

Zeitschrift:	Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber:	Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band:	8 (1944-1946)
Heft:	1
Artikel:	Recherches sur les écoulements gazeux ionisés unipolaires et méthode de détermination des dimensions des ions : étude de physique théorétique et expérimentale
Autor:	Joyet, Gustave
Kapitel:	III: L'équation de distribution de la densité ionique dans l'écoulement gazeux unipolaire
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-287468

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CHAPITRE III

L'EQUATION DE DISTRIBUTION DE LA DENSITE
IONIQUE DANS L'ECOULEMENT GAZEUX UNIPOLAIRE

§ 13. Introduction au problème.

Dans un cylindre électriquement conducteur, de section circulaire, on considère un écoulement gazeux de vitesse uniforme u parallèle à l'axe. Le gaz véhicule des particules chargées d'un seul signe, positif ou négatif, dont les dimensions et la masse sont d'un ordre de grandeur qui n'est pas très différent de celui des molécules du gaz. La distribution en densité des particules est constante dans la section initiale de l'écoulement (source ionisante constante).

La charge électrique de chaque particule — ion — est égale en valeur absolue à celle de l'électron.

Il suffit d'un petit nombre de chocs d'une particule contre la paroi conductrice pour la neutraliser et la faire disparaître en tant qu'ion.

En dehors de leur entraînement de vitesse uniforme par le gaz qui les véhicule, les ions subissent deux mouvements d'ensemble qui les entraînent chacun radialement vers la paroi et axialement dans le sens de l'écoulement. Ces deux mouvements de migration sont dus, l'un à la diffusion gazeuse, l'autre à la diffusion électrique des ions dans le gaz. Ils s'effectuent tous deux dans le sens des densités ioniques décroissantes.

En un point quelconque de l'écoulement, il s'établit un régime stationnaire de la densité ionique n , les ions qui disparaissent par diffusion étant compensés par ceux qui sont apportés par la translation du gaz.

Au bout d'un temps suffisamment grand, à une distance très élevée de l'origine de l'écoulement, les ions ont été presque tous absorbés par la paroi, et la densité ionique tend vers zéro dans toute la section.

Nous admettrons que les ions et les molécules du gaz qui les véhicule se comportent comme deux gaz mélangés *).

*) Pour les questions de théorie cinétique des gaz, nous nous référerons en général à l'exposé raccourci de E. BLOCH²⁸, et pour les développements spéciaux au traité de J.-H. JEANS²⁹.

Pour le « gaz ionique » et pour le gaz proprement dit, la répartition de la vitesse des particules est isotrope en direction et suit en valeur la loi de répartition de MAXWELL.

Cette répartition n'est pas modifiée par le mouvement de translation du gaz.

Nous appliquerons également le théorème d'équipartition de l'énergie au gaz ionique.

Nous admettrons enfin que la température et la pression sont constantes dans toute l'étendue de l'écoulement. Nous négligerons donc la chute de pression — effectivement très faible et inférieure au millième dans les conditions fixées par l'expérience — nécessaire au mouvement du gaz dans le cylindre.

Nous établirons l'équation différentielle qui régit le régime permanent de distribution des densités ioniques, tout d'abord en négligeant la diffusion électrique, puis en tenant compte de celle-ci.

§ 14. Équation différentielle de distribution des densités ioniques avec diffusion gazeuse seule.

Nous utiliserons, au cours du calcul, la formule de diffusion des gaz

$$(7) \quad -D \frac{\partial n}{\partial z}$$

qui exprime le nombre de molécules qui passent par unité de

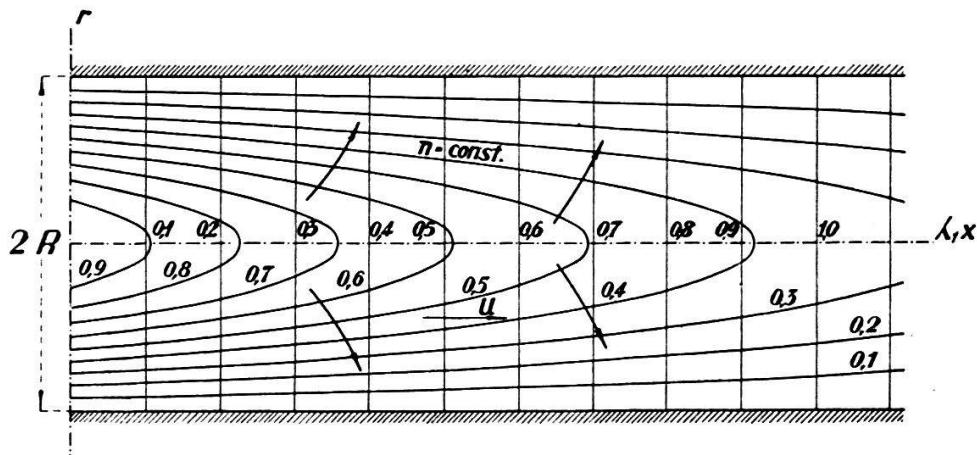


FIG. 19. — Courbes d'égales densités ioniques dans un écoulement unipolaire cylindrique.

surface et de temps, au travers d'une surface élémentaire normale à la direction z , sous l'action du gradient de densité $\frac{\partial n}{\partial z}$ normal à cet élément. D est le coefficient de diffusion.

Cette formule s'appliquant au mélange de deux gaz, nous l'appliquerons au gaz ionique.

