

# Étude théorique des états de régime

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **5 (1934-1937)**

Heft 1

PDF erstellt am: **27.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## CHAPITRE PREMIER

## ETUDE THEORIQUE DES ETATS DE REGIME

La méthode que nous avons mise en œuvre est une *méthode purement électrique* (comme toutes les méthodes les plus récentes). C'est une *méthode de compensation en régimes stationnaires*.

Alors que, dans toutes les mesures anciennes, l'effet Joule constituait le principal obstacle à la mesure de l'effet Thomson, nous avons, avec quelques autres auteurs du reste, cherché à l'utiliser. Cette utilisation est double :

1<sup>o</sup> Compensation de l'effet Thomson. Les données numériques obtenues constituent donc des résultats absolus.

2<sup>o</sup> Obtention d'un *gradient uniforme de température* sur la plus grande longueur possible du barreau d'expérimentation.

Un gradient uniforme simplifie en effet considérablement les calculs en évitant la nécessité de moyennes d'autant plus difficiles à établir qu'on ne connaît pas la variation exacte du coefficient  $\sigma$  en fonction du gradient (cf. p. 3). Pour se rapprocher pratiquement autant que possible de ce gradient uniforme, deux moyens ont été employés: une section non uniforme du conducteur et un chauffage électrique indépendant.

Il convenait dès lors d'étudier théoriquement les états de régime thermique des conducteurs chauffés par le courant et de diriger nos recherches vers l'obtention d'un gradient uniforme.

### § 9. — Equations d'état stationnaire d'un conducteur cylindrique.

Soit un conducteur de section uniforme, dont les extrémités sont maintenues à une température fixe. Le conducteur est chauffé par un courant électrique; la chaleur s'en va par les extrémités et l'on suppose qu'il n'y a aucune perte de chaleur latérale. La courbe de régime des températures le long de ce conducteur en fonction des abscisses est une parabole ou une courbe exponentielle suivant les hypothèses faites.

Supposons que la résistivité et la conductibilité calorifique soient constantes. La répartition de régime est:

$$(V) \quad t = \frac{\rho i^2}{\lambda s^2} \left( l x - \frac{x^2}{2} \right)$$

- où  $x$  = abscisses courantes de la barre,  
 $t$  = température au point d'abscisse  $x$ , la température des extrémités étant prise comme zéro,  
 $\rho$  = résistivité,  
 $\lambda$  = conductibilité calorifique,  
 $i$  = intensité du courant,  
 $s$  = section droite du conducteur,  
 $2l$  = longueur de la barre.

On peut l'établir comme suit :

Soit  $\Delta q$  la quantité de chaleur libérée par le courant entre les points K et M pendant l'unité de temps.

$$\Delta q = \frac{\rho i^2}{s} (l - x)$$

En état de régime, cette quantité de chaleur traverse intégralement, en vertu des hypothèses faites, la section  $s$  de la barre en K. On a (loi de la conduction calorifique) :

$$\Delta q = \lambda \frac{dt}{dx} s.$$

Donc

$$(VI) \quad \lambda \frac{dt}{dx} s = \frac{\rho i^2}{s} (l - x)$$

$$(VII) \quad dt = \frac{\rho i^2}{\lambda s^2} (l - x) dx$$

d'où, tenant compte des conditions aux limites,

$$(5) \quad t = \frac{\rho i^2}{\lambda s^2} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Pour  $x = l$ , on a :

$$(VIII) \quad t_m = \frac{\rho i^2 l^2}{2\lambda s^2}$$

Signalons que nous parvenons à la même valeur que Borelius (2) d'une manière tout à fait différente et indépendante.

Supposons maintenant qu'on ait :

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$$

(VII) devient alors successivement :

$$(IX) \quad dt = \frac{\rho_0 i^2}{\lambda s^2} (1 + \alpha t) (l - x) dx$$

$$\frac{dt}{1 + \alpha t} = \frac{\rho_0 i^2}{\lambda s^2} (l - x) dx$$

$$\frac{1}{\alpha} \log (1 + \alpha t) = \frac{\rho_0 i^2}{\lambda s^2} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$(X) \quad t = \frac{1}{\alpha} \left[ e^{\frac{\alpha \rho_0 i^2}{\lambda s^2} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)} - 1 \right]$$

avec

$$(XI) \quad t_m = \frac{1}{\alpha} \left[ e^{\frac{\alpha \rho_0 i^2 l^2}{2 \lambda s^2}} - 1 \right]$$

Le premier cas examiné, celui d'un conducteur où la variation de résistivité en fonction de la température serait négligeable, n'est qu'un cas particulier de celui-ci. On le voit en développant la fonction  $t(X)$  en série de Mac-Laurin et en s'arrêtant au second terme.

