Formen vertretenen Ideen könnte dann als schließliche Ursache aller Raumgebilde gedeutet werden, als Ding an sich, dessen in Erscheinungtreten Geometrie sein kann, wobei die verschiedenen Arten des ausgeführten Modelles nur immer Ergebnisse der nämlichen Ursache sind, die für unser Bewußtsein als algebraische Form die letztmögliche Darstellung hat. Was im Modell als geformter Stoff, in der synthetisch beschriebenen Konstruktion als Ergebnis oder Ziel eines Werdens erscheint, das aber nie ein Sein erreicht, denn sonst wäre es nicht allgemeine Lösung, ist in dem Symbol der algebraischen Form als ruhendes Sein geborgen, ohne die Allgemeinheit der Idee zu verlieren. Dieses Sein wird zu einem Werden, wenn die Form analytisch gedeutet und zu einer Erscheinung, wenn die Deutung durch Zahlen bestimmt ausgeführt wird. *Plato* (Staat v. Preisendanz S. 284) nennt die Zahl ein Mittel, das zum philosophischen Denken führt.

Hier ist auf den Ursprung der Zahl hinzuweisen und vorerst der Einheit. Da darf vielleicht auf die feine Ironie hingewiesen werden, mit welcher Poincaré dem Logikkalkül die komplizierten Annahmen als zulässig hinstellt, um daraus die Eins folgern zu können. Eine eingehende mit Kant vom Urakt der synthetischen Einheit ausgehende Darlegung der Zahlen und Rechnungsarten wird in *Natorp:* „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften" geboten. Doch sei, für eine rasche Andeutung der wesentlichen Eigenschaften, die in *Rickert:* „Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung" dargelegte Erklärungsweise verwendet, nach welcher das Bewußtsein, in dem Unvermögen, die Körperwelt mit ihren unendlich vielen Eigenschaften zu bewältigen, durch die Begriffe eine Überwindung der extensiven und intensiven Mannigfaltigkeit erstrebt. Die Begriffsbestimmung zielt nach einer immer weiter gehenden Vereinfachung des Begriffsinhaltes. Also erschiene schließlich, das angedeutete Verfahren der Begriffsbildung zu Ende geführt, die Eins als letzte Zuflucht des Bewußtseins, sich noch zu behaupten, etwa drastisch in dem Ausspruch, das ist mir eins. Damit ist die Möglichkeit der Entstehung der natürlichen Zahlenreihe gegeben. Diese entsteht durch eine Hinwegtäuschung über die Verschiedenheiten aufeinanderfolgender Wahrnehmungen mit vollständiger Vernachlässigung der Zeit. Das Bewußtsein befreit sich von allen äußern Einflüssen und beschränkt sich auf die einfachste Reihe die ihm möglich ist, auf die äußeren Zahlzeichen oder von diesen noch als Vertreter im Gedächtnis übrig bleibende Nervenerregungen. Damit hat jedes Bewußtsein eine in sich individuell gebildete geordnete Reihe, und die Zahlen[1] sind nicht nur Begriffe, sondern sie bestehen auch als Einzelvorstellungen, als reine Anschauungen und mit ihnen das Schema der Bildung ihrer Aufeinanderfolge. Aus dieser entspringen alle Rechnungsoperationen als an äußeren Zeichen ausgeführte Gruppierungen und Zuordnungen, also durch Synthese. Rein formal logischen Ursprunges wird die Arithmetik zur abstraktesten Methode der Naturwissenschaften, der Idee nach unabhängig von Raum und Zeit. Die Zahlenreihe erscheint daher als die Form des Denkens, welche den Raum als eine Form der sinnlichen Auffassung noch in sich zu bergen ver-

[1] S. d. Aufsatz: Zahlen als Anschauungen und Begriffe. Schweizerische Lehrerzeitung 1904. Seite 70.

mag durch eine Deutung der Zahlen durch Raumelemente, da den Zahlen irgend welche Dinge zugeordnet werden können.

In der Zahl befreit sich das Bewußtsein von den von außen wirkenden Eindrücken, es sieht von allem Inhalt ab und erreicht dadurch die Freiheit zur vollen Ausnützung aller Möglichkeiten, die aus bloßer Zuordnung oder in Beziehungsetzung entspringen, wobei aber der Verzicht auf Stetigkeit als erster Mangel für alle Anwendungen die Folge ist. Dieser Fehler entspringt aus dem Unvermögen des Bewußtseins, allen Änderungen zu folgen und aus der Notwendigkeit, sich zu beschränken, und er ist in der praktischen Verwendung der Zahlen nicht zu beseitigen, nur läßt sich der Fehler unter genügend kleine Beträge bringen. Theoretisch wird die Unstetigkeit der Zahlen durch Angabe von unbegrenzt weiter zu führenden Rechnungen in den Grenzwerten überwunden und in der Setzung stetiger Funktionen. Damit soll also der Ursprung der algebraischen Formen und allgemeiner der Funktionen aus der Begriffsbildung der Zahlen angedeutet sein. Dieser Ursprung ist rein formal logischer Art, während derjenige geometrischer Gebilde aus der Anschauung herrührt, aus welcher Verschiedenheit der Gegensatz der Unstetigkeit zur Stetigkeit folgt.

Daher kann eine durch getrennte Werte oder durch diskrete Größen vorgenommene Welterklärung als begriffliche bezeichnet werden und die auf stetige Anschauungsmittel sich beziehende als anschauliche. Die Molekularphysik vertritt die erste Art, die Biologie z. B. bedient sich der zweiten Art, trotzdem sie im Mittel der Sprache natürlich auch Begriffe verwendet. Ein geometrisches Problem, wie es den Beginn dieser Betrachtungen bildet, wird in dieser Bezeichnung von der analytischen Lösung begrifflich gelöst, von der synthetischen aber anschaulich. Die Darstellung in algebraischen Formen enthält aber, auf Grund des angedeuteten Grenzprozesses, der von diskreten Größen zu stetigen überführt, schon eine über die begriffliche Erklärungsweise hinausführende und sich der anschaulichen anpassende Lösung, in Anlehnung an die Zeitanschauung (*Bergson:* Schöpferische Entwicklung. Jena 1912. S. 337). Daher ist zu versuchen, die Beziehungen von Begriff und Anschauung zum Ding an sich zu erörtern. Um darüber eine Ansicht erreichen zu können, muß man aus der Beschränkung einer einzelnen Wissenschaft hinaustreten.

Aus allen unsern Wahrnehmungen ersehen wir, daß die Erscheinungen stetig sind, wenn wir sie aber in unseren Gedanken erklären wollen, müssen wir sie voneinander trennen und die Welt zerfällt zuletzt in Punkte und von diesen aus wirkende Einzelkräfte. Die materialistische Auffassung der Molekularphysik wird dadurch zu einem mathematischen Phantasiegebilde, da alle Verschiedenheiten der Erscheinungen nur aus Gruppierungen gleicher Urelemente verursacht sein können, die durch Zahl und Stellung im Raume bedingt sind. Eine Farbe die wir sehen ist uns nur als Ersatz dafür gegeben, daß wir die ungeheure Zahl der Schwingungen der Äthermolekule nicht zählen können. Damit wird uns die, dem Gemüte eigentlich unheimlich vorkommende, Welt der Atome noch genießbar gemacht, ein Trost in dieser analytischen Lösung des Weltproblems. Der Gedanke teilt fortgesetzt die Dinge, bis er zu Elementen kommt, über die er uneingeschränkt herrscht. Dann entsteht die Frage, ob sich damit das Bewußtsein dem Wesen der Dinge genähert hat, oder ob dieser Vorgang nur ein Mittel ist, um in erneuter Synthese zu den Gesetzen zu gelangen, in denen wir die Natur verstehen können, um der anschaulichen Erklärungsweise weiter zu folgen. Liegt dem All ein System diskreter Massenpunkte zugrunde oder eine stetige Substanz? Erfassen wir durch die Mittel der Anschauung eigentlich weit eher das Absolute, als durch die Begriffe? Die Beantwortung kann nicht in einer einseitigen Entscheidung liegen, ob Zahl oder Raum sind, sondern nur in einer Vereinigung, also in der Annahme, daß die Dinge uns in diesen beiden Formen erscheinen, je nachdem wir von der inneren Auffassung aus dem Bewußtsein oder von der äußern der Sinnlichkeit ausgehen. Das Einzige jeder Zahl und das Einzige des Raumes müssen vereinigt sein im Absoluten, oder allgemeiner ausgesprochen, Individuum und Allgemeinheit sind aus dem nämlichen Grunde herzuleiten; Person und Typus sind als von verschiedenen Seiten geschaute Erscheinungen der nämlichen Idee zu betrachten.