L'axe des x des coordonnées cylindriques est confondu avec l'axe de révolution du cylindre conducteur. L'origine des coordonnées est à l'origine de l'écoulement; r sera la distance radiale, R le rayon du cylindre (fig. 19).

Nous considérons dans l'écoulement à l'abscisse x , un tore élémentaire de rayons intérieur et extérieur r et $r + dr$, de longueur axiale dx (fig. 20).

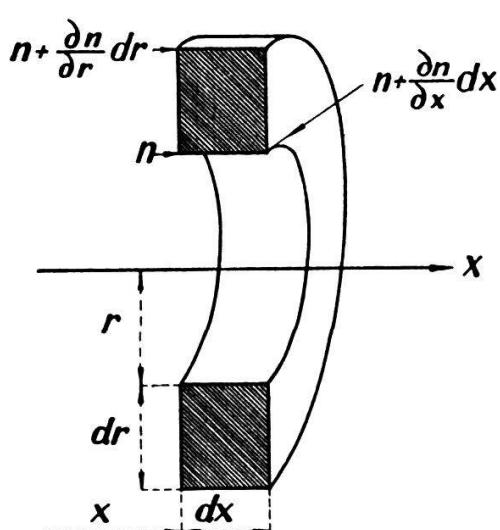


FIG. 20. — Tore élémentaire.

La densité ionique a la valeur n en x, r ; elle passe à

$$n + \frac{\partial n}{\partial x} dx$$

en $x + dx$,
et à

$$n + \frac{\partial n}{\partial r} dr$$

en $r + dr$.

Dans ce tore fixe, on effectue le bilan des charges qui entrent et sortent par la diffusion gazeuse ou le mouvement

d'entraînement du gaz. Comme la densité ionique est fixe en un point donné, la somme des charges entrant dans le tore pendant le temps dt doit être égale à la somme des charges sortantes.

Charges entrant par diffusion par la face cylindrique interne

$$\left(-D \frac{\partial n}{\partial r} \right) 2\pi r dx dt$$

Charges sortant par diffusion par la face cylindrique externe

$$- D \left(\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} dr \right) 2\pi (r + dr) dx dt$$

Charges entrant par diffusion par la face plane amont

$$- D \frac{\partial n}{\partial x} 2\pi r dr dt$$

Charges sortant par diffusion par la face plane aval

$$- D \left(\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} dx \right) 2\pi r dr dt$$

Charges apportées par le courant

$$n u 2 \pi r dr dt$$

Charges emportées par le courant

$$\left(n + \frac{\partial n}{\partial x} dx \right) u 2 \pi r dr dt$$

Le bilan donne

$$D r \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} dr dx + D \left(\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} dr \right) dr dx + D r \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} dr dx - \frac{\partial n}{\partial x} u r dr dx = 0$$

et, en négligeant la différentielle d'ordre supérieur,

$$(8) \quad \boxed{\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \frac{u}{D} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} = 0}$$

C'est l'équation différentielle de distribution des densités ioniques, établie en négligeant l'effet de répulsion électrostatique.

§ 15. Equation différentielle des densités ioniques avec diffusions gazeuse et électrique.

Pour simplifier, nous négligerons les effets de la diffusion électrique axiale. C'est-à-dire que nous supposerons que les effets de charge d'espace dus aux ions compris dans les volumes qui sont à l'amont de l'abscisse x d'une part, à l'avant de l'abscisse $x + dx$ d'autre part, exercent des actions égales et opposées sur une charge située dans le tore élémentaire (fig. 20). En d'autres termes, une telle charge ne subit qu'une force électrostatique radiale, due à la seule présence des charges contenues entre les plans d'abscisse x et $x + dx$.

Cette importante simplification se justifie par le fait que le gradient radial de la densité de charge est beaucoup plus grand que le gradient axial *).

En appliquant le théorème de GAUSS, relatif au flux de force au travers d'une surface fermée, on peut trouver la va-

*) 100 à 1000 fois plus pour les gradients moyens qui se sont présentés dans les expériences.

leur du champ électrique radial E à l'abscisse x et à la distance r de l'axe.

Si l'on appelle (nous devons cet artifice de calcul à N. WOLDKEWITSCH¹⁴, p. 21) $Q_{xr}dx$ la charge électrique contenue dans le cylindre de rayon r et de hauteur dx , le flux de force au travers de la surface de ce cylindre a pour expression :

$$2\pi r E dx = 4\pi \epsilon Q_{xr} dx$$

ϵ étant le pouvoir inducteur spécifique ($\epsilon = 1$ en ues)
De là

$$E = \frac{2 Q_{xr}}{r}$$

Si les ions ont tous la même mobilité k , leur vitesse radiale de diffusion sera

$$k E = \frac{2 k Q_{xr}}{r}$$

Pendant le temps dt , il pénétrera donc, par diffusion électrique, dans le tore élémentaire et par sa face cylindrique interne un nombre d'ions,

$$\frac{2 k Q_{rx}}{r} n 2\pi r dx dt = 4\pi k n Q_{rx} dx dt$$

Sur la face cylindrique externe du tore, le champ électrique E' possède un flux:

$$E' 2\pi (r + dr) dx = 4\pi (Q_{xr} dx + 2\pi r n dr dx)$$

d'où

$$E' = \frac{2 Q_{xr} + 4\pi n r dr}{r + dr}$$

Sous l'influence de ce champ, il sort du tore un nombre d'ions,

$$\left(n + \frac{\partial n}{\partial r} dr \right) k E' 2\pi (r + dr) dx dt =$$

$$\left(n + \frac{\partial n}{\partial r} dr \right) (2 Q_{xr} + 4\pi n r dr) 2\pi k dx dt$$

