Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 4 (1931-1934)
Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs
Autor: Chuard, Jules
Kapitel: 12: A propos d'un cas d'exception
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

Nous indiquons, à titre d'exemple, planche XVI, les différents tracés T_{q_i} qui résultent de l'application de la méthode que l'on vient de développer à la planche XII.

Conclusion. Il est reconnu, d'une façon indiscutable, que si l'on sait colorier une carte dont la frontière est un réseau cubique qui satisfait aux conditions restrictives du § 8, on est capable du même coup de colorier une carte dont les frontières sont quelconques. Or, dans les pages qui précèdent, nous avons montré pourquoi, sur les réseaux cubiques considérés, on doit nécessairement rencontrer une série réductible, partant mettre en évidence un contour V et par suite un réseau quadratique du premier type.

A titre de renseignement, nous faisons suivre ces pages de la reproduction des exemples cités par MM. Errera et Sainte-Lagüe dans les ouvrages que nous avons rappelés plus haut, exemples qui constituent chaque fois une irréductibilité en regard des méthodes adoptées par leurs auteurs respectifs. Sur chacun d'eux, un réseau quadratique du premier type est représenté par un trait renforcé.

§ 12. **A propos d'un cas d'exception.**

Nous considérons ici des réseaux cubiques dans lesquels certaines faces contiguës ont en commun deux arêtes et nous allons examiner relativement aux transformations d'un contour Z, la région qui est comprise entre ces deux faces.

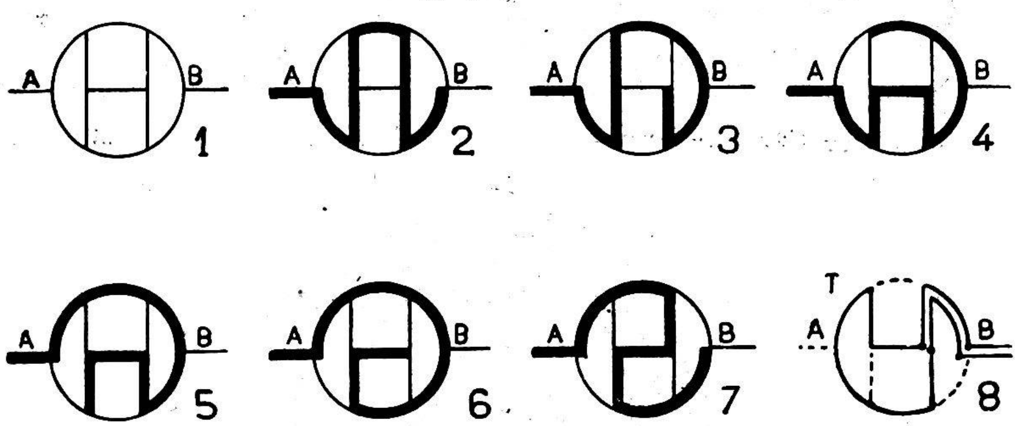

PLANCHE XVII.

Il n'est pas inutile que nous fixions les idées sur un exemple concret. C'est ainsi que nous envisageons le réseau partiel, fig. 1, planche XVII. Il est entendu que les arêtes qui aboutissent aux sommets A et B complètent un réseau cubique que nous n'avons pas jugé à propos de dessiner. Le fait que les faces de cette région sont des quadrilatères n'offre rien de particulier.

Nous admettons qu'un contour Z, après avoir passé par le sommet A, se termine au sommet B. Nous constatons qu'après avoir effectué quelques opérations doubles, nous revenons au sommet B, sans nous être arrêté sur le sommet A. Ce dernier sommet n'est pas un des sommets que l'on prend spécialement en considération sur le tracé T. Ainsi le tracé T pénètre dans la région considérée par le sommet B et il en repart au même sommet.

On comprend aisément que le tracé T ne puisse faire étape sur le sommet A, car ce dernier sommet n'est abordé qu'à l'aide d'une arête que l'on associe et par suite l'arête que l'on supprime nous transporte en un autre sommet.