Man hat daher dem Gemeinsamen von Raum und Zahl nachzuforschen, trotzdem sie aus ganz entgegengesetzten Mitteln der Erkenntnis entstehen. Weil nämlich beide Auffassungsarten eine ihrer Entstehungsweise entgegengesetzte Eigenschaft, gleichsam wie zum Ausgleich ihrer Einseitigkeit, mit sich tragen, ist eine Verbindung von Raum und Zahlenreihe zu einem Ganzen möglich. Die Raumanschauung, die auf der Einzigkeit jeder Erscheinung als Anschauung beruht und daraus ihre Mittel für die Phantasie entnimmt, wird zu der alles wirklich bestehende umfassenden Allheit und die Zahlenreihe, in welcher das Bewußtsein bestrebt war, alles Einzelne wegzuwischen, wird zur Vielheit unabänderlich, also in einziger Art, geordneter Individuen. Die Raumanschauung oder kürzer der Raum hat die Eigenschaft der Einheit, welche zur Bildung der Zahlenreihe vorauszusetzen war und diese trägt unverlierbar die Eigenschaften an sich, welche der Raum von allen seinen Elementen sich erhebend, verlor. Raum und Zahlenreihe ergänzen also einander, indem jedes die Erscheinungsart vertritt, die bei der Bildung des andern verloren ging. Sie vermögen also vereinigt die Erscheinungen wieder zu geben.

Die gemeinsame Ursache von Zahl und Raum entspricht daher dem Ding an sich hinter den Erscheinungen. Doch braucht man deswegen noch nicht zu befürchten, durch Bloßlegung dieser gemeinsamen Wurzel die Forschung verdorren zu lassen, indem nach Einsicht des letzten Grundes die Erkenntnis tieferen Interesses dann fernerhin entbehren müßte. Denn der hier verursachte Gang nach den ersten Quellen des Bewußtseins ist ein Grenzprozeß, welcher der Vorstellungskraft ihre Mittel immer weiter zu entziehen bestrebt ist, um die reinen Denkgesetze allein übrig zu behalten, wodurch man sich fortgesetzt dem Unbewußten immer mehr zu nähern versucht, ohne es je erreichen zu können, denn ohne die letzten Reste der Anschauung, auch ohne jedes Stimmungsgefühl der verschwindend leisen Erinnerung, entwischt auch der schärfste, angespannteste Gedanke dem Bewußtsein. Der Mathematiker lebt in Zahl und Raum, und er betrachtet ihr Wesen als selbstverständlich, während der Logiker eigentlich wissen will, wie Zahl und Raum aussehen, wenn sie gar nicht verwendet werden oder noch nicht sind, so daß also der absolut reine Logiker für sich allein unmöglich ist. Er kann nur im Philosophen sich bergen, der den Mangel an einzelnen, wirkenden Kenntnissen durch eine wertsetzende Beurteilung allgemeiner Lebenserscheinungen zu heben vermag.

Die gemeinsame Art, in welcher die Elemente des Raumes einerseits und die Elemente der Zahlenreihe anderseits in Anwendung treten, ist die der gegenseitigen Verknüpfung oder in Beziehungsetzung. Die Strahlen, die im Raume von einem Punkte ausgehen, können den Punkten einer Ebene einzeln zugeordnet werden, z. B. in einfachster Weise jeder Strahl dem Punkt, in welchem er die Ebene trifft. Diese Zuordnung erscheint als eine vereinfachte Darstellung des Sehprozesses, welcher einer Lichtempfindung durch die daraus beurteilte Richtung eine entfernt liegende Lichtquelle zuordnet. Aus einer solchen Zuordnung von Punkten, Geraden und Ebenen untereinander entspringt die von Jakob Steiner geschaffene projektive Geometrie. Das Schöpferische in der Geometrie beruht in der Mannigfaltigkeit dieser Verknüpfungen ihrer Raumelemente, welche die Entstehung der Gestalten bedingt. Eine Konstruktion gibt also die willkürlich gesetzten Regeln an, nach denen die Elemente geordnet werden sollen und sie ist einzig der Bedingung der Widerspruchslosigkeit unterworfen, abgesehen von ihrem Wert. Einzelne Ergebnisse werden in Lehrsätzen hervorgehoben und deren deduktive Anwendung setzt den synthetisch erfolgten Aufbau bereits voraus. Entsprechend erfolgt die Verbindung der Zahlen durch die Rechnungsoperationen auf Grund der Anordnung in der natürlichen Zahlenreihe.

Sind so Geometrie und Arithmetik einzeln für sich gegeben, die eine durch das Mittel der Konstruktionen, die andere durch die Rechnungsoperationen, so genügt eine Deutung der Anordnung von Raumelementen durch diejenige der Zahlen, um einen Parallelismus zwischen beiden wie mit einem Zauberschlage herzustellen oder sogar ihre Identität aus dem Prinzip der logischen Verknüpfungen zu erklären. Den Rechnungsoperationen entsprechen dann geometrische Konstruktionen [1]. Was die Geometrie an Gestalten erschafft, ist letzten Grundes das nämliche, was aus den Gesetzen der Zahlen sich aufbauen läßt. Wer an der Geometrie, wegen ihres Ursprunges aus der Anschauung, zweifeln sollte, der kann ihren Bestand durch die

Arithmetik als gesichert getrost hinnehmen (*Wellstein.* Elemente der Geometrie 1905. S. 82. Encykl. d. El. Math. II.).

Damit ist die Frage nach dem Wesen von Raum und Zahl zurückgeführt auf die nach dem Ursprung logischer Verknüpfungen oder synthetischer Erkenntnisse. Da diese insoweit willkürlich sind, als sie nicht durch Widerspruch sich selbst, also ihre Existenz ausschließen, entspringen sie dem freien Willen in ihrer Anlage und ihren Zielen, aber unter dem Einfluß und zur Beherrschung der Außenwelt. Der Wille hat sich in Überwindung der unübersehbaren Menge der von außen wirkenden Eindrücke notgedrungen die Zahlenreihe geschaffen. Was er nun auf Grund dieser ersten Festsetzung, ohne sie aufzuheben, weiter an Beziehungen zwischen den Zahlen hervorhebt, ist innert der logischen Möglichkeit vollständig beliebig und nur die Anwendung wird darüber entscheiden, ob die aufgestellten Zuordnungen von Bedeutung und zu einem Fortschritt in der Wissenschaft dienlich sind. Es können einzelne Regeln oder Sätze gefunden werden oder ganze Gebiete, deren Ausbau zeitweilig Interesse findet, die sich aber nachträglich als abseits der Hauptentwicklung erweisen. Die Willkür wird also von der Entwicklung der Wissenschaft geleitet und infolge entstehender wichtiger Probleme in Grenzen eingeengt. Allgemeine Lebensprinzipien lenken dann die logischen Schritte, die Forderungen der Naturwissenschaften vorab zwingen die Mathematik oder führen sie zu bedeutsamer Verwendung der in ihr ruhenden Möglichkeiten, in Verallgemeinerung des ausgeführten Einflusses der Geometrie auf die Algebra. Die letzte Art, in welcher die Gesetze des Raumes für deren Verwirklichung symbolisch festgesetzt erscheinen, ist schließlich die algebraische Form für die projektive Geometrie und allgemeiner die analytische Funktion.