Le bilan en faveur du nombre total d'ions gagnés par le tore par diffusion électrique s'élève donc à

$$- 4 \pi k \left(2 \pi r n^2 + \frac{\partial n}{\partial r} Q_{xr} + 2 \pi r n \frac{\partial n}{\partial r} dr \right) dr dx dt$$

Et, en négligeant la différentielle d'ordre supérieur

$$- 4 \pi k \left(2 \pi r n^2 + \frac{\partial n}{\partial r} Q_{xr} \right) dr dx dt$$

terme à ajouter au bilan effectué dans le paragraphe précédent, ce qui donne pour équation différentielle

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \frac{u}{D} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{2k}{D} \left(2 \pi n^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} Q_{xr} \right) = 0$$

et en remarquant que

$$(9) \quad Q_{xr} dx = 2 \pi dx \int_0^r n r dr$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \frac{u}{D} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{4 \pi k}{D} \left(n^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} \int_0^r n r dr \right) = 0$$

ce qui constitue l'équation différentielle de distribution des densités en tenant compte des diffusions électrique et gazeuse.

* * *

L'équation (9) montre que le terme dû à la répulsion électrostatique, introduit de si grandes complications analytiques dans l'équation différentielle fondamentale, que la résolution de celle-ci devient impraticable. Nous tournerons la difficulté en montrant que nous pouvons nous placer expérimentalement dans des conditions de densité suffisamment basses pour que cette répulsion devienne négligeable. Pour apprécier ces conditions, nous nous référerons à un calcul de N. WOLODKEWITSCH¹⁴ (p. 21) qui calcule l'effet de la répulsion électrostatique dans un cas tout particulièrement simple.

WOLODKEWITSCH considère dans un gaz, à l'époque zéro, un « nuage ionique » unipolaire, ayant la forme d'un cylindre de longueur indéfinie, de rayon initial r_0 ; la répartition de la densité de charges ne dépend que du rayon et du temps; n_0 est la densité ionique initiale moyenne. Ce nuage se dilate en fonction du temps, en gardant sa forme cylindrique, et si l'on

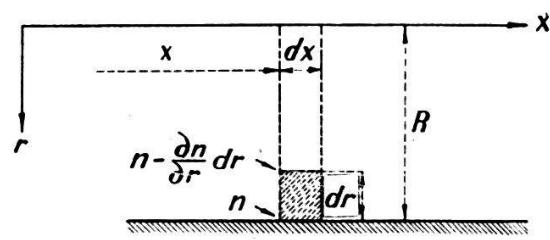
ne considère que la répulsion électrostatique, on montre facilement que le rayon r du cylindre à l'époque t sera

$$(10) \quad r^2 = r_0^2 (1 + 4 \pi \epsilon k \bar{n}_0 e t) \quad (\epsilon = 1, \text{ en } ues)$$

Cette formule nous permettra, dans les expériences, d'apprécier le rôle de la diffusion électrique, négligée dans la suite de l'étude théorique.

§ 16. Condition à la paroi.

Dans un mélange de gaz, la pression est égale à la somme des pressions qu'auraient les divers gaz s'ils occupaient seuls le volume du mélange (DALTON). Au point de vue des chocs contre les parois, on peut donc considérer le gaz ionique isolément; il exerce contre l'unité de surface de paroi, par unité de temps, un nombre de chocs égal à



$$(11) \quad \frac{n C}{\sqrt{6 \pi}}$$

FIG. 21. — Tore élémentaire à la paroi.

C étant la vitesse quadratique moyenne dans l'hypothèse d'une distribution de MAXWELL pour les vitesses des ions (E. BLOCH²⁸, chap. I). Si l'on admet tout d'abord qu'il suffit d'un choc contre la paroi pour neutraliser un ion, cette expression donne le nombre d'ions qui disparaissent, en fonction de la densité n , considérée dans le voisinage immédiat de la paroi conductrice.

Remarquons que cette formule suppose que le bombardement des ions s'effectue comme celui de molécules neutres sous la seule action de l'agitation cinétique. On néglige non seulement ainsi l'action du champ de répulsion électrostatique, mais encore la force attractive exercée par l'*image* de signe contraire de l'ion qui s'approche de la paroi. Nous verrons plus loin l'importance de cette force d'*image*.

Pour exprimer la condition mathématique à la paroi, nous considérons encore les charges entrant et sortant d'un tore élémentaire ayant le rayon R du cylindre conducteur comme rayon extérieur (fig. 21).

Charges apportées par diffusion axiale

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} 2 \pi R dr dx dt$$

Charges apportées par le courant

$$- \frac{\partial n}{\partial x} u 2 \pi R dr dx dt$$

Charges apportées par diffusion radiale

$$- D \left(\frac{\partial n}{\partial r} - \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} dr \right) 2 \pi (R - dr) dx dt$$