D'ailleurs, si cette courbe ne serrait pas la réalité d'assez près, on pourrait toujours introduire des fonctions de la forme  $\rho = \rho_0 (1 + \alpha t + \beta t^2)$ ,  $\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha t)$ , et intégrer.

Cela nous conduit à une méthode de calcul des pertes de chaleur latérales, pertes utiles à connaître dans certains cas. Exposons-la brièvement en passant, bien que nous ne l'ayons pas utilisée.

En pratique, les températures se répartissent le long de la barre suivant une certaine loi que l'on pourrait représenter au besoin par

$$t = A (x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots)$$

On peut mesurer le gradient aux extrémités et la quantité de chaleur dégagée par seconde ( $e. i$ ).

Il est facile de trouver un état théorique de régime caractérisé par le même gradient aux extrémités. La quantité de chaleur libérée dans ce cas est calculable par une intégration, en se servant de la courbe du régime thermique.

La différence entre ces deux quantités de chaleur est évidemment égale à la perte latérale :

$$P = (v_M - v_A) i - \frac{\rho_0 i^2}{s} \int_0^l (1 + \alpha t) dx$$

ou en remplaçant  $t$  par sa valeur donnée par (X)

$$(XII) \quad P = (v_M - v_A) i - \frac{\rho_0 i^2}{s} \int_0^l e^{\frac{\alpha \rho_0 i^2}{2 \lambda s} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)} dx$$

§ 10. — Equation de régime thermique d'un barreau de section variable. — Examen théorique du problème de l'uniformité du gradient de température.

Soit  $y$  le rayon du conducteur au point d'abscisse  $x$  (fig. 3);  $y(x)$  est la méridienne du barreau.

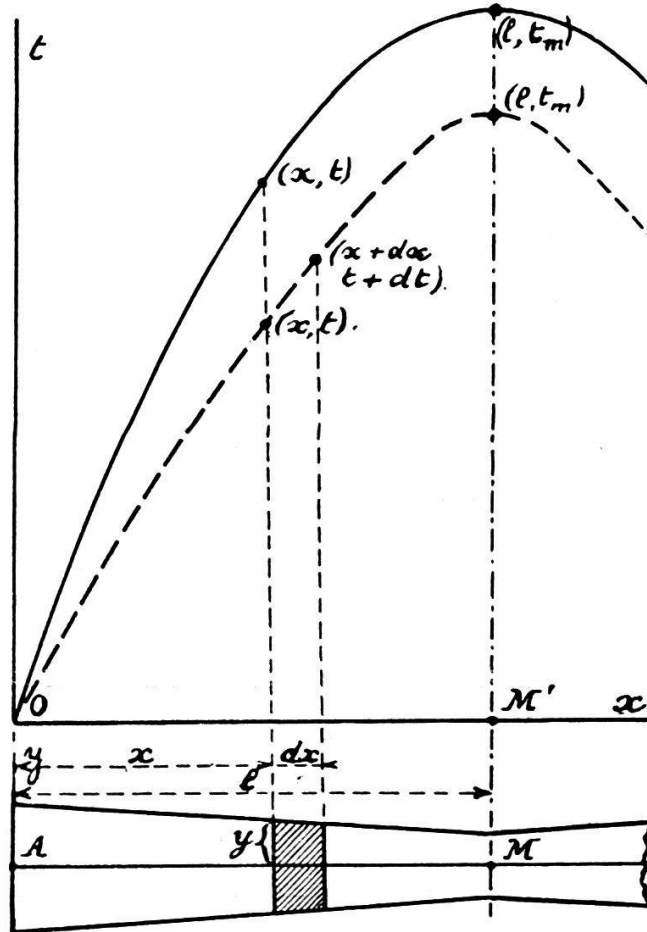


FIG. 3.