Eigentümlich berührt aber der Gegensatz aus der Willkür, mit der die Verknüpfungen beginnen sollen und den strengen Gesetzen, denen sie dann folgen müssen. „Das erste steht uns frei, beim zweiten sind wir Knechte.“ Man könnte das als einen Beweis dafür nehmen, daß die Mathematik ganz auf

[1] *M. Grossmann.* Über den Aufbau der Geometrie. Schweiz. Pädag. Zeitschrift. V. 1909.

die Erscheinungswelt gerichtet ist und sich von ihrem Ursprung vorerst abwendet. Der Wille ist nur so weit frei, als er nichts setzt was ihn einengt. Aber von den Erscheinungen gezwungen, sich in Zahl und Raum zurecht zu finden, sucht er die aus der Notwendigkeit ihm aufgedrungenen Mittel in fortgesetzten Verbindungen auszugestalten, eingeengt von Mißerfolgen der Erfahrung, in denen die Widersprüche sich bemerkbar machen und erst zu einer relativen Freiheit sich durchdringend, wenn er die Gesetze bewußt befolgt, die zur Verwirklichung der in ihm liegenden Ideen führen. Bei Verfolgung und Lösung eines Problems sind die anfänglichen Annahmen für das Ergebnis geradezu entscheidend und in der Vorausahnung des Zieles die zweckdienlichen Vorbereitungen getroffen zu haben, verwandelt den logischen Zwang in beabsichtigte Entwicklung und setzt ihn in den Dienst des Willens. Das Naturgesetz in seiner Blindheit dient damit der vorausblickenden, einen Zweck setzenden Vernunft. Die Kausalität verwandelt sich in die sie überholende Finalität. Der scheinbar weit vorausliegende Zweck wirkt schon in den ersten Ursachen, weil sie den gemeinsamen Ursprung im Willen haben, in dessen Wesen eigentlich Absicht und Erfüllung vereint sind, die aber in den Erscheinungen durch die Form der Zeit getrennt werden. Damit sind die Fragen, zu denen die Beziehungen von Geometrie und Arithmetik führten, übergeleitet auf ein allgemeineres Gebiet der Naturphilosophie, wozu aber über Zahl und Raum hinauszugehen wäre.

Um ein leichter zu übersehendes Beispiel von willkürlichen Voraussetzungen zu geben, aus denen sich geregelt ablaufende Vorgänge entwickeln, sei auf die Spiele hingewiesen, die Interessen, wenn auch von untergeordneter Bedeutung, ähnlich wie Wissenschaft oder Leben überhaupt wecken können. Da wird leichter zugegeben, daß ganz beliebige Spielregeln aufgestellt werden können, nur dürfen keine Widersprüche drin sein. Aus ganz einfachen Regeln können dann die mannigfaltigsten Spiele entstehen und es werden sich aus der Erfahrung leitende Grundsätze entwickeln, welche die Willkür in der Ausführung so lenken, um das Spiel einem Erfolge zuzuführen. Die historische Entwicklung wird einzelne Spiele, wie das Schachspiel, erhalten und hervorheben. Diese Entstehungsart würde ganz der Auffassung entsprechen, welche sogar in der Wissenschaft von Denkgewohnheiten spricht, welche durch die Macht der Erfahrung unserem Bewußtsein aufgedrängt wurden. (*Ostwald,* Naturphilosophie 1902 S. 309.)

Ein anderes Beispiel besteht in der Annahme höherer komplexer Zahlen, die zu einer Verallgemeinerung der Algebra führt. Diese Zahlen können willkürlich angenommen werden und es ergeben sich Rechnungsregeln zwischen ihnen. Dann lassen sich nachträglich die Einschränkungen an der willkürlichen Annahme bestimmen, die nötig sind, um die Regeln zu vereinfachen oder auf diejenigen der gewöhnlichen Algebra zu führen. Der, Begriffe und Beziehungen setzende, freie Wille schränkt sich damit ein und zwar aus äußeren Gründen, von der Anwendung seiner Annahmen beeinflußt.

Doch zum Schlusse sei nochmals kurz auf den Parallelismus hingewiesen, der diese ganze Betrachtung verursachte. Wie die subjektiv innere Welt des Bewußtseins parallel läuft zu der außer uns sich abspielenden Welt objektiver Vorgänge, so bildet in der Mathematik die Arithmetik ein begrifflich entstandenes Gebiet, das parallel läuft zu der anschaulich begründeten Geometrie. Wie das Bewußtsein viel mannigfaltiger oder allgemeiner in seinen Formen ist als die äußere Wirklichkeit, so ist es auch die Arithmetik gegenüber der Geometrie. Diese Analogie, die in der Mathematik also den gleichen Parallelismus nachgebildet sieht wie er in dem All besteht, suchte nun auch den gemeinsamen Ursprung von Arithmetik und Geometrie entsprechen zu lassen dem Ursprung des All. Dieser wurde für Zahl und Raum gesucht in der Ursache der Zuordnung von Zahlen untereinander in den Rechnungsoperationen und von den Raumelementen in der Konstruktion, die durch diese Tätigkeit erst das Reich der Zahlen und Raumgrößen schaffen. Für diese Tätigkeit wurde kein anderes Gesetz erkannt, als daß sie sich nicht selbst aufheben darf. Die Schaffung von Beziehungen zwischen den Elementen wurde daher als Ausfluß des Willens gedeutet. Dieser ist in den Anfängen einer Wissenschaft als unbewußt nicht nachweisbar, sondern kann erst in der höheren Entwicklung aus dem Gang der Tätigkeit, aus der relativen Freiheit des genialen Forschers, als bewußt wahrgenommen werden. Dieses Ergebnis aus dem Versuch, in das Wesen der Mathematik einen Einblick zu gewinnen, ist nun zu verallgemeinern, was zur Philosophie führt.

Der letzte Grund, das eigentlich unerforschliche Wesen, aus welchem Ordnung, Gesetz oder Denknotwendigkeit fließen, scheint weniger in den Elementen, in den ersten Annahmen einer Wissenschaft, wo man es suchen möchte, zugänglich zu sein, als in ihrer höheren Entwicklung, wo ein reichgestaltetes Leben an Formen weitere Ausblicke zu bieten vermag. Die Elemente des Denkens und der Anschauung gehören zumeist der Erscheinungswelt an, der von der deduktiven Methode zu gering geschätzten Erfahrung, so daß die fortgesetzte Analyse der Grundbegriffe schließlich zu leeren Worten führt. Die Ansichten über die primitivsten Denkvorgänge sind daher nicht von solcher Wichtigkeit, daß sich daraus weite Folgerungen ergeben könnten, als ob aus den Schichten der Bausteine allein schon die Architektonik eines Gebäudes zu erklären wäre. Die Bedeutung einer Philosophie wird also weniger in ihrer Meinung über die Anfänge des Wissens liegen, die sie in ihrem weitern Verlaufe doch überholen muß, als in der Wertung der obersten Ziele und Erfolge der einzelnen Wissenschaften. Daraus läßt sich eher eine Weltanschauung erschließen und die für die Philosophie erforderliche, ihr eigene Erkenntnistheorie vorbereiten.

In einem solchen Sinne möchte diese Verwendung des historischen Verlaufes der Erforschung der Steinerschen Fläche zur Erkenntnistheorie ein Versuch sein, zu den einer Philosophie vorausgehenden Anschauungen zu führen.

IV. Über die Vorstellbarkeit nichteuklidischer Geometrie.

Bei Durchsicht der vorigen Betrachtung mag auffallen, daß der nichteuklidischen Geometrie keine Erwähnung getan wird und bei der großen Bedeutung dieses neuen Forschungsgebietes müßte dieser Mangel bei erkenntnistheoretischen Deutungen des Raumes nicht leicht entschuldbar sein, selbst mit dem Hinweis, daß das historisch vorgelegte Ausgangsgebiet eigentlich keine Veranlassung dazu gibt. Daher sei in einem

Nachtrag noch versucht, die Beziehung der absoluten Geometrie zur Anschauung anzugeben, wie sie im Einklang zu der ausgeführten Betrachtung über Zahl und Raum etwa gedacht werden könnte. Dabei wurden Begriff und Anschauung in einem gewissen Gegensatze genommen, und es wurde entgegen dem Bestreben, in schließlicher begrifflicher Umschreibung die Ergebnisse der Wissenschaft zu fassen, auf die weittragende Bedeutung der Anschauung trotz der mit unterlaufenden Täuschung hingewiesen. Alle begrifflichen Bestimmungen sind eigentlich nur Hilfsmittel, um aus der Anschauung abgeleitete Ergebnisse, die ihrer Art nach nur in einem Einzelfalle auftreten können, für alle möglichen Fälle zu umschreiben. Da auch die Arithmetik selbst ihre abstrakten Untersuchungen in schreibbaren oder doch in Schrift denkbaren Formeln setzen muß, haftet sie an Zeichen, die ihr Symbole sind, an welche ihre Operationen sich anknüpfen, wobei die Anordnung in der Schreibfläche für die Übersicht oder Einsicht in die Operationen von wesentlicher Bedeutung ist, wenn auch durch fortgesetzte Übung und unterstützt durch die Vorstellungsgabe der Einblick in die inneren Zusammenhänge der Größen sich immer weiter von den äußern Mitteln loszulösen vermag. Umgekehrt dient der äußere Formelmechanismus als Erleichterung, um das Bewußtsein nicht in der beständigen Anspannung der Gesamtübersicht erhalten zu müssen. Ganz einfache geometrische Anschauungen sind dabei imstande, weit angelegte Berechnungen an ein befriedigendes Ziel zu lenken.