Charges sortant par chocs

$$\frac{C}{\sqrt{6 \pi}} n 2 \pi R dx dt$$

Le bilan donne, en négligeant les différentielles d'ordre supérieur

$$- D \frac{\partial n}{\partial r} 2 \pi R dx dt = \frac{C}{\sqrt{6 \pi}} n 2 \pi R dx dt$$

ou

$$- \frac{\partial n}{\partial r} : n = \frac{C}{D \sqrt{6 \pi}}$$

Pour simplifier cette condition, considérons l'expression du coefficient de diffusion donnée par la formule de MEYER (J.-H. JEANS²⁹, chap. XIII, E. BLOCH²⁸, chap. III)

$$(12) \quad D = \frac{l'v'n - lv'n'}{3(n + n')}$$

l , l' , v , v' , n , n' , étant respectivement les libres parcours moyens, les vitesses cinétiques moyennes et les nombres de molécules par unité de volume pour deux gaz mélangés. Cette formule se simplifie dans le cas où l'un des gaz est une simple impureté dans l'autre; où n , par exemple, est très petit par rapport à n' . Ce sera toujours le cas du gaz ionique relativement au gaz qui le véhicule. Si l'on a par exemple $n = 10^5$ ions/cm³ dans un gaz à la pression normale et à 0°, $n' \approx 2,69 \cdot 10^{19}$; $n: n' \approx 10^{-14}$. La formule de MEYER peut se simplifier et s'écrire

$$(13) \quad D = \frac{lv}{3}$$

pour le coefficient de diffusion des ions dans les gaz.

La condition à la paroi devient ainsi

$$- \frac{\partial n}{\partial r} : n = \frac{3C}{lv} \cdot \frac{1}{\sqrt{6 \pi}}$$

et, en remarquant qu'avec une distribution des vitesses de MAXWELL (E. BLOCH²⁸, chap. I)

$$\frac{v}{C} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$$

(14)

$$n : -\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{3}{4} l$$

en $r = R$

Les ions légers étant formés de quelques molécules, leur libre parcours, dans les conditions normales, sera peu différent, en ordre de grandeur, du libre parcours des molécules d'un gaz simple. l sera compris entre 10^{-5} et 10^{-6} cm. Le second membre de la condition ci-dessus possède ainsi une valeur très basse qui représente le rapport entre la densité n et le gradient de cette densité au contact de la paroi. Si la valeur du gradient est peu élevée — ce que nous montrerons — la valeur de la densité doit être constamment très voisine de zéro pour que la condition (14) soit satisfaite (fig. 22).

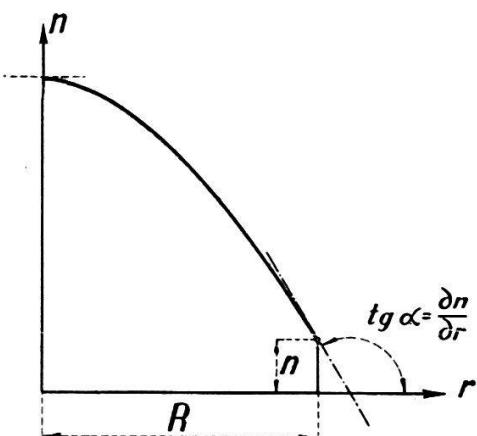


FIG. 22. — Répartition radiale de la densité et condition à la paroi,

$$n : -\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{4}{3} l$$

§ 17. Influence des charges d'image au voisinage de la paroi.

Il convient de bien distinguer le champ électrique dû aux charges d'image, du champ qui intervient dans la diffusion électrique. Le champ de diffusion électrique que nous avons calculé précédemment est engendré par la charge d'espace des ions dans le courant gazeux. Il n'est pas modifié par la présence ou l'absence de paroi.

Le champ dû aux charges d'image n'intervient qu'en présence d'une paroi conductrice. L'hypothèse des charges d'image est un artifice commode pour introduire le champ supplémentaire engendré par la paroi.

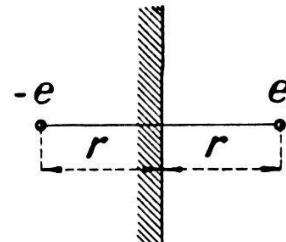
Nous examinerons tout d'abord le cas simple d'un ion unique, en présence d'une paroi conductrice plane indéfinie (fig. 23). L'ion est attiré par son image (ou par la paroi, ce qui est la même chose) par une force

$$\epsilon \frac{e^2}{(2r)^2}$$

Le travail de cette force — dont l'expression doit être d'ailleurs modifiée lorsque r devient égal ou inférieur aux dimensions des noyaux atomiques — pour un ion allant de la paroi à l'infini, est égal au travail d'extraction d'un électron de la paroi conductrice (F. OLLENDÖRF³⁰, § 25). Ce travail d'extraction qui varie avec la nature du métal qui constitue la paroi est de quelques unités d'électrons-volts (1 eV = 1,60 . 10⁻¹² erg).

Comparons ce travail à l'énergie cinétique moyenne de translation

$$\frac{3}{2} kT$$



(T étant la température absolue, k la constante de BOLTZMANN) dont un ion est animé selon le principe d'équipartition de l'énergie cinétique de translation. Le calcul montre que cette énergie de translation est très faible relativement au travail d'extraction. Cela veut dire que la distribution des vitesses des ions doit être modifiée d'une façon très importante au voisinage de la paroi. Pour connaître l'importance de cette modification, nous allons calculer jusqu'à quelle distance elle s'exerce d'une façon notable.

Appelons a la distance de la paroi au delà de laquelle le travail d'extraction ou de force d'image (Bildkraft) ne représente plus qu'un millième de l'énergie cinétique de translation. Nous aurons donc l'équation

$$\int_a^{\infty} \epsilon \frac{e^2}{4r^2} dr = \frac{1}{1000} \cdot \frac{3}{2} kT$$

ou

$$\epsilon \frac{e^2}{4a} = \frac{1}{1000} \frac{3}{2} kT$$

et

$$a = \frac{\overline{4,80}^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^3}{6 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 292} = 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

à 19° C.