La quantité de chaleur engendrée par unité de temps dans l'élément de volume compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est

$$\frac{\rho i^2}{\pi y^2} dx.$$

Entre les points K et M, il se dépense donc une puissance calorifique égale à

$$\Delta q = \int_x^l \frac{\rho i^2 dx}{\pi y^2} = \int_x^l \frac{1 + \alpha \cdot t(x)}{y^2(x)} dx.$$

tandis que (VI) devient

$$\Delta q = \lambda \frac{dt}{dx} \pi y^2$$

D'où

$$(XIII) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\rho_0 i^2}{\lambda \pi^2 y^2} \int_x^l \frac{1 + \alpha \cdot t(x)}{y^2(x)} dx$$

Posons

$$(XIV) \quad k = \frac{\rho_0 i^2}{\lambda \pi^2}$$

Il vient :

$$\frac{dt}{dx} = -k y^{-2} \int_l^x \frac{1 + \alpha t}{y^2} dx$$

Par dérivation et substitution :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{dx^2} &= 2k y^{-3} \frac{dy}{dx} \int_l^x \frac{1 + \alpha t}{y^2} dx - k y^{-2} \cdot \frac{1 + \alpha t}{y^2} \\ \frac{d^2 t}{dx^2} &= -2 y^{-1} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dx} - k y^{-2} \cdot \frac{1 + \alpha t}{y^2} \\ (XV) \quad \frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{2}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{\rho_0 i^2}{\lambda \pi^2} \cdot \frac{1 + \alpha t}{y^4} &= 0 \end{aligned}$$

Telle est l'équation de régime thermique dans un conducteur de section non uniforme. Sous cette forme très générale, elle n'est pas intégrable.

A toute méridienne  $y(x)$  correspond un état de régime, et réciproquement, à tout état de régime physiquement plausible correspond une méridienne. (Le problème de l'intégration rigoureuse ou approximative restant réservé.)

Parmi toutes les fonctions  $y$  qui satisfont à l'équation (XV), nous voulons déterminer celle qui réaliserait l'uniformité du gradient de température.

Nous introduisons donc dans (XV) la condition

$$\frac{dt}{dx} = g$$

et ses deux conséquences

$$t = gx + h \text{ et } \frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

où  $g$  et  $h$  sont des constantes.

Il vient :

$$2g \frac{dy}{dx} + k \frac{1 + \alpha (gx + h)}{y^3} = 0$$

$$y^3 \cdot dy = - \frac{k}{2g} \left[ 1 + \alpha h + \alpha g x \right] dx$$

$$\int_{y_0}^y y^3 \cdot dy = - \frac{k}{2g} \int_0^x \left[ 1 + \alpha h + \alpha g x \right] dx$$

$$(XVI) \quad \frac{y^4}{4} - \frac{y_0^4}{4} = - \frac{k}{2g} \left[ (1 + \alpha h) x + \frac{\alpha g x^2}{2} \right]$$

L'équation (XIII) :

$$g = \frac{k}{y^2} \int_x^l \frac{1 + \alpha t}{y^2} dx$$

donne  $y = 0$  pour  $x = l$ . Ce résultat permet de fixer la constante d'intégration de l'équation (XVI) :

$$\frac{y_0^4}{4} = \frac{k}{2g} \left[ (1 + \alpha h) l + \frac{\alpha g l^2}{2} \right]$$

d'où

$$y^4 = \frac{2k}{g} \left[ (1 + \alpha h) l + \frac{\alpha g l^2}{2} - (1 + \alpha h) x - \frac{\alpha g x^2}{2} \right]$$

$$y^4 = k (l - x) \left[ \frac{2}{g} (1 + \alpha h) + \alpha (l + x) \right]$$

et, en réintroduisant la valeur de  $k$  :

$$(XVII) \quad y = \sqrt{i} \sqrt[4]{\frac{\rho_0}{\lambda \pi^2}} \sqrt{(l - x) \left[ \frac{2}{g} (1 + \alpha h) + \alpha (l + x) \right]}$$

L'examen de cette relation (XVII) montre que la fonction  $y$  est réelle pour  $x \leq l$ . La tangente en  $x = l$  est verticale.

A chaque intensité de courant correspond une méridienne particulière, comme d'ailleurs à chaque gradient de température, à chaque température aux extrémités et à chaque longueur du conducteur.