Aus solchen Prinzipien ist es durchaus geboten, die Geometrie als in der Anschauung beruhend, aus dieser möglichst einfach in ihren Grundlagen anzunehmen, unter anfänglicher erkenntnistheoretisch verlangter Umschreibung der hypothetischen Annahmen, deren Unsicherheit dann aber, man möchte beifügen glücklicherweise, für den ganzen weiteren Bau der betreffenden Geometrie nicht mehr zu beachten sind.

Zur Berechtigung eines solchen Beginnens sei auf *Riemanns* Bemerkung am Schlusse seiner Betrachtung „Über die Hypothesen, welche der Geomtrie zugrunde liegen“ (Werke) verwiesen, daß die Frage nach den Maßverhältnissen des wirklich bestehenden Raumes schon eine Aufgabe der Physik sei. Also setze man

Ebene, Gerade und Punkt so materiell voraus, als sie der technische Zeichner in überhaupt erreichbarer Genauigkeit verwendet, kennt und sich denkt. Dazu braucht er Lineal, Dreieck und Zirkel und setzt als selbstverständlich voraus, daß sich diese Instrumente bei Bewegungen nicht ändern — abgesehen von Störungen. In dieser freien Bewegbarkeit starrer Körper ist schon die Hypothese der euklidischen Geometrie enthalten. Mit der Bewegung kommt aber eine fremde Methode in die Geometrie, die eigentlich rein für sich als Gesamtheit aller Raumelemente, als Seiend, gedacht wird. Euklid gibt daher im Beginn seiner Elemente eine Konstruktion, wie eine Strecke auf einer Geraden abgetragen wird, ohne Übertragung durch Bewegung und Steiner zeigt, wie alle Konstruktionen, die man durch freie Verwendung mit Zirkel und Lineal ausführt, durch bloße Benutzung eines einzigen festen Kreises und der Gesamtheit der in der Ebene gedachten Geraden hergestellt werden können. Der Kreis wird gleichsam zur Maßkurve, welche das Abtragen von Strecken statt durch Bewegung ermöglicht. Damit ist jedenfalls die weitgehendste Unabhängigkeit von der ungeometrischen Bewegung erzielt, da sie nur für die Entstehung des Kreises nötig war. Da aber ein vollständiger Verzicht auf hypothetische Voraussetzungen nicht möglich scheint für die Geometrie und ihre historische Entwicklung und ihre Anwendung keine Veranlassung oder gar Nötigung zu einem solchen Versuche bietet, dürfte ein weiterer Anschluß der Erforschung des Raumes an die physikalischen Anschauungen berechtigt sein. Ein Hinweis auf ein Ergebnis von *Schwarzschild* möge hier erlaubt sein, nach welchem im Innern einer angenommenen Kugel die nichteuklidische Geometrie des sphärischen Raumes herrscht: „Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der *Einsteinschen Theorie*" (Sitzungsberichte d. Ak. Berlin 1916, S. 431). Statt also zu untersuchen, welche der verschiedenen begrifflich entwickelten Geometrien eigentlich dem Raume der Wirklichkeit zugrunde liege, könnte man die Frage verfolgen, welche Kräfteverteilung physikalisch angenommen werden muß, um eine jener Raumtheorien zu verwirklichen oder um sie in ihrem Bestehen sich vorstellen zu können. Dann müßte man wohl annehmen, daß gar keine physikalischen Kräfte bestehen dürften, um ganz ungestört die euklidischen Konstruktionen ausführen zu können.

Diese Bedingung möglichst einfach geometrisch gedeutet, wäre die Möglichkeit, eine Strecke unverändert an beliebige Stellen des Raumes bringen zu können oder also die Kongruenz. Zuerst für den Aufbau der Planimetrie verwendet, würde aus der Kongruenz einzelner Strecken diejenige von Kreisen mit gleichen Radien geschlossen, um die sofortige Verwendung des Zirkels zu Kreisbogen zu besitzen und darauf die Kongruenz von Dreiecken mit bezüglich gleichen Seiten. Nun ist die Entstehung paralleler Geraden zu erklären, und zwar durch Verschiebung eines Dreiecks *ABC* längs der Geraden, welche von der Verlängerung von *AC* gebildet wird. Dabei kommt *AB* in eine neue Lage, welche zur ursprünglichen als parallel bezeichnet wird. Diese Bewegung entspricht dem Verfahren, wie im Zeichnen Parallele gezogen werden. Doch ist im theoretischen und konstruktiven Gang diese nochmalige Verwendung der Bewegung eines Dreiecks nicht mehr nötig, indem nach dem oben gewonnenen Kongruenzsatz das zweite Dreieck einfach als kongruent dem ersten an die Gerade in entsprechender Lage durch eine Streckenabtragung und Schnitt zweier Bogen erhalten wird. Damit ist festgesetzt, daß zu einer Geraden durch einen außer ihr liegenden Punkt nur eine Parallele besteht. Nachträglich ist dann aus der Gleichheit des Abstandes an allen Stellen zwischen den Geraden die Bestimmung des Schnittpunktes als außer dem endlichen Bereiche zu erklären. Außer in der Ebene besteht diese Verschiebbarkeit ohne Veränderung einer Figur, überhaupt in Flächen von konstanter Krümmung. Doch würde die Analogie auf diesen nicht zu dem allgemeinen Parallelenaxiom führen. Die nichteuklidische Geometrie läßt bei Bewegungen die Strecken nicht unverändert, was auch die Relativitätstheorie als physikalisch anzunehmen lehrt. Man könnte also nicht mit der Unvollkommenheit des durch die Anschauung gegebenen Raumbildes die zu eng gefaßte euklidische Geometrie entschuldigen, sondern müßte die lange unangefochtene Herrschaft als einzige Raumerklärung vielmehr in der zu wenig genau erfolgten Betrachtung der physikalischen Vorgänge suchen. Tatsächlich hat aber nicht der Zweifel an der Unveränderlichkeit fester Körper zur Verallgemeinerung der Geometrie geführt, sondern die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen. Aus begrifflichen Erwägungen wurde man dazu geführt, über die üblich gewordene Deutung des Raumes hinauszugehen und damit die Anschauung genauer zu untersuchen.

Eine analytische Darstellung *Study:* „Über die Bewegung des Raumes" (Leipziger Berichte 1890, S. 341) berechnet diese als eine lineare Transformation in den drei rechtwinkligen Raumkoordinaten, wobei die Koeffizienten durch acht homogene Parameter dargestellt sind, zwischen denen eine bilineare Zusammensetzung besteht. Diese Transformation entspricht derjenigen von *Cayley,* welche eine allgemeine Fläche zweiten Grades in sich selbst überführt, und sie wird daraus erhalten, wenn zum absoluten Kreis als einer ausgearteten solchen Fläche übergegangen wird. Damit hat man ein Mittel aus der Verallgemeinerung der Bewegungstransformation die nichteuklidische Geometrie in Betracht zu ziehen.