A une distance supérieure au $1/100^{\text{e}}$ de mm de la paroi, la modification de l'énergie cinétique de translation d'un ion sous l'effet de sa charge d'image est donc pratiquement imperceptible. On peut aussi dire que la force d'image introduit une modification qui peut équivaloir à un déplacement de la paroi conductrice inférieur à $1/100^{\text{e}}$ de mm. Ce déplacement sera parfaitement négligeable dans nos expériences.

Dans le cas concret de notre écoulement de charges à l'intérieur d'un tube métallique, chaque charge intérieure subit non seulement l'attraction de sa seule image comme nous venons de l'examiner, mais encore l'attraction de l'ensemble des charges-images de signe contraire qui correspondent chacune aux charges intérieures au cylindre. La distribution de ces charges-images extérieures est symétrique; elle ne dépend — comme pour les charges intérieures — que de la distance à l'axe. On voit immédiatement, en appliquant le théorème de GAUSS au flux de force au travers de la paroi cylindrique, que le champ créé intérieurement à l'écoulement par les charges-images est nul, si l'on néglige, comme pour la diffusion électrique, la lente décroissance des densités dans le sens de l'écoulement.

Les deux raisonnements que nous venons de faire montrent que nous n'aurons pas à tenir compte des charges d'image dans l'écoulement unipolaire.

§ 18. Solution de l'équation différentielle fondamentale.

Il s'agit de déterminer une solution

$$n(x, r)$$

de l'équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre, de type elliptique,

$$(8) \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \frac{u}{D} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} = 0$$

dans le domaine

$$0 \leq x < +\infty$$

$$0 \leq r \leq R$$

avec les conditions,

- a) n fini dans tout le domaine
 - b) $n = 0$ pour $x = +\infty$
 - c) $n = N_0(r)$, fonction déterminée, pour $x = 0$
 - d) pour $r = R$, $n : -\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{4}{3}l$
- u, D, R, l , sont des constantes positives.

Nous devons à M. G. DE RHAM la méthode de résolution suivante:

On cherche des solutions particulières de la forme

$$n = f(x) g(r)$$

L'équation différentielle devient

$$f''(x) g(r) + g''(r) f(x) - \frac{u}{D} f'(x) g(r) + \frac{l}{r} g'(r) f(x) = 0$$

ou

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{u}{D} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g''(r)}{g(r)} + \frac{l}{r} \frac{g'(r)}{g(r)} = -a^2$$

elle peut donc être remplacée par deux équations du 2^{me} ordre à une variable,

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + a^2 g(r) = 0$$

$$f''(x) - \frac{u}{D} f'(x) - a^2 f(x) = 0$$

où a est donc une constante arbitraire.

La seconde équation, linéaire, à coefficients constants, a pour équation caractéristique

$$\lambda^2 - \frac{u}{D} \lambda - a^2 = 0$$

et pour solution

$$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

avec

$$\frac{u}{2D} \pm \sqrt{\left(\frac{u}{2D}\right)^2 + a^2} = \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}$$

Il n'y a une racine négative que si $a^2 > 0$.

Cette racine est seule à retenir si l'on veut imposer à la solution particulière $n = f(x) g(r)$ les conditions a) et b).
Donc,

$$f(x) = C_1 e^{-\lambda x}$$

avec

$$\lambda = -\frac{u}{2D} + \sqrt{\left(\frac{u}{2D}\right)^2 + a^2}$$

La première équation s'écrit, si l'on pose

$$\rho = ar$$

$$\frac{d^2g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dg}{d\rho} + g = 0$$

Si on la compare à l'équation générale de BESSEL

$$\frac{d^2g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dg}{d\rho} + \left(1 - \frac{p^2}{\rho^2}\right) g = 0$$

On remarque que c'est une équation de ce type d'ordre $p = 0$.

Elle a pour intégrale générale (P. FRANK u. R. v. MISES³¹, VIII, § 3).

$$g(\rho) = c_1 J_0(\rho) + c_2 Y_0(\rho)$$

où J_0 et Y_0 sont deux solutions particulières qu'on démontre pouvoir s'écrire sous la forme de séries

$$J_0(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{2^2} + \frac{\rho^4}{(2.4)^2} - \frac{\rho^6}{(2.4.6)^2} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} Y_0(\rho) &= \left[C + \log \text{nat} \frac{\rho}{2} \right] J_0(\rho) + \left(\frac{\rho}{2} \right)^2 - \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{(2!)^2} \left(\frac{\rho}{2} \right)^4 \\ &\quad + \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{(3!)^2} \left(\frac{\rho}{2} \right)^6 - \dots \end{aligned}$$

Mais, J_0 tendant vers 1 et Y_0 vers $-\infty$ pour ρ ou $r = 0$, la solution particulière Y_0 doit être écartée pour satisfaire à la condition a). Il vient

$$g(\rho) = c_1 J_0(\rho) = c_1 J_0(ar)$$

et

$$n = Ce^{-\lambda x} J_0(ar)$$

Introduisons la condition d) (condition à la paroi)

$$(15) \quad J_0(aR) + \frac{4}{3} \ln a J'_0(aR) = 0$$

Soient a_1, a_2, \dots les racines positives de cette équation transcendante (il y en a une infinité). A chacune d'elles correspond une valeur de λ et une solution de l'équation aux dérivées partielles qui satisfait aux conditions a), b), d) . :

$$C_i e^{-\lambda_i x} J_0(a_i r)$$

On en déduit la solution plus générale

$$(16) \quad n = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i x} J_0(a_i r)$$

Les C_i seront déterminés en satisfaisant à la condition c) de manière que

$$N_0(r) = \sum C_i J_0(a_i r)$$

Nous possédons donc la solution générale de notre problème sous la forme d'une somme d'harmoniques besseliens qui vont en s'amortissant avec l'abscisse x .