En posant  $h = 0$ , nous fixons simplement comme zéro de température la température des extrémités du conducteur, ce que nous avons toujours fait dans nos expériences. Au surplus,  $\alpha$ , coefficient d'accroissement de la résistance, étant très petit devant  $l$  et  $\frac{2}{g}$ , tous les termes en  $\alpha$  peuvent être négligés ( $\alpha_{Fe} = 0,58 \cdot 10^{-3}$ ). Il reste

$$y = \sqrt{i} \sqrt[4]{\frac{\rho_0}{\lambda \pi^2}} \sqrt{\frac{2}{g} (l - x)}$$

Voici le calcul d'un cas concret, avec des données plausibles:

$$\begin{aligned}
 i &= 90 \text{ amp.} & 2l &= 20 \text{ cm.} \\
 \rho_0 &= 9,5 \cdot 10^3 \text{ u.é.m.C.G.S.} & g &= 10 \text{ degrés. cm}^{-1} \\
 \lambda &= 0,20 \text{ cal. cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \cdot \text{degré}^{-1}. & t_{\max} &= 100^\circ
 \end{aligned}$$

ce qui donne, en unités C.G.S. :

$$\sqrt[4]{\frac{\rho_0}{\lambda \pi^2}} = 0,103 \text{ u.C.G.S.} \qquad \sqrt{i} = 3 \text{ u.C.G.S.}$$

$x_{\text{cm.}}$	$\sqrt[4]{\frac{2}{g}(l-x)}$	$y_{\text{mm.}}$	$x_{\text{cm.}}$	$\sqrt[4]{\frac{2}{g}(l-x)}$	$y_{\text{mm.}}$
0	1,189	3,68	6	0,946	2,92
1	1,156	3,58	7	0,880	2,72
2	1,125	3,48	8	0,795	2,46
3	1,088	3,36	9	0,669	2,07
4	1,047	3,24	9,5	0,562	1,74
5	1,000	3,09	9,75	0,473	1,46

La figure 4 donne l'allure de la méridienne et de la coupe du conducteur. Celui-ci a sensiblement la forme d'un tronc de cône aux extrémités. Seul l'étranglement du milieu est irréalisable.

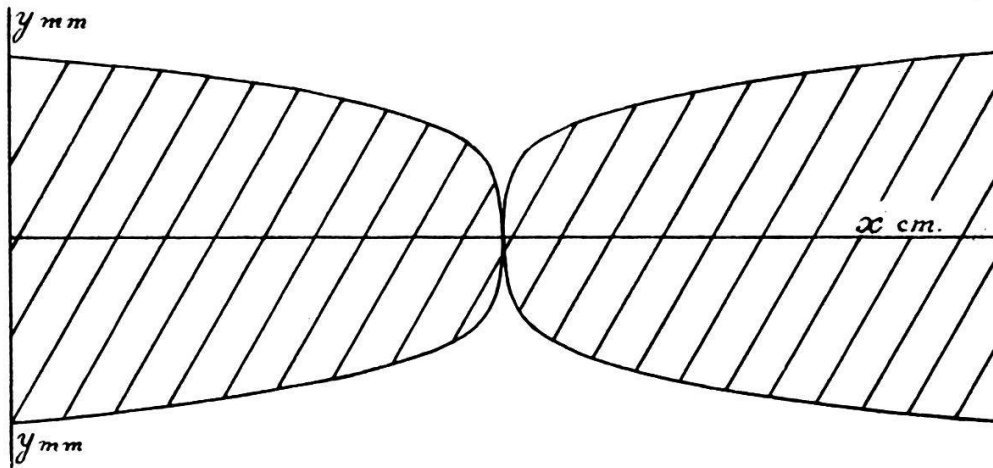


FIG. 4.

Il existe en principe un tout autre moyen d'obtenir la répartition désirée : c'est le chauffage d'un conducteur cylindrique en son milieu seulement, sur un tronçon que l'on peut concevoir aussi court que l'on veut. Il faut à cet effet un chauffage extérieur au barreau d'expérimentation, mais l'idée de principe de se servir de l'effet Joule lui-même est aban-



donnée. Cet effet Joule vient au contraire changer la répartition des températures.

En pratique, nous avons utilisé ces deux moyens. La barre que nous avons choisie a ses extrémités en forme de troncs de cônes et l'étranglement médian irréalisable est remplacé par une partie cylindrique avec chauffage extérieur au point milieu.