Ganz allgemein wird die Methode der Transformationen in *Lie:* Über die Grundlagen der Geometrie" (Leipziger Ber. 1890, S. 355) verwendet, indem für analytische Funktionen diejenigen Transformationsgruppen bestimmt werden, für welche irgend zwei Punkte eine Invariante besitzen, welche im euklidischen Raum deren Abstand angibt. Die Annahme der freien Beweglichkeit des Raumes besteht in der Möglichkeit, irgend einen Punkt nach irgend einem andern A überzuführen; wird aber A festgehalten, so kann sich ein beliebiger anderer B nur noch in einer Fläche (Kugel) bewegen; werden A und B festgehalten, so bewegt sich ein beliebiger dritter C nur noch in einer Kurve (Kreis) und durch Festhalten von A, B und C bleiben alle Punkte des Raumes in Ruhe, d. h. die dreimalige Setzung der Invariantenbedingung ist nur für jeden Punkt selbst erfüllbar. Damit ist eine schöne Übertragung der anschaulichen Bewegung im Raum auf allgemeine analytische Untersuchungen ausgeführt, wobei es von größtem Interesse ist, wie so allgemein gefaßte Annahmen die Raumeigenschaften charakterisieren. Die Anregung zu dieser Untersuchung gaben die Betrachtungen von *Helmholtz:* „Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen" 1868. Von Helmholtz rühren auch Analogien aus der Optik, wobei die durch gekrümmte Spiegel entstehenden Bilder mit Eigenschaften des nichteuklidischen Raumes verglichen werden, indem dabei das Bild einer Strecke bei Änderung ihrer Lage verschieden erscheint. Die anfänglichen Darstellungen der nichteuklidischen Geometrien erschweren ihre Vorstellung sehr.

Die Veranschaulichung dieser allgemeineren Raumbetrachtungen führt sehr übersichtlich Herr Prof. Dr. *M. Großmann* aus: „Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie" 1904 nach projektiver Methode [1] aus der von Cayley und Klein entwickelten Maßgeometrie. Diese gründet sich auf eine Zuordnung von Zahlen zu den Punkten einer Ebene mittelst homogener Koordinaten. Ein nicht degenerierter Kegelschnitt wird der Messung der Strecken zugrunde gelegt, wobei die Länge so definiert wird, daß die Strecke gemessen von irgend einem Punkte aus bis zu einem Punkte des angenommenen Kegelschnittes mit dem Zahlwert unendlich erscheint. Damit ist dieser Kegelschnitt der Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einem beliebigen (innerhalb liegenden) Punkt mit unendlich großem Zahlwert behaftet sind. Für ein reines Zahlenwesen ist also dieser absolute Kegelschnitt unzugänglich als das Unendliche. Das ursprüngliche Koordinatensystem, auf welches der absolute Kegelschnitt bezogen wurde, müßte ihm dann jedenfalls auch unbekannt sein und es müßte sich auf seine eigene Weise in der Ebene zurechtfinden. Ob ihm dann auch die Gerade als die einfachste Linie vorkommen würde oder ob es eine sonstige kürzeste Linie vorzuziehen hätte, liegt außer Betracht, da es sich um nach euklidischer Veranschaulichung auszuführende Konstruktionen handelt. Die hyperbolische Geometrie erscheint bestimmt durch einen reellen Kegelschnitt, z. B. eine Ellipse oder einen Kreis, welcher in sich das ganze Gebiet faßt, welches dem hyperbolischen Wesen angehört und unser Überblick darüber als euklidische Geometer gibt uns entschieden das Gefühl der Überlegenheit. Da die Strecke mit Hilfe des Doppel-

[1] Fortsetzungen in den Promotionsarbeiten *E. Mettler,* Anwendung der stereographischen Projektion im nichteuklidischen Raume; *E. Vaterlaus,* Konstr. in der Bildebene der hyperbolischen Zentralprojektion 1916.

verhältnisses ihrer Endpunkte und der beiden Schnittpunkte ihrer Geraden mit dem absoluten Kegelschnitt gemessen wird, ist es möglich, die Konstruktionen mit Hilfe der projektiven Geometrie auszuführen mit Strahlbüscheln. Die elliptische Geometrie kann ebenfalls so gezeichnet werden, indem der imaginäre absolute Kegelschnitt durch den konjugierten reellen vertreten wird. Sehr schön zeigen sich die Bewegungen, die im ersten Fäll als Drehungen um einen Punkt erscheinen, um den absoluten Pol der Geraden, welche die beiden Punkte verbindet, die bei der linearen Transformation des Kegelschnittes in sich fest bleiben. Im zweiten Fall setzt sich eine Bewegung aus einer Drehung um ein Zentrum und aus einer Verschiebung längs deren absoluten Polaren zusammen. Diese Veranschaulichung der nichteuklidischen Geometrie durch die projektive Methode ist jedenfalls die vollkommenste und gibt am besten einen Einblick in diese Gebiete. Die in der Zahlenbeziehung und Ausdrucksweise nichteuklidischen Probleme erscheinen übersetzt in die unserer Raumanschauung angemessenen Konstruktionen. Dabei entstehen auch neue Ergebnisse für die euklidische Geometrie, so daß auch diese dadurch ausgestaltet wird.

Damit wurde aus der Bewegung des Raumes durch die eine Fläche zweiten Grades in sich transformierende Gruppe übergeleitet zu der allgemeineren Geometrie, welche das Unendliche nicht nur als Ebene mit dem imaginären absoluten Kreis deutet, sondern als reelle oder imaginäre Fläche zweiten Grades. Dabei hat sich aber herausgestellt, daß auch diese Geometrien sich vollständig in der euklidischen veranschaulichen lassen, nur werden den Strecken andere Zahlwerte zugeordnet, als die beim gewöhnlichen physikalischen Messen üblichen. Die Strekken, die nichteuklidisch gemessen als gleich gerechnet werden, erscheinen unserer Anschauung verändert, je nach dem Ort, oder eine Strecke bleibt bei Bewegungen im nichteuklidischen Raume nicht erhalten.

Eine Abbildung des hyperbolischen Raumes, durch welche jeder seiner Ebenen eine Halbkugel des euklidischen Raumes entspricht, so daß jener erste Raum auf einen Halbraum abgebildet erscheint, ist von *Poincaré* durch eine Koordinatentransformation angegeben worden mit linear gebrochenen Funktionen und einer Quadratwurzel. (Wissenschaft und Hypothese von Lindemann.)

Damit ist die nichteuklidische Geometrie in die Raumtransformationen eingereiht. Die in den ersten beiden Abschnitten genannte einfachste quadratische Transformation sei daher hier nochmals angeführt, um an den dabei vorliegenden, weit einfacheren Verhältnissen darzulegen, wie mittelst dieser Betrachtungsweise aus einer Geometrie mit den in ihr angenommenen Kurven und Flächen eine ganz anders geartete veranschaulicht wird, unter Belassung der analytischen Formeln und also der Zahlenzusammenhänge, wie also die nämlichen arithmetischen Beziehungen ganz verschiedene räumliche Deutungen zulassen. Bei rechtwinkligen Koordinaten werden die Quadrate der x als neue Koordinaten y angenommen. Der *R*aum der x ist dann derjenige des Oktaederoktanten O und der Raum der y derjenige der Steinerschen Fläche S. Zur Veranschaulichung des Zusammenhanges der beiden Räume denke man sich in x das Gitter aller Punkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten, die im Oktanten homogen angeordnet sind. Die entsprechenden Punkte im Raume y sind dann die, deren Koordinaten Quadratzahlen sind, so daß hier das Gitter mit der Entfernung von den Koordinatenebenen immer mehr an Dichte abnimmt. Ein durch zwei Gitterpunkte in x gelegter Lichtstrahl l, der an den Koordinatenebenen im Oktanten reflektiert wird, erscheint dann in y als Parabel p, welche die Koordinatenebenen berührt. Einer gleichförmigen Bewegung auf l entspricht dann eine mit Entfernung von den Koordinatenebenen beschleunigte Bewegung auf p. In jedem Moment, in welchem l einen Gitterpunkt passiert, wird auch g durch den entsprechenden durchgehen. Wenn nun ein Wesen L auf l die Bewegung mit einer Uhr ausführt, so wird es immer nach gleichen Zeitabschnitten den Gitterpunkt durchsetzen und genau ebenso ein Wesen P auf p mit absolut gleichgehender Uhr. Wenn also P keine anderen Wahrnehmungen machen kann, als Abzählung der Gitterpunkte und Ablesung der Uhr, wird P. die Bewegung auch als gleichförmig auffassen.