§ 19. Détermination approchée des a_i .

On a, entre des fonctions de BESSEL $J_p(\rho)$, d'ordre p , pour différentes valeurs de p , les relations (P. FRANK u. R. v. MISES³¹, VIII, § 3)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2J'_p(\rho) = J_{p-1}(\rho) - J_{p+1}(\rho) \\ \frac{2p}{\rho} J_p(\rho) = J_{p-1}(\rho) + J_{p+1}(\rho) \end{array} \right.$$

on en tire, en donnant à p la valeur zéro

$$J'_0(\rho) = -J_1(\rho)$$

ce qui permet d'écrire l'équation transcendante (15) qui fixe les a_i sous la forme

$$\frac{J_0(aR)}{J_1(aR)} = \frac{4}{3} \frac{l}{R} a = \frac{4}{3} \frac{l}{R} (aR)$$

R ayant dans l'expérience des valeurs de l'ordre du centimètre, la constante $\frac{4}{3} \frac{l}{R}$ sera voisine de 10^{-6} (§ 16). Il s'agit de trouver des valeurs de ρ telles que

$$\frac{J_0(\rho)}{J_1(\rho)} \cong 10^{-6} \cdot \rho$$

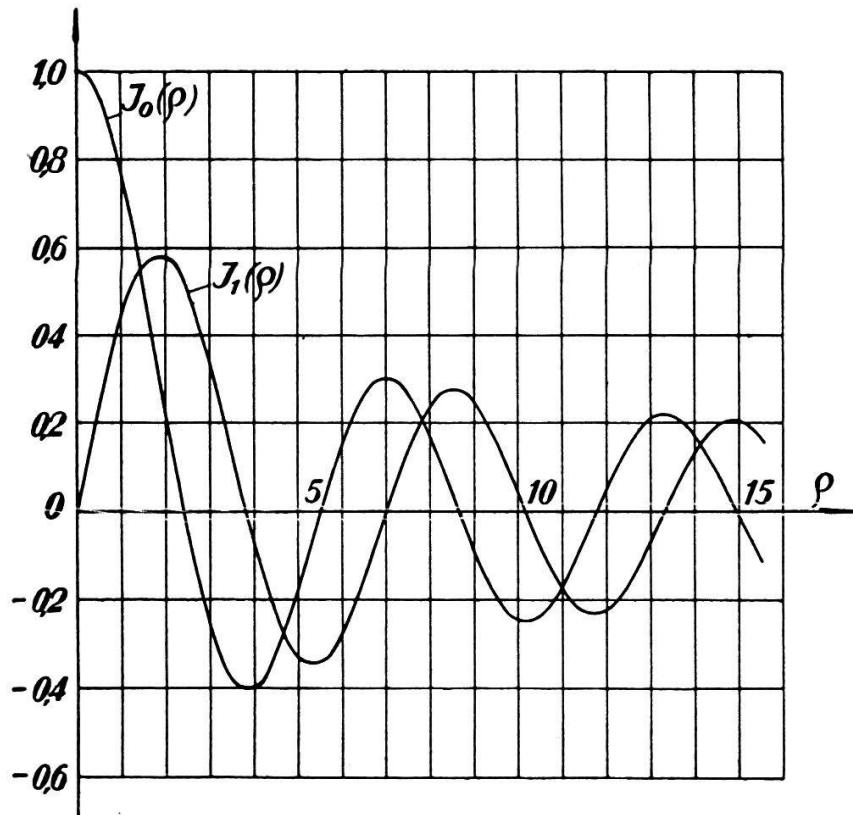


FIG. 24. - Fonctions de Bessel J_0 et J_1 .

$J_1(\rho)$ étant toujours < 1 (fig. 24), on voit que les premières valeurs de ρ qui satisfont à cette équation sont très voisines des valeurs correspondant aux premiers zéros de J_0 . Elles précèderont ces zéros sur l'abscisse d'une quantité ϵ que l'on peut calculer en remplaçant, au voisinage des zéros, J_0 par sa tangente ($J'_0 = -J_1$ et J_1 par la valeur qu'elle prend en ces zéros).

$$\frac{-\epsilon \left| J'_0(\rho) \right|_{J_0=0}}{\left| J_1(\rho) \right|_{J_0=0}} = \frac{\epsilon \left| J_1(\rho) \right|_{J_0=0}}{\left| J_1(\rho) \right|_{J_0=0}} = \epsilon \cong 10^{-6} |\rho|_{J_0=0}$$

Les valeurs de ρ (et par conséquent de aR) qui satisfont à la relation de condition (15) ne diffèrent que d'un millionième des zéros de la fonction J_0 . Nous pourrons donc poser avec une grande précision

$$(18) \quad a_i R = \text{Zéros successifs de } J_0$$

Les harmoniques besseliens s'annulent sur la paroi cylindrique.