Il s'en suit que le tracé T ne peut attaquer cette région qu'en y entrant au sommet B. C'est là une obligation très importante que nous ne rencontrons jamais dans le cas général. Car alors chaque contour fermé est relié avec les autres parties du réseau par trois arêtes, ou plus, de sorte qu'il peut toujours être attaqué par deux sommets au moins.

C'est ce qui explique le fait que, si un réseau cubique contient suffisamment de régions de cette espèce, il soit fort possible qu'il ne renferme aucun contour V, et par suite aucun réseau quadratique du premier type.

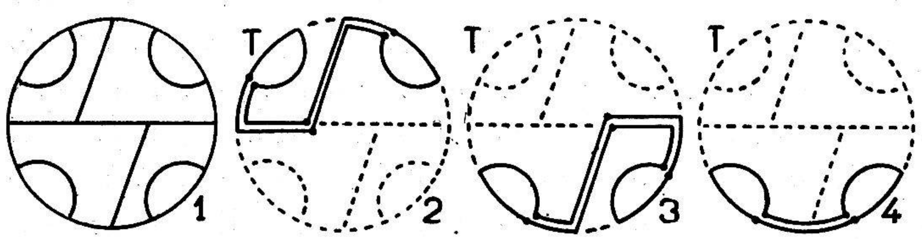

PLANCHE XVIII.

Il est à peine besoin de remarquer que la forme du réseau à l'intérieur du contour fermé qui passe par les sommets A et B, ne joue aucun rôle. Le cas le plus simple est celui dans lequel ce contour fermé ne limite qu'une seule face. Nous en donnons un exemple fig. 1, planche XVIII. Les autres figures de cette planche indiquent divers tracés T de ce réseau qui ne renferme pas de réseau quadratique du premier type.

Remarque. — Cet exemple nous a été communiqué par M. Errera à la suite d'une communication que nous avons faite à la Société Mathématique Suisse. Il n'appartient pas au cas difficile et ne saurait aucunement infirmer notre théorie, car il est exclu par la restriction 4). Le coloriage, à l'aide de quatre couleurs, est d'ailleurs aisé.

Il suffit de transformer légèrement cet exemple, en lui adjoignant une arête de plus, pour faire immédiatement apparaître un réseau quadratique du premier type, ainsi que le prouve la fig. 19.

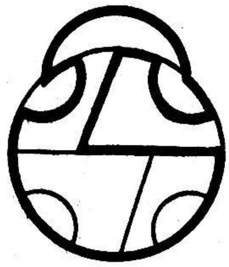

FIG. 19.

§ 13 A propos d'un autre moyen d'étudier les réseaux cubiques.

Lorsque nous avons entrepris cette étude, l'existence d'un réseau quadratique du premier type a immédiatement fait l'objet de nos plus vives préoccupations. De suite, elle s'est affirmée avec une singulière netteté. Nous pensions alors l'établir en nous basant sur les propriétés des équations de M. Veblen, ou plutôt sur celles du système fondamental de solutions. Cet essai n'a pas été concluant. Il n'est cependant pas inutile d'indiquer la voie dans laquelle nous nous étions engagé.

Les quantités α_0, α_1, α_2 et par suite μ étant fixées, il existe différents polyèdres qui ne se distinguent les uns des autres que par la forme de leurs faces. Les matrices B de ces polyèdres ne sont pas sans marquer une certaine parenté puisqu'elles se composent toutes de α_1 lignes et de α_2 colonnes. Rappelons que dans une ligne d'une telle matrice, deux éléments sont égaux à 1, tous les autres étant nuls. Dans ces conditions, il devient intéressant d'envisager une matrice qui comprend suffisamment de lignes pour que toutes les dispositions possibles de ces éléments soient prises en considération. On forme ainsi une matrice surcomplète dont le nombre des colonnes est toujours α_2, mais dont celui des lignes est devenu $1/2\, \alpha_2 (\alpha_2 - 1)$. Or il suffit de supprimer