Überträgt man dies auf ein entsprechendes Punktgitter im hyperbolischen Raum, dessen Punkte der absoluten Fläche zu immer dichter werden für unsere Betrachtung, so hat das hyperbolische Wesen den Eindruck, es bewege sich immer gleichförmig weiter und könne sich unendlich lang, also grenzenlos weit bewegen, während wir doch eine beständige Abnahme der Geschwindigkeit sehen und eine Grenze, an die es nie kommen kann. Doch wird es denken, daß, wie bei der Abstandslinie einer Geraden, die Bewegung aus seinem Unendlichen zurück auf den andern Ast dieser Linie führe.

In der quadratischen Transformation, um noch einiges beizufügen, entspricht einem ebenen Dreieck auf O ein Dreieck von Parabelbogen gebildet auf der Steinerschen Fläche S. Zwei parallelen Geraden auf O entsprechen zwei Parabeln mit dem gleichen unendlich fernen Punkt. Also hätte man dann die euklidische Geometrie umgestaltet. Doch muß noch beachtet werden, daß zwar die unendlich fernen Ebenen ineinander transformiert werden, daß aber der absolute Kreis in x zu einer unendlich fernen reellen Geraden in y wird und der absolute Kreis in y zu einer imaginären Kurve vierter Ordnung in x.

Von diesem Gesichtspunkte erscheint die nichteuklidische Geometrie als ein besonderer Fall höherer Transformationen und sie würde keinen ausgezeichneten Grund bilden, um die erkenntnistheoretischen Ansichten über den Raum zu ändern. Alle diese verschiedenen Geometrien führen nicht aus der traditionellen Raumauffassung hinaus, sondern leiten im dreidimensionalen Raum nur zu neuen Anordnungen der Raumelemente über.

In *Wellstein* „Grundlagen der Geometrie", wo die nichteuklidischen Geometrien im Kugelgebüsch (S. 52) veranschaulicht werden, ist die Vereinbarkeit dieser Geometrien mit *Kants* Auffassung des Raumes (Enzyk. II. S. 136) erklärt, wie auch in *Natorp* „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften" (S. 318). Die euklidische Geometrie entspringe aber nicht einer Denknotwendigkeit oder subjektiven Anschauungsnotwendigkeit, sondern der objektiven Notwendigkeit der Bedingung zeiträumlicher Veränderung. Damit läßt sich aber eigentlich nur begründen, daß von den denkbaren Geometrien nur eine bestimmte für die objektive Existenz möglich sein könne, nicht aber welche.

Wenn aber, trotz der Erwartungen, die an die Lösung der Frage des Parallelenaxioms, aus welcher die nichteuklidischen

Geometrien historisch entstanden sind, eine Erweiterung der reinen Raumanschauung nicht erfolgt ist und die neuen Geometrien unter den allgemeineren Begriff der Transformationen zu nehmen sind, müßten noch andere Möglichkeiten vorliegen in der Annahme der absoluten Kurve in einer Ebene. Die beiden genannten nichteuklidischen Geometrien sind mit der Kurve zweiten Grades vollständig verbunden und erst wenn nachgewiesen wäre, daß außer dieser Kurve keine andere zur Bestimmung einer neuen Maßgeometrie verwendbar sei, wäre die Auszeichnung dieser Geometrien berechtigt. Man könnte eine beliebige algebraische Kurve in der Ebene annehmen, welche von einer durch zwei Punkte A und B gelegten Geraden in Punkten U geschnitten wird. Dazu wäre eine Funktion von der Lage von A, B, U abhängig so zu bestimmen, daß sie jedesmal unendlich wird, wenn A oder B in einen der Punkte U fällt. Man kann dabei aber einwenden, daß auf einer Geraden doch immer nur eine der Strecken zwischen zwei benachbarten Punkten U als endlich zugänglich für sich angenommen werden darf und daß die Lage von AB damit zum voraus eingeschränkt wird. Jene Funktion, welche dann als Abstand AB zu bezeichnen ist, könnte noch weiter verallgemeinert werden, um sich von der Geraden frei zu machen. Man könnte in der Ebene ein Kurvensystem g annehmen, so daß durch zwei Punkte A und B immer nur eine Kurve g bestimmt ist. Wodurch aber durch Fundamentalpunkte Schwierigkeiten entstehen. Außerdem besteht eine absolute Kurve a, die nicht zum System gehört, die g in Punkten U schneidet. Dann ist eine Funktion zu suchen wie vorhin. Durch Übertragung auf eine krumme Fläche würde man sich noch der Ebene entledigen und hätte ganz allgemeine Annahmen ohne hypothetische Grundgebilde endlicher Ausdehnung. Sobald aber die dadurch zwischen Zahlengrößen entstehenden Beziehungen wieder in den Raum übertragen werden sollen, kann von den Mitteln der Anschauung nicht Umgang genommen werden.

Aus diesem Versuch, aus der Theorie der Bewegung und aus der Zuordnung der Zahlen zu Strecken ein Urteil über die Gültigkeit einer nichteuklidischen Geometrie zu finden, muß geschlossen werden, daß eine andere als die euklidische Auffassung des Raumes rein aus geometrisch und arithmetischen Gründen nicht als notwendig betrachtet werden muß. Der abstrakte Raum, in welchem die Körper schematisch als starr angenommen werden, in welchem eine Bewegung als Notbehelf gedacht wird, deren Verlauf vernachlässigt und ohne Einfluß auf die bewegten Raumelemente angenommen ist, wird durch die euklidische Geometrie so vollkommen wieder gegeben, daß jede andere dreidimensionale Geometrie in dieser ganz dargestellt werden kann. Damit erscheint der geometrische Raum als eine begriffliche Vereinfachung des physikalischen Raumes und die geometrische Anschauung als eine Auffassung der Wirklichkeit unter vereinfachender Weglassung aller Wirkungen von Zeit und Kraft. Die Form unserer Raumauffassung ist also gleichsam eine Momentaufnahme unter der Annahme, daß keine Aenderungen in der Wirklichkeit vor sich gehen, oder eine absichtliche Vernachlässigung der Zeit. Entsprechend wie bei der Bildung der Zahlen sich das Bewußtsein auf den letzten Rest seines Inhaltes einschränkt, wird beim abstrakten Raum die zeitliche Folge außer acht gelassen. Mit diesem ruhenden Raum müssen wir den wirklichen beurteilen, mit welchem der gedachte Raum nur momentweise übereinstimmt, entsprechend wie veränderliche Größen mit Durchlaufen der Zahlenreihe nachgeahmt werden. Wenn infolge von Kraftwirkungen irgendwo ein Feld nichteuklidischen Raumes hervorgerufen würde, müßten wir es innert des ruhenden Raumes als einen Vorgang erklären, als zeitliche Umbildung. Ein weiteres Eingehen auf die Beurteilung des Raumes, seine Setzung in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen, müßte mit einer Betrachtung der Zeit verbunden werden, was auf Grund der Relativitätstheorie weit schwieriger ist, als unter der früheren erkenntnistheoretischen Annahme der als selbstverständlich bekannt vorausgesetzten absoluten Zeit. Nach *Minkowski:* „Raum und Zeit" 1908 wird „die dreidimensionale Geometrie ein Kapitel der vierdimensionalen Physik". Dabei bewähren sich die, aus Analogie der Flächentheorie im dreidimensionalen Raum entwickelten Ergebnisse von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung in staunenswerter Weise, also Folgerungen der sogenannten vierdimensionalen Geometrie.

Ferner wird in *Mach:* „Die Analyse der Empfindungen"

(6. Auflage 1911, S. 284) aus der unvermeidlichen Unterscheidung des physiologischen und geometrischen Raumes dargelegt, daß bei Vergleichung der Körper miteinander die Zeit nicht außer Betracht bleiben kann. Darauf wird der Zusammenhang des räumlichen Begriffes „kleiner" und des zeitlichen „früher" angedeutet.