REMARQUE. — Cette expression reste encore valable, avec une précision moindre, mais pourtant suffisante, quand il faut plus d'un choc contre la paroi pour neutraliser un ion. S'il faut par exemple 10 chocs (probabilité de décharge 0,1 par choc), l'examen du § 16 montre immédiatement que la condition à la paroi devient

$$n : -\frac{\partial n}{\partial r} = 10 \frac{4}{3} l$$

Et dans le calcul qui précède, les valeurs de ρ qui satisfont à la condition (15) diffèrent d'un 100 000^e au lieu d'un millionième des zéros de J_0 . La relation (18) reste encore applicable avec une précision élevée.

Il est difficile d'évaluer la probabilité de neutralisation par choc. Energétiquement, l'ion incident dispose toujours de suffisamment d'énergie pour extraire de la paroi l'électron de neutralisation. L'ion incident libère en effet à la paroi la somme de l'énergie d'ionisation (N^2 15,8; O^2 12,5 eV), de l'énergie de translation ($1/25$ eV) et de l'énergie communiquée par l'attraction de la charge-image. La somme de ces énergies est très supérieure aux 2 à 5 eV nécessaires pour l'éjection d'un électron d'une paroi. Si la neutralisation n'a pas lieu, ce pourra être pour des raisons quantiques et non pas énergétiques.

§ 20. Débit total d'ions dans une section droite.

C'est la grandeur particulièrement intéressante puisque c'est la plus accessible à la mesure. On a par unité de temps, dans la section d'abscisse x , un débit de charges Q tel que

$$Q = \int_0^R u n 2\pi r dr = 2\pi u \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i x} \int_0^R J_0(a_i r) r dr$$

On a par ailleurs, en ajoutant les relations (17), § 19, et en posant $p = 1$

$$d[\rho J_1(\rho)] = \rho J_0(\rho) d\rho$$

d'où

$$Q = 2\pi Ru \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{a_i} e^{-\lambda_i x} J_1(a_i R)$$

Et si l'on appelle ρ_i les zéros de J_0 et G le débit en volume par unité de temps du gaz qui véhicule les ions, il vient,

$$(19) \quad Q = 2G \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{\rho_i} e^{-\lambda_i x} J_1(\rho_i)$$

où les $J_1(\rho_i)$ ont des valeurs numériques bien déterminées; ce sont celles qui correspondent aux zéros de J_0 . Les tables des fonctions de BESSEL donnent (JAHNKE-EMDE³², XVIII, p. 237).

i	<i>Zéros de $J_0(\rho)$ = $a_i R = \rho_i$</i>	<i>Valeurs correspondantes de $J_i(a_i R)$</i>
1	2,405	+ 0,5191
2	5,520	- 0,3403
3	8,654	+ 0,2715
4	11,792	- 0,2325
⋮	⋮	⋮

Les λ_i sont déterminés par la formule rencontrée au § 18.

$$\lambda_i = -\frac{u}{2D} + \sqrt{\left(\frac{u}{2D}\right)^2 + a_i^2}$$

que l'on peut transformer en introduisant ρ_i et G

$$-\frac{u}{2D} \left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2a_i D}{u}\right)^2} \right] = -\frac{u}{2D} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\pi\rho_i^2 D^2}{uG}} \right]$$

et simplifier en remarquant que pour les valeurs de i peu élevées

$$\frac{2\pi\rho_i^2 D^2}{uG}$$

prend des valeurs numériques très faibles dans les expériences et que son carré est donc tout à fait négligeable *. Il vient alors

$$(20) \quad \lambda_i \approx \frac{\pi \rho_i^2 D}{G}$$

pour les harmoniques de rang peu élevé.

§ 21. Importance des harmoniques de Bessel d'ordre supérieur.

Pratiquement, dans les conditions expérimentales que nous nous posons, on ne connaît pas la répartition à l'origine de l'écoulement

$$n = N_0(r)$$

qui permet de fixer les C_i et par là la grandeur de chacun des harmoniques de BESSEL. Tout ce qu'on peut dire de la fonction N_0 c'est qu'elle doit avoir une allure parabolique, analogue à celle de la figure 22.

Nous allons, dans un cas concret, supposer tout d'abord chacun des $C_i = 1$ et voir comment les harmoniques s'amortissent en fonction de x . Nous aurons, dans les expériences, $G = 1000 \text{ cm}^3/\text{sec}$ et nous montrerons (§ 25) que pour des ions aériens formés de 2 molécules et diffusant dans l'air ($p = 1 \text{ atm.}$, $t = 19,5^\circ \text{C}$), $D = 0,048$; le coefficient de diffusion varie peu lorsque l'ion est formé de 2 à 3 molécules. Le tableau ci-dessous montre comment les différents harmoniques $\frac{1}{\rho} J_1(\rho_i)$ de l'expression du débit ionique (formule (19)) s'amortissent pour un parcours Δx de 200 cm. λ_i est déterminé par la formule approchée (20).

*) En effet, dans les conditions expérimentales
 $G = 1000 \text{ cm}^3/\text{sec}$
 $u = 10 \text{ à } 100 \text{ cm/sec}$
 $D = 0,048 \text{ pour un ion formé de 2 molécules d'air diffusant dans l'air}$
 on a, pour le 4^e harmonique ($\rho_i = 11,79$)

$$\frac{2\pi\rho_i^2 D^2}{uG} = \frac{2\pi \cdot 11,79 \cdot 0,048}{10 \cdot 1000} = 2,0 \cdot 10^{-4}$$

quantité dont le carré est bien négligeable en regard de celle-ci.

i	ρ_i	$\frac{1}{\rho_i} J_1(\rho_i)$	λ_i	$e^{-\lambda_i x}$	$\frac{1}{\rho_i} e^{-\lambda_i x} J_1(\rho_i)$	en val. absolue	en % de la fondament.
1	2,405	0,216	$0,87 \cdot 10^{-3}$	0,840	0,182	84	
2	5,520	0,0617	$4,6 \cdot 10^{-3}$	0,399	0,0246	11	
3	8,654	0,0314	$11,3 \cdot 10^{-3}$	0,105	0,0033	1,5	
4	11,792	0,0197	$21,0 \cdot 10^{-3}$	0,015	0,00030	0,1	
...

