Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 4 (1931-1934)
Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs
Autor: Chuard, Jules
Kapitel: 13: A propos d'un autre moyen d'étudier les réseaux cubiques
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

Remarque. — Cet exemple nous a été communiqué par M. Errera à la suite d'une communication que nous avons faite à la Société Mathématique Suisse. Il n'appartient pas au cas difficile et ne saurait aucunement infirmer notre théorie, car il est exclu par la restriction 4). Le coloriage, à l'aide de quatre couleurs, est d'ailleurs aisé.

Il suffit de transformer légèrement cet exemple, en lui adjoignant une arête de plus, pour faire immédiatement apparaître un réseau quadratique du premier type, ainsi que le prouve la fig. 19.

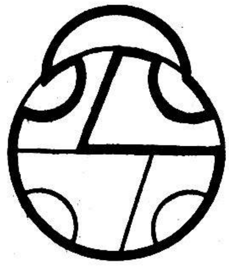

FIG. 19.

§ 13 A propos d'un autre moyen d'étudier les réseaux cubiques.

Lorsque nous avons entrepris cette étude, l'existence d'un réseau quadratique du premier type a immédiatement fait l'objet de nos plus vives préoccupations. De suite, elle s'est affirmée avec une singulière netteté. Nous pensions alors l'établir en nous basant sur les propriétés des équations de M. Veblen, ou plutôt sur celles du système fondamental de solutions. Cet essai n'a pas été concluant. Il n'est cependant pas inutile d'indiquer la voie dans laquelle nous nous étions engagé.

Les quantités α_0, α_1, α_2 et par suite μ étant fixées, il existe différents polyèdres qui ne se distinguent les uns des autres que par la forme de leurs faces. Les matrices B de ces polyèdres ne sont pas sans marquer une certaine parenté puisqu'elles se composent toutes de α_1 lignes et de α_2 colonnes. Rappelons que dans une ligne d'une telle matrice, deux éléments sont égaux à 1, tous les autres étant nuls. Dans ces conditions, il devient intéressant d'envisager une matrice qui comprend suffisamment de lignes pour que toutes les dispositions possibles de ces éléments soient prises en considération. On forme ainsi une matrice surcomplète dont le nombre des colonnes est toujours α_2, mais dont celui des lignes est devenu $\frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 - 1)$. Or il suffit de supprimer dans des conditions convenables un nombre déterminé de lignes de cette matrice surcomplète, et au besoin d'en répéter quelques-unes, pour dégager la matrice B de l'un ou l'autre des polyèdres qui comprennent α_2 faces.

A ce propos, deux cas sont à considérer suivant qu'il est nécessaire ou non de répéter une ou plusieurs lignes. Admettons qu'il n'y ait pas de répétition. Les α_1 lignes de la matrice B sont toutes distinctes. Pour les obtenir, il est nécessaire de supprimer ν lignes de la matrice surcomplète, ν étant égal à :

$$\begin{aligned} \nu &= \tfrac{1}{2}\,\alpha_2\,(\,\alpha_2 - 1\,) - \alpha_1 \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\,\alpha_2 - 3\,)\,(\,\alpha_2 - 4\,) \end{aligned}$$

Dans le polyèdre ainsi caractérisé, deux faces ont au maximum une arête commune.

Lorsque dans une matrice B des lignes sont identiques, cela signifie que des faces du polyèdre correspondant ont en commun deux ou plusieurs arêtes. Or, dans ce domaine, tous les degrés d'arbitraire sont possibles. Il n'est par conséquent pas aisé d'établir une théorie qui s'adapte à l'ensemble des matrices qui rentrent dans cette catégorie. D'ailleurs ce cas n'est pas intéressant, pour le but que nous nous étions proposé, à savoir: le coloriage des faces d'un polyèdre. C'est la raison pour laquelle nous l'avons ostensiblement laissé de côté. Voilà comment nous avons été conduit à poser la restriction 4) aux conditions du § 8, disant que *dans un polyèdre considéré, deux faces contiguës n'ont qu'une seule arête commune.*

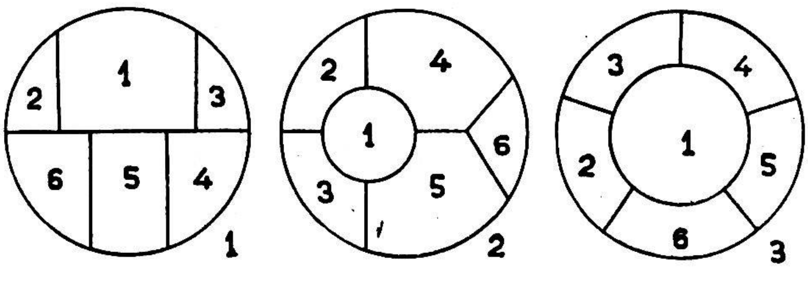

PLANCHE XIX.

