Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 4 (1931-1934)

Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs

Autor: Chuard, Jules

Kapitel: 14: Réseaux cubiques tracés sur un tore

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

dule 2, on forme l'ensemble de toutes les solutions que possède le système d'équations linéaires et homogènes (1).

Ce travail peut aussi s'effectuer sur les colonnes d'une matrice surcomplète, après omission de l'une d'elles. On constitue ainsi un grand tableau de $2^{\mu} - 1$ colonnes et de $\frac{1}{2}\, \alpha_2 (\alpha_2 - 1)$ lignes, duquel on déduira celui de l'ensemble des solutions d'un système (1), par la suppression des ν lignes dont il vient d'être question.

Il resterait à fixer les conditions auxquelles doit satisfaire le choix des ν lignes que l'on supprime. Nous ne voulons cependant pas nous y attarder, quoique les considérations qui découlent de cette étude ne soient pas dépourvues d'intérêt. Seulement, nous n'avons pas réussi à trouver le moyen de distinguer les réseaux quadratiques du premier type des autres réseaux quadratiques. Telle est la raison pour laquelle nous avons cherché une autre voie, celle des arbres linéaires et superficiels.

§ 14. **Réseaux cubiques tracés sur un tore.**

Cette question ne nous retiendra pas longuement, car le problème du coloriage des pays d'une carte dessinée sur un tore est connu. On sait qu'il faut 7 couleurs. Mais ce qu'il nous importe de faire voir, c'est qu'il serait impossible d'appliquer au tore les méthodes que nous venons de développer à l'égard de la sphère.

Le théorème d'Euler, généralisé pour le tore, donne en effet la relation suivante :

$$\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1$$

Il s'en suit que la frontière de tout arbre superficiel qui comprend les α_2 faces, est une configuration linéaire de $\alpha_0 + 1$ sommets. Or celle-ci n'est pas un arbre linéaire. Elle renferme au contraire deux contours fermés linéairement indépendants. La recherche d'un contour fermé unique qui passerait par l'ensemble des sommets est ici chose illusoire.

* * *

Ce résultat négatif s'affirme avec plus de netteté encore, si au lieu du tore on envisage des surfaces d'un ordre de connexion plus élevé. Soit P cet ordre de connexion. La frontière de tout arbre superficiel composé de la totalité des faces renferme P — 1 contours fermés linéairement indépendants, ainsi que le montre la relation

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 3 - P$$

ou

$$\alpha_1 - (\alpha_2 - 1) = \alpha_0 + P - 2 = \alpha_0 - 1 + (P - 1).$$