

**Zeitschrift:** Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 4 (1931-1934)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs  
**Autor:** Chuard, Jules  
**Kapitel:** 9: Arbres linéaires et superficiels  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-250698>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

que du premier type, cela signifie que ce dernier existait déjà sur le réseau cubique préalablement donné. C'est d'ailleurs ce que nous faisons voir par les dessins de la Planche IX.

Fig. 2. Le contour fermé passe par les trois sommets du triangle.

Fig. 3. Le contour fermé ne rencontre que deux sommets.

Fig. 4. Une petite déformation a permis d'atteindre le troisième sommet.

Nous admettrons ainsi une nouvelle restriction :

5) *Les pays d'une carte minima comprendront au moins quatre côtés.*

Certains auteurs sont encore allés plus loin dans ce domaine, puisque la carte normale de M. Errera, par exemple, ne comprend pas de pays de moins de cinq côtés. Nous n'avons pas jugé à propos d'adopter ces restrictions, du moment que des cartes qui renferment des quadrilatères (celle de M. de la Vallée-Poussin, par exemple) rendent impossible le coloriage par la méthode des chaînes de Kempe.

### § 9. Arbres linéaires et superficiels.

Nous avons vu que l'on transforme un réseau donné en un arbre linéaire par la suppression d'un certain nombre d'arêtes convenablement choisies. Lorsque le réseau comprend  $a_0$  sommets et  $a_1$  arêtes, le nombre des arêtes qu'il faut supprimer est égal à  $\mu$  :

$$\mu = a_1 - a_0 + 1$$

L'arbre lui-même comprend  $a_0 - 1$  arêtes.

On transforme par analogie un polyèdre en un arbre superficiel. Le nombre des faces du polyèdre étant  $a_2$ , ces faces sont maintenues en connexion par la présence de  $a_2 - 1$  arêtes de liaison. Il suffit de supprimer les autres, ou, ce qui revient au même, de les considérer comme faisant partie d'une coupure, pour que le polyèdre devienne un arbre superficiel.

Mais en vertu du théorème d'Euler, on a :

$$\mu = a_2 - 1 = a_1 - a_0 + 1$$

On a donc la possibilité de faire apparaître sur une sphère, simultanément les deux arbres: linéaire et superficiel. C'est là une propriété bien connue, que nous énoncerons comme suit :

*Sur une sphère, la frontière de tout arbre superficiel com-*

*posé de l'ensemble des faces du polyèdre, est un arbre linéaire.*

*Réciiproquement, sur une sphère, tout arbre linéaire de  $a_0 - 1$  arêtes est la frontière d'un arbre superficiel composé de la totalité des faces du polyèdre.*

Cette réciprocité est une conséquence du principe fondamental de l'arbre linéaire: celui-ci rencontre tous les sommets du réseau sans cependant constituer de contour fermé. Si donc l'on assimile un tel arbre à une coupure, cette coupure ne morcelle pas la surface qui demeure ainsi d'un seul tenant. Les  $a_2$  faces du polyèdre ne peuvent être maintenues en connexion que suivant  $a_2 - 1$  arêtes de liaison. Elles forment ainsi un arbre superficiel.

Cette propriété est spécifique de la sphère. Nous aurons l'occasion de le rappeler plus loin, lorsque nous dirons quelques mots des réseaux tracés sur d'autres surfaces.

Il est clair que l'on pourrait envisager, sur le réseau considéré, des arbres linéaires qui renferment moins de  $a_0 - 1$  arêtes. Ces arbres n'offrent pas d'intérêt pour le but que nous poursuivons, aussi les négligerons-nous complètement.

Nous nous occuperons donc essentiellement des arbres linéaires qui comprennent  $a_0 - 1$  arêtes, n'oubliant pas que si ces arbres sont assimilés à des coupures, ils ne morcellent pas la surface de la sphère et constituent la frontière d'un arbre superficiel qui comprend la totalité des faces du polyèdre considéré.

Le nombre de ces arbres n'est en général pas connu. Nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire de le rechercher. On constate qu'il grandit très rapidement avec  $\mu$ . Ce que nous désirons, par contre, c'est de fixer une manière de les classer.

A ce propos, nous remarquons que, *par rapport à un tel arbre*, un sommet quelconque du réseau est: soit de degré 1, sommet libre; soit de degré 2, sommet servant de liaison à deux arêtes; soit de degré 3, sommet que nous avons désigné plus haut sous le nom de *bifurcation*. Et si nous comparons différents arbres linéaires d'un même réseau, nous constatons bien vite qu'ils diffèrent entre eux par le nombre de leurs bifurcations, nombre qui varie entre des limites que nous allons déterminer. Le nombre des bifurcations que renferme un arbre linéaire sera donc le moyen de classement que nous nous proposons d'adopter.