Der Schluß sei noch einer metaphysischen Annahme gewidmet, die unter der Vorstellung von der hyperbolischen Geometrie, die als in eine Kugel eingeschlossen gedacht werden kann, an Wahrscheinlichkeit zu gewinnen scheint. Der Philosoph *Ed. v. Hartmann* sieht sich aus physikalischen Gesetzen veranlaßt, die Zahl der Molekule als endlich anzunehmen. Der wirkliche physikalische Raum müßte dann als abgegrenzt gedacht werden. Die den Molekülen eigenen Kräfte sind die den Raum setzenden Ursachen, wodurch der einheitliche Urgrund des Unbewußten in Erscheinung tritt. Dabei könnte man sich den realen Raum füglich als den vorhin genannten nichteuklidischen vorstellen. Physikalische Bedingungen verunmöglichen es den Molekülen, über einen gewissen Bereich hinaus zu gelangen. Das Mittel aber, mit welchem unser Bewußtsein die Erscheinungen auffaßt, welches in seiner Erfahrung und seinem Prinzip der immer möglichen Aufeinanderfolge keine Begrenzung gedanklich kennt, ist dagegen der euklidische Raum, innert welchem wir die wirkende Welt als einen in sich abgeschlossenen Vorgang uns vorstellen können, ohne den Widerspruch der Unbegrenztheit vergänglicher Erscheinungen. Unser Raumvorstellungsvermögen, ebenfalls aus dem Unbewußten vorgebildet, ist dann nur eine Umbildung oder Transformation des im Wesen gleichen Raumes der Erscheinungen. Wir denken uns den Raum unendlich, können uns ihn auch nicht anders denken, weil unserem Denken diese Form im Bewußtsein als unveräußerliches Mittel gegeben ist. Daß dagegen die Körper innert gewissen Grenzen eingeschlossen sind, führt zu keinem logischen Widerspruch, so wenig als die Annahme, die Zahl der Moleküle sei begrenzt, während die Fähigkeit des Zählens, da es ein Denkmittel ist, keine endliche Schranke kennt.

Übrigens läßt sich auch aus der projektiven euklidischen Auffassung des Raumes schließen, daß außer dem Endlichen kein

Raum weiter besteht. Denn wenn auf der Geraden nur ein unendlich ferner Punkt angenommen wird, so bildet dieser den Grenzpunkt des Endlichen und damit ist zugleich festgelegt, daß die Gerade über das Endliche hinaus nicht weiter besteht, denn in einem einzelnen Punkt ist ihr Wesen ausgeschlossen. Das entsprechende gilt von der Ebene, die im Unendlichen nur eine Gerade besitzt, wodurch der Anteil einer Ebene am Unendlichen nur als dasjenige zugelassen ist, was eine Ebene abzuteilen vermag, sie also vom Unendlichen ausschließt. Diese Betrachtungsweise auf den Raum von drei Ausdehnungen angewandt, dessen Unendliches als eine Ebene gedacht wird, heißt also die Existenz des Raumes nur im Endlichen anerkennen und ihn vom Unendlichen gleichsam abzuschließen. Der Raum in seinen uneingeschränkten Eigenschaften besteht also nur im Endlichen. Darin liegt ein unbewußtes Zugeständnis, daß die Raumvorstellung nur der Erscheinungswelt angehört und mit dieser abschließt.

V. Idealgeometrie und Weltgeometrie.

Der bisher entwickelte Gedankengang sei nochmals kurz überblickt, um die Grundlage für die schließlichen Folgerungen hervorzuheben. Nachdem die Bedeutung der Anschauung für die Entwicklung der Geometrie erkannt war, sollte die erkenntnistheoretische Entscheidung über die Deutung des Raumes aus der Bewegung der Körper beurteilt werden. Die analytische Darstellung der Bewegung starrer Körper im dreidimensionalen Raum führte zu den Transformationsgleichungen, welche die Flächen zweiten Grades in sich selbst überführen. Eine solche Fläche wird daher als das Absolute eines hypothetischen Raumes angenommen, wodurch eine Verallgemeinerung der Geometrie aus derjenigen der starren Körper erzielt wird. Doch gelingt die Veranschaulichung auch dieser Geometrien in der euklidischen mittelst der projektiven, so daß aus diesem Grunde, wie auch aus dem von noch allgemeineren Transformationsmöglichkeiten, kein Anlaß zur Ersetzung der historisch zuerst ausgebildeten Geometrie durch eine neuere vorliegt, um der natürlich entstandenen ihre Bedeutung abzusprechen. Rein in der

Idee sind alle möglichen Geometrien gleichwertig. Der Entscheid über die Wirklichkeit, die eine aus den Möglichkeiten auszuscheidende Geometrie verlangt, mußte daher der Physik überlassen werden als eine für die Mathematik eigentlich gleichgültige Frage. Der in der Annahme einer unbegrenzten Welt der Erscheinungen liegende Widerspruch veranlaßte daher, die in der Anschauung als begrenzt darstellbare hyperbolische Geometrie als die wirklich bestehende *Weltgeometrie* anzunehmen, welcher die *Idealgeometrie,* von Euklid begrifflich festgelegt und von Steiner anschaulich erweitert, in der subjektiven Auffassung des Raumes entspricht. Es ist eigentlich die Starrheit der geometrischen Lehre vom Bestehen des Unendlichen, welche den Naturforscher verleitet, den Widerspruch einer unbegrenzten Natur hinzunehmen, also das Vertrauen in die unabänderlichen Ergebnisse der Mathematik, welche aus der begrifflichen Methode die anschauliche beherrscht. Die von *Riemann* angegebene Gefahr, „durch Beschränktheit der Begriffe den Fortschritt im Erkennen zu hindern", bestand also tatsächlich in der klassischen Mechanik, die zum unbegrenzten Raum noch die absolute Zeit vorschrieb. Kein Physiker wagte am *Parallelenaxiom* zu zweifeln wegen der Autorität der Mathematik und nur das unablässige Suchen nach dessen Grundlagen durch einen von den feinsten Untersuchungen im Gebiete der Größenlehre geschulten Spürsinn vermochte die Zweifel der unvoreingenommenen Anschauung wieder zu wecken und eine Lösung der alten Frage zu geben: schneiden sich zwei parallele Gerade wirklich erst im Unendlichen? Die historische Entstehung der nichteuklidischen Geometrien gehört zu den interessantesten Erscheinungen der Entwicklung der Wissenschaften.

Für diese Betrachtung genügt es, auf die P a n g e o m e t r i e von *Lobatschefskij* (Kasan 1856) hinzuweisen, welche die hyperbolische Geometrie mittelst der trigonometrischen Funktionen darstellt (Übersetzung von Liebmann in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften). Eine Gerade g im Innern der Kugel, welchen den Raum abgrenzt, trifft diese absolute Fläche in zwei Punkten U und die von einem Punkte A, der außer g liegt nach den U gezogenen Geraden p und q sind dann die zwei durch A zu g bestehenden Parallelen. Diese bilden einen Winkel miteinander, der vom Lote von A auf g halbiert wird. Der halbe Winkel, der von der Länge des Lotes abhängt, ist der Parallelwinkel, dessen Funktionen in die Berechnungen eintreten. Diese Annahmen werden einem Betrachter, der von dem Parallelenaxiom des Euklid noch nicht für die Wirklichkeit voreingenommen ist, als ganz natürlich erscheinen. Die Weiterführung dieser Theorie hat aber ihre Schwierigkeit in der Messung der Strecken und Winkel, die nicht in der euklidischen üblichen Weise vorgenommen werden kann. Diese Schwierigkeit wird durch die projektiv geometrische Behandlung umgangen. Doch sei noch bemerkt, daß Lobatschefskij zwar Versuche angeregt hat, aus astronomischen Messungen den Parallelwinkel zu bestimmen, um daraus zu erfahren, ob seine Pangeometrie in der Wirklichkeit bestehe, daß er aber, da die euklidische Geometrie auf alle Fälle mit großer Annäherung erfüllt ist, dieses dahingestellt sein läßt, aber auf ihr Bestehen in unserer Vorstellung nichtsdestoweniger hinweist und ihre Bedeutung für die Mathematik hervorhebt. Mit der Frage: „Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes“ hat sich auch der Astronom *K. Schwarzschild* beschäftigt und einen Vortrag darüber veröffentlicht (Viertel-Jahrsschrift der astron. Gesellschaft, 35. J., Berlin 1900). Mit Hilfe des Sternes Sirius wurde ein Parallelwinkel bestimmt.