Les chapitres suivants montreront par quels moyens nous avons surmonté les difficultés pratiques dues aux pertes de chaleur latérales.

### § 11. — Examen pratique du problème de l'uniformité du gradient de température.

En pratique, les pertes de chaleur latérales ne sauraient être négligées. En outre, des nécessités techniques, telle qu'une certaine épaisseur nécessaire à la mesure des températures, ne permettaient pas de faire varier *ad libitum* la forme du barreau d'expérimentation.

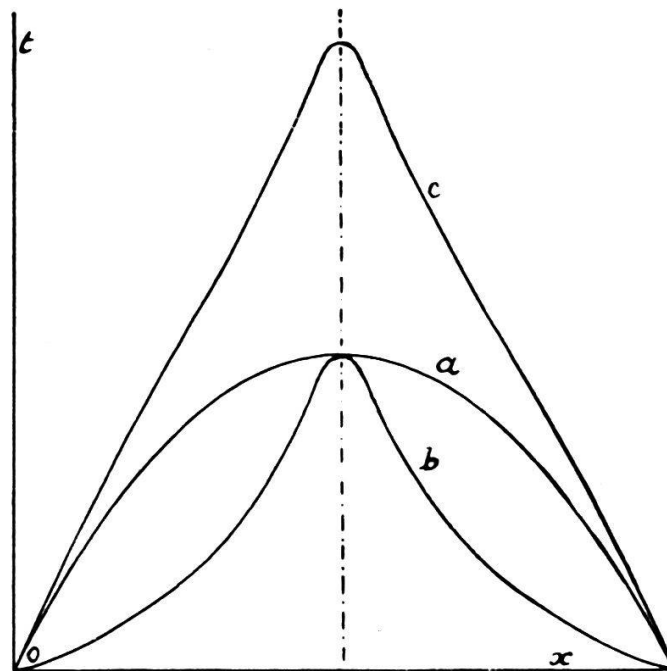


FIG. 5.

En prenant un barreau cylindrique ou en forme de double tronc de cône de section peu variable, on obtient une répartition des températures dont l'allure est en fait celle de la courbe *a* de la figure 5.

Le chauffage au point médian seulement donne une courbe qui a la forme générale de la courbe *b*. L'inflexion marquée, avec concavité dans le sens des ordonnées positives, est inévitable à cause des pertes latérales.

En chauffant simultanément par les deux moyens, les concavités tendront, si l'on peut dire, à se neutraliser. On obtiendrait alors une courbe telle que la courbe *c*, construite par addition des ordonnées des courbes *a* et *b*.

En faisant varier l'importance relative des deux systèmes de chauffage et en introduisant un barreau d'expérimentation de section variable, on peut, par tâtonnements, se rapprocher de la forme idéale, le V renversé, des courbes de température. C'est par ces moyens combinés que nous y sommes parvenu.

### § 12. — Calcul de l'effet Thomson.

Indiquons enfin une méthode générale de calcul de l'effet Thomson, valable quelles que soient les courbes de températures de régime.

Désignons respectivement par les indices *J* et *T* les chaleurs Joule et Thomson dégagées ou absorbées dans le barreau d'expérimentation lui-même; l'indice *E* indiquera une quantité de chaleur échangée. Ainsi, l'expression  $t_{J,E}$  indique que la température *t* est produite en même temps par la chaleur Joule et par la chaleur échangée avec une autre partie de l'appareil. Les températures sont toujours comptées en prenant comme zéro la température des extrémités. Il sera en outre entendu, dans les calculs ci-dessous, que les quantités de chaleur dégagées ou absorbées sont comprises par seconde. Des expressions telles que  $Q_T$  ont donc en réalité les dimensions d'une puissance et non celles d'une énergie.