A titre d'exemple, nous avons représenté des réseaux de 7 faces dans les planches I à VI. Ceux qui satisfont à la condition que nous venons de rappeler sont fixés par les planches II, IV et VI. Nous les répétons dans les figures 1, 2, 3, planche XIX, en numérotant leurs faces d'une façon arbitraire.

La matrice surcomplète de 7 faces a la teneur suivante :

1.2	1	1	0	0	0	0	0
1.3	1	0	1	0	0	0	0
1.4	1	0	0	1	0	0	0
1,5	1	0	0	0	1	0	0
1.6	1	0	0	0	0	1	0
1.7	1	0	0	0	0	0	1
2.3	0	1	1	0	0	0	0
2.4	0	1	0	1	0	0	0
2.5	0	1	0	0	1	0	0
2.6	0	1	0	0	0	1	0
2.7	0	1	0	0	0	0	1
3.4	0	0	1	1	0	0	0
3.5	0	0	1	0	1	0	0
3.6	0	0	1	0	0	1	0
3.7	0	0	1	0	0	0	1
4.5	0	0	0	1	1	0	0
4.6	0	0	0	1	0	1	0
4.7	0	0	0	1	0	0	1
5.6	0	0	0	0	1	1	0
5.7	0	0	0	0	1	0	1
6.7	0	0	0	0	0	1	1

Le nombre ν est ici égal à 6.

On obtient la matrice B de la fig. 1, planche XIX, en supprimant les lignes

2.3 2.4 2.5 3.5 3.6 4.6

celle de la fig. 2 en supprimant les lignes

1.6 1.7 2.5 2.6 3.4 3.6

et finalement celle de la fig. 3, en supprimant les lignes

1.7 2.4 2.5 3.5 3.6 4.6

* * *

On se rappelle d'autre part, que l'on passe d'une matrice B à celle d'un système fondamental de solutions, par la suppression de l'une de ses colonnes. Si alors l'on associe entre elles les μ colonnes qui restent, de toutes les manières possibles, en réduisant les nombres obtenus suivant le module 2, on forme l'ensemble de toutes les solutions que possède le système d'équations linéaires et homogènes (1).

Ce travail peut aussi s'effectuer sur les colonnes d'une matrice surcomplète, après omission de l'une d'elles. On constitue ainsi un grand tableau de $2^{\mu} - 1$ colonnes et de $\frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 - 1)$ lignes, duquel on déduira celui de l'ensemble des solutions d'un système (1), par la suppression des ν lignes dont il vient d'être question.

Il resterait à fixer les conditions auxquelles doit satisfaire le choix des ν lignes que l'on supprime. Nous ne voulons cependant pas nous y attarder, quoique les considérations qui découlent de cette étude ne soient pas dépourvues d'intérêt. Seulement, nous n'avons pas réussi à trouver le moyen de distinguer les réseaux quadratiques du premier type des autres réseaux quadratiques. Telle est la raison pour laquelle nous avons cherché une autre voie, celle des arbres linéaires et superficiels.

§ 14. **Réseaux cubiques tracés sur un tore.**

Cette question ne nous retiendra pas longuement, car le problème du coloriage des pays d'une carte dessinée sur un tore est connu. On sait qu'il faut 7 couleurs. Mais ce qu'il nous importe de faire voir, c'est qu'il serait impossible d'appliquer au tore les méthodes que nous venons de développer à l'égard de la sphère.

Le théorème d'Euler, généralisé pour le tore, donne en effet la relation suivante :

$$\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1$$

Il s'en suit que la frontière de tout arbre superficiel qui comprend les α_2 faces, est une configuration linéaire de $\alpha_0 + 1$ sommets. Or celle-ci n'est pas un arbre linéaire. Elle renferme au contraire deux contours fermés linéairement indépendants. La recherche d'un contour fermé unique qui passerait par l'ensemble des sommets est ici chose illusoire.

* * *

Ce résultat négatif s'affirme avec plus de netteté encore, si au lieu du tore on envisage des surfaces d'un ordre de connexion plus élevé. Soit P cet ordre de connexion. La frontière de tout arbre superficiel composé de la totalité des faces