In unsern Gedanken, in welchen der unendliche Idealraum, nach Kant als reine Anschauung, herrscht, können wir nun die Kugel der Weltgeometrie uns durchaus als faßlich vorstellen, innert welcher die Erscheinungswelt ihre Zeit abläuft. Es entspricht der auch auf andern Gebieten üblichen Bedeutung einer Idee, daß der Idealraum nicht endlich begrenzt gedacht wird, daß der wirkliche Raum diese Idee nicht ganz auszufüllen imstande ist und daß umgekehrt der Idealraum nur unvollkommen verwirklicht werden kann in den Bemühungen um genaue Zeichnungen und in Vermessungen, deren Ergebnisse in Maßzahlen ihre Niederlegung finden.

Man wird nun zuerst nach der Größe und der Dauer dieser Weltkugel fragen, die wir so einfach in unserem Vorstellungsraum untergebracht haben. Unsere Anschauung führt dabei ganz unbewußt eine sehr komplizierte Transformation aus. Man wird von der Mathematik verlangen, daß sie der Physik die Mittel liefert, die gewünschten Berechnungen ausführen zu können. Dazu müßte jedenfalls die Krümmung des Raumes verwendet werden oder die Eigentümlichkeit, daß ein in der Wirklichkeit sich bewegender Stab bei genauer Beobachtung sich als veränderlich erweisen müßte bloß wegen der Bewegung. Man hätte das Linienelement zu bestimmen, in welchem diese Krümmung auftritt. Ferner muß aber noch die Hypothese der Relativitätstheorie verwendet werden, welche als Konstante die Lichtgeschwindigkeit in Betracht zieht, so daß also aus dieser schließlich Größe und Dauer der Weltkugel zu berechnen wären. Man könnte etwa versuchen, von einem dem Parallelenaxiom entsprechenden *Zeitaxiom* auszugehen und als Dauer der hyperbolischen Welt den Ablauf der Bewegung feststellen für zwei parallel ausgehende Lichtstrahlen gerechnet vom Moment der Setzung der Welt bis zu der Vereinigung der beiden Lichtbewegungen in einem Punkte der absoluten Fläche, durch welches Ereignis wieder die Aufhebung der Erscheinung einer solchen Welt bedingt werden müßte. Die Zeitrechnungen wären dann zugleich von den Punkten abhängig, in welchen die Bewegungen anheben. Jeder in Bewegung gesetzte Punkt wäre also mit seinem Zeitindex zu behaften. Erinnern wir uns der mit dem Punktgitter versehenen hyperbolischen Geometrie, so müßte der entstehende Widerspruch, der aus der Annahme der absoluten Zeit unserer euklidischen Geometrie herrührt, daß sich nämlich das hyperbolische Wesen unendlich lang bewege, durch die Relativität der Zeit aufgehoben werden. Bevor diese Berechnungen sich in der Transformation des Idealraumes auf den Weltraum ausführen lassen, könnten vereinfachte Versuche mit der bereits besprochenen quadratischen Transformation verfolgt werden. Dabei dürften dann nicht, wie bei der absoluten Zeit, einfach nur die Raumkoordinaten transformiert werden, was eigentlich gleichbedeutend ist mit der Vernachlässigung der Zeit, sondern jeder Bewegungen vermittelnden Raumtransformation wäre eine Zeittransformation zuzuordnen. Bei jener quadratischen Transformation würde die Unendlichkeit der Zeit erhalten und es würden nur Änderungen in der endlichen Zeitrechnung entstehen.

Aber auch bei Ausführung in der hyperbolischen Geometrie selbst könnte die Berechnung der Weltdauer nur unter vereinfachten Annahmen geschehen. Denn unsere abgeschlossen gedachte Weltkugel ist eigentlich wiederum nur eine Idee in ihrer Vollkommenheit einzig innert der Idealgeometrie bestehend. In der Wirklichkeit werden sogenannte Störungen auftreten, wie etwa bei den Ellipsen der Planetenbahnen, die Welt der objektiven Wirklichkeit wird nicht ein ungestörtes geometrisches Gebiet darstellen, die Kraftfelder werden Änderungen unterworfen sein und die absoluten Flächen mit ihnen, so daß die Weltgeometrie nur angenähert an einzelnen Stellen der Untersuchung unterworfen werden könnte. Man müßte sogar zulassen, daß dabei auch elliptische Raumzustände unter besondern örtlichen Bedingungen eintreten könnten und daß nur die resultierende Gesamtheit einen begrenzten hyperbolischen Raumcharakter hätte.

Raum und Zeit sind also vereinigt in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit zu denken. Die äußere objektive Welt läuft in einer für sich in allen ihren Teilen einzigen Erscheinung ab und bildet das All, endlich und begrenzt in Raum und Zeit und ihr parallel zugeordnet spielt sich die innere subjektive Welt ab, die im Bewußtsein sich von den in der Wirklichkeit bestehenden Schranken in Raum und Zeit zu befreien vermag in der Idee der unendlichen Fortsetzbarkeit der Daseinsformen als Ausdruck der Möglichkeiten des freien Willens, dessen Wesen uns erst in den höheren Zielen und Erfolgen der Wissenschaften hervortritt, wo Zwang und Naturgesetz, die in Zahl, Raum und Zeit herrschen, zur Ausgestaltung von dessen Schöpfungen dienen.

In dem letzten Teil der Betrachtung, besonders bei Einbeziehung der Zeit, sind zwar Vermutungen problematischer Art aufgetaucht, die aber in diesem Zusammenhang mehr zur Andeutung eines abschließenden Ergebnisses dienen sollen, denn als eigentliches Ziel der Untersuchung, welches seinem Wesen nach außer der Möglichkeit einer exakten Formulierung liegt. Wie also die Anfänge der Mathematik aus Grundlagen entspringen, deren Erforschung, soweit sie nicht schon dieser Wissenschaft selbst angehören, sondern wie sie etwa in einer allgemeinen Logik gesucht werden können, großen Schwierigkeiten begegnen, indem ihren Begriffen, trotz der Einfachheit, komplizierte Erfahrungen vorauszugehen scheinen, so führen auch die Ergebnisse der Mathematik, wie sie ein nach allgemeinen Ausblicken suchendes Wissen etwa weiter verfolgen möchte, zu Überlegungen, die ihren Ausdruck auf anderen Gebieten des Geistes, am nächsten noch ästhetischer Richtung, finden könnten. Die Mathematik erscheint so als ein in allen Einzelheiten klar erkennbares Gebilde des Geistes, gleichsam seines inneren Gefüges, das aus dem Dunkel der Anfänge alles Wissens auftaucht, unser ganzes Interesse in Anspruch nimmt und nach der Ferne des Unerforschlichen in unbestimmter Erleuchtung verschwindet. Man muß also die philosophische Fragestellung allgemeiner fassen, womit das Problem aber aus dem Gebiete der Naturwissenschaften gehoben wird.

Das eigentlich erkenntnistheoretische Ergebnis aus allen durchgangenen Überlegungen führt aber wieder auf Kant zurück und zwar gerade weil er die Beziehungen zwischen Raum und Zeit als den Auffassungsformen des Geistes und dem Ding an sich frei gelassen hat. Der Idealraum und die absolute Zeit können nicht einfach unabhängig voneinander auf die Welt der Erscheinungen übertragen werden, sie sind als ein Gesamtgebilde vierdimensionaler Mannigfaltigkeit zusammenzufassen und durch eine ihr Wesen zwar erhaltende, aber ihre Maßbeziehungen abändernde Transformation umzugestalten. Damit ist die weitere Beurteilung von Raum und Zeit abhängig von den Ergebnissen der Relativitätstheorie. Als umfassendes Mittel aller Untersuchungen erscheint schließlich die Zahl, deren Ursprung in die innerste Gedankentätigkeit zu setzen ist. Raum und Zeit aber besitzen als Anschauungsformen eine Reichhaltigkeit in den Einzelheiten der Erscheinungsweise, die unser Bewußtsein begrifflich nur angenähert nachbilden kann.