Quelle que soit la répartition des températures, il est toujours possible d'en développer la courbe représentative en série

$$(XIX) \quad t_{J,E} = A(x)$$

où *x* varie donc entre zéro et *l* (cf. fig. 3). D'où pour le gradient au point d'abscisse *x* :

$$(XX) \quad \left( \frac{dt}{dx} \right)_{J,E} = \frac{dA}{dx}$$

L'expression de la chaleur Thomson dégagée dans l'élément de longueur *dx* est en valeur absolue :

$$(III) \quad dQ_T = \sigma i \frac{dt}{dx} \cdot dx$$

Supposons que l'effet Thomson se produise seul, mais exactement de la même façon que s'il était causé par la répartition exprimée par l'équation (XIX). La quantité de chaleur en jeu dans chaque élément serait alors donnée par (III), avec dans (III)

$$\frac{dt}{dx} = \left( \frac{dt}{dx} \right)_{J,E} = \frac{dA}{dx}$$

Il se produirait une autre répartition de température, caractérisée par l'équation :

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)_T = \alpha \int_x^l dQ_T = \alpha i \int_x^l \sigma \left( \frac{dt}{dx} \right)_{J,E} dx$$

qui exprime que le gradient de température dû à l'effet Thomson seul est proportionnel à la quantité de chaleur dégagée entre le point d'abscisse  $x$  et celui où la température est maxima.  $\alpha$  est un coefficient de proportionnalité.

D'où par intégration du dernier membre, entre  $x = 0$  et  $x = l$ , après avoir sorti  $\sigma$  de l'intégrale, ce qui revient en première approximation à en prendre une valeur moyenne :

$$(XXI) \quad \int_0^l dQ_T = i \cdot \sigma \cdot A(l)$$

La valeur absolue moyenne de  $\sigma$  est la seule inconnue du second membre.

La mesure consisterait à envoyer dans une partie du conducteur un courant supplémentaire tel que la moitié la moins chaude de la barre atteigne exactement la température de la moitié la plus chaude. L'énergie supplémentaire dépensée dans ce cas serait équivalente au double de la chaleur Thomson mise en jeu entre l'une des extrémités et le point de température maxima.

### § 13. — Principe de la méthode employée.

La méthode que nous avons employée découle de l'exposé ci-dessus, du dernier paragraphe en particulier, mais elle comporte de notables modifications imposées par l'expérience.

La courbe de température que nous avons obtenue est donc en forme générale de V renversé. Sans le phénomène Thomson, elle serait symétrique par rapport à un axe passant par le milieu de la barre (cf. fig. 1), courbe  $b$  en trait continu. Par suite de cet effet, les ordonnées sont légèrement modifiées.

Supposons, pour fixer les idées, que le courant principal

se propage de droite à gauche. Les températures sont alors augmentées du côté gauche de l'appareil, diminuées du côté droit. Elles se répartiraient suivant une figure telle que la courbe en traits interrompus de la figure 1.

Renversons le sens du courant : la température tend alors à diminuer du côté gauche, à augmenter du côté droit (courbe pointillée). On empêche ces modifications de répartition en augmentant le courant à gauche de l'appareil, en le diminuant du côté droit. La quantité de chaleur Joule (puissance  $e \cdot i$ ) correspondant aux deux courants compensateurs nécessaires mesure exactement, de chaque côté de l'appareil, le double de l'effet Thomson. C'est cette quantité de chaleur Joule qu'on mesure.

---

## CHAPITRE II

### L'APPAREIL PRINCIPAL

#### § 14. — Description générale <sup>1</sup>.

Le barreau servant à toutes les mesures est un barreau de fer comportant trois parties : une partie médiane cylindrique comprise entre deux parties tronconiques symétriques. Nous le nommerons barreau principal. Il est parcouru par un courant continu que nous appellerons courant principal.

Si ce barreau n'était chauffé que par le courant qui le traverse, la répartition des températures qui s'y établirait aurait approximativement l'allure de la courbe *a* de la figure 5. En outre, un courant considérable serait nécessaire pour obtenir une température suffisante.

C'est pourquoi un système supplémentaire de chauffage a été disposé pour déverser de la chaleur au milieu de ce barreau et superposer à l'état thermique stationnaire *a* l'état *b* (fig. 5) qu'on obtiendrait en n'employant que ce dernier moyen de chauffage (cf. § 11). Voici ce dispositif :

Deux barres effilées sont soudées rectangulairement à la barre principale par une de leurs extrémités. Elles sont chauffées indépendamment de la barre principale par un autre courant.

<sup>1</sup> De nombreuses expériences d'approche ont été faites au moyen de deux appareils dont nous ne parlerons pas ici. — Se référer, pour de plus amples détails, au mémoire original ; exemplaires à disposition à l'Institut de Physique de l'Université de Lausanne.