Dans les diverses opérations que comporte ce classement, nous aurons souvent l'occasion de parler des  $\mu$  arêtes qui servent de liaison aux faces de l'arbre superficiel. Parfois, c'est telle ou telle arête qui interviendra, parfois ce sera leur ensemble. Aussi, pour ne pas alourdir notre exposé, nous préférons leur donner une désignation en convenant de les dénommer *arêtes conjointes*. Leur ensemble sera le *système des arêtes conjointes*, ou plus brièvement le *système conjoint*. Ainsi, à chaque arbre de  $a_0 - 1$  arêtes, correspond un système conjoint qui comprend  $a_2 - 1$  arêtes.

Un examen même sommaire d'un arbre linéaire suffit pour constater qu'aucune arête conjointe n'aboutit à une bifurcation, car, dans ce cas, les trois arêtes du réseau font partie de l'arbre linéaire. Par suite, le nombre des bifurcations de cet arbre est en relation étroite avec la disposition des arêtes conjointes. Il est d'autant plus grand que ces arêtes aboutissent à un plus petit nombre de sommets. Il sera maximum quand elles aboutiront au nombre minimum de sommets qu'elles peuvent atteindre.

Disons d'emblée que la présence d'une bifurcation dans le système conjoint est manifestement impossible, car elle entraînerait l'existence d'un nœud superficiel parmi les faces qui composent l'arbre superficiel, ce qui ne se peut pas. Il n'y a donc pas d'arbre linéaire dans le système conjoint. Par contre, on peut y rencontrer un ou plusieurs contours ouverts ou fermés. Les contours ouverts peuvent d'ailleurs fort bien être constitués par une seule arête. Les arêtes du système conjoint aboutiront à un nombre minimum de sommets dans le cas, et dans ce cas seulement, où elles forment un ou plusieurs contours fermés. Elles ne rencontrent alors que  $\mu$  sommets. Les  $a_0 - \mu$  sommets qui restent sont autant de bifurcations de l'arbre linéaire correspondant. Or ce nombre vaut:

$$a_0 - \mu = 2\mu - 2 - \mu = \mu - 2$$

Tel est le nombre maximum de bifurcations d'un arbre linéaire. Nous conclurons par la proposition :

*Le nombre maximum de bifurcations que peut renfermer un arbre linéaire reliant entre eux les  $a_0$  sommets d'un réseau cubique est  $\mu - 2$ .*

Passant à l'autre extrémité, nous démontrerons la proposition suivante :

*Le nombre minimum de bifurcations d'un de ces arbres est zéro.*

En effet, si ces  $\mu$  arêtes étaient complètement séparées les unes des autres, elles constituerait un réseau linéaire, partant affecteraient  $2\mu$  sommets. Or le nombre de ces derniers  $a_0$  est égal à  $2\mu - 2$ . Dans ces conditions, le système conjoint ne peut être représenté par un réseau linéaire. Deux au moins de ses sommets servent de liaison à des arêtes conjointes. Et si précisément il y en a deux, l'arbre linéaire envisagé n'a que deux sommets libres; il ne présente aucune bifurcation, c'est un contour ouvert.

*En principe, il est donc possible de concevoir  $\mu - 1$  types d'arbres linéaires qui se différencient les uns des autres par le nombre de leurs bifurcations, ce nombre variant entre  $\mu - 2$  et zéro.*

Il est clair que jusqu'ici nous n'avons rien prouvé relativement à l'existence effective des arbres de ces diverses catégories. Ce que nous savons, c'est qu'il existe des arbres linéaires de  $a_0 - 1$  arêtes qui relient entre eux les  $a_0$  sommets du réseau considéré. Et nous venons de voir la possibilité que nous avons d'une répartition de ces arbres en nous basant sur le nombre de leurs bifurcations.

Nous nous proposons de montrer que si l'on part de l'un quelconque d'entre eux, il est possible d'en obtenir d'autres qui présentent un nombre moindre de bifurcations. C'est là ce que nous entendrons par: la *réduction des bifurcations* d'un arbre donné.

Ajoutons en passant qu'un arbre linéaire du dernier type a deux sommets libres et aucune bifurcation; un arbre du type précédent a trois sommets libres et une bifurcation, et ainsi de suite, d'où la proposition:

*Un arbre linéaire qui renferme  $k$  bifurcations a aussi  $k + 2$  sommets libres.*