Les harmoniques d'ordre supérieur au premier s'amortissent donc très rapidement, et leur contribution au débit ionique devient très vite négligeable. Pour des mesures de débit dont

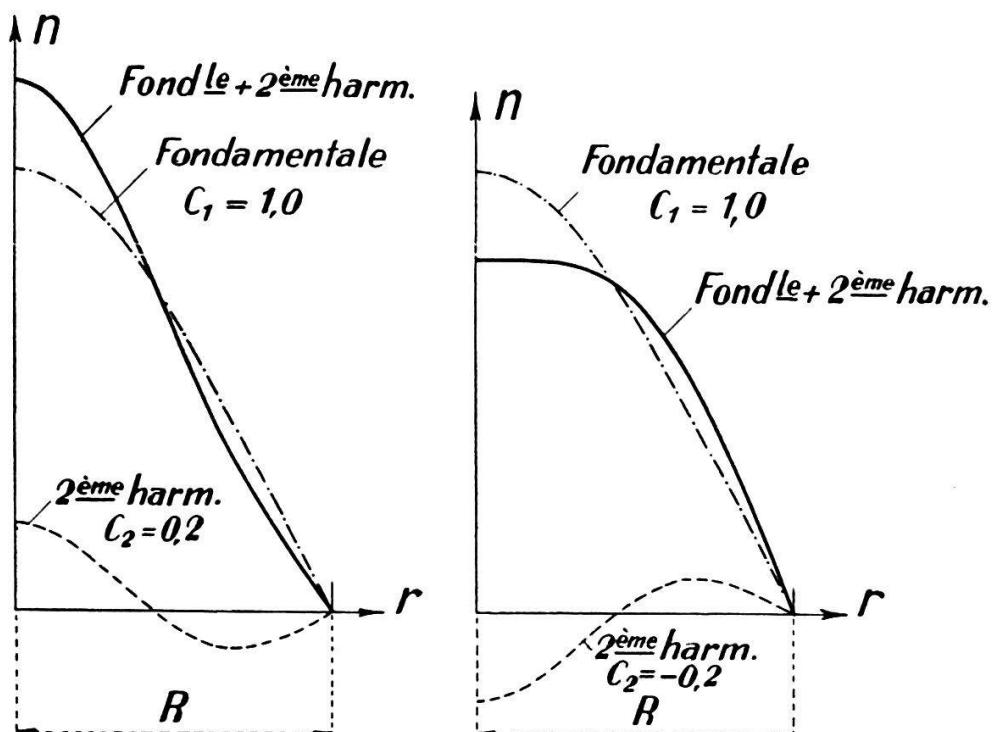


FIG. 25. — Répartition radiale de la densité :
 a) avec 2^e harmonique de + 20 % ($C_2 = 0,2$); b) avec 2^e harmonique de - 20 % ($C_2 = - 0,2$).

la précision est de l'ordre du pourcent, la considération du 2^{me} harmonique interviendrait seule dans l'hypothèse d'une répartition initiale de même intensité des différents harmoniques (C_i égaux). Dans la figure 25 où l'on a supposé un 2^{me} harmonique de 20 % (additif fig. a, soustractif fig. b),

on voit que les déformations de la répartition radiale obtenue sont déjà telles qu'il est douteux que le 2^{me} harmonique puisse être plus intense (voir la répartition intuitive de la figure 22).

Une seconde raison — expérimentale et mieux fondée — nous autorisera pratiquement à négliger le 2^{me} harmonique: dans les expériences effectuées avec des densités ioniques suffisamment faibles pour que la diffusion gazeuse intervienne seule, la décroissance du débit ionique a un caractère exponentiel simple; elle ne se comporte pas comme la somme de deux exponentielles avec coefficients d'affaiblissement différents, ainsi qu'il apparaîtrait avec la présence d'un harmonique d'ordre supérieur à la fondamentale.

En ne faisant ainsi intervenir que la fondamentale, les formules de répartition des densités et du débit ionique deviennent très simplement

$$(21) \quad n = C_1 e^{-\lambda_1 x} J_0(a_1 r)$$

$$(22) \quad Q = 2G \frac{C_1}{\rho_1} e^{-\lambda_1 x} J_1(\rho_1)$$

formules dans lesquelles

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi \rho_1^2 D}{G}$$

avec $\rho_1 = 2,405$

$$a_1 = \frac{\rho_1}{R}$$

$$J_1(\rho_1) = 0,5191$$

Le débit ionique peut aussi s'écrire encore plus simplement

$$(23) \quad Q = Q_0 e^{-\lambda_1 x}$$

et si l'on considère la densité ionique moyenne

$$\bar{n} = \frac{Q}{G}.$$

$$(24) \quad \boxed{\bar{n} = \bar{n}_0 e^{-\lambda_1 x}}$$

Fait très important, à débit gazeux G constant, le coefficient d'affaiblissement λ_1 est indépendant du rayon R du cylindre.