Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 4 (1931-1934)

Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs

Autor: Chuard, Jules

Kapitel: 6: La matrice B

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

à la fois à une face marquée 1 et à une face marquée 2. Une troisième couleur est donc nécessaire pour colorier cette face. (Exemple, fig. 7.)

2° *Chaîne ouverte et arbre superficiel.* Dans un arbre superficiel, on peut noter d'un indice 1 une face quelconque. Toutes les faces qui lui sont contiguës seront marquées d'un indice 2 ; puis on reprendra l'indice 1 pour toutes les faces qui sont contiguës aux faces marquées 2, etc. Cette opération peut se poursuivre jusqu'à épuisement des faces, car l'arbre superficiel ne contient aucune chaîne fermée, de sorte que l'on ne revient jamais au point de départ. Deux couleurs suffisent donc à assurer le coloriage soit d'un arbre superficiel, soit d'une chaîne ouverte. (Exemples, fig. 9 et 10.)

3° *Chaîne bouclée et nœud bouclé.* On commence par colorier les faces de la chaîne fermée ou du nœud superficiel, puis on s'attaque à celles des arbres superficiels qui lui sont soudés. Cette dernière opération n'offre aucune particularité. Seul le nombre des faces de la chaîne fermée est important. Suivant qu'il est pair ou impair, il faudra utiliser deux ou trois couleurs. (Exemples, fig. 11 et 12.)

En résumé, l'on peut dire que deux couleurs sont suffisantes pour colorier les faces de l'un ou de l'autre des types de configurations superficielles que nous venons de définir, sauf lorsque la dite configuration renferme une chaîne fermée ou un nœud superficiel d'un nombre impair de faces, cas qui nécessite l'emploi de trois couleurs. Il est important de bien constater que les embranchements arborescents, quel que soit leur nombre ou leur étendue, ne compliquent en aucune façon le problème du coloriage.

§ 6. **La matrice B.**

Nous considérons un polyèdre quelconque de l'espace usuel, qui satisfait aux conditions énoncées plus haut. Soient α_1 et α_2 les nombres respectifs de ses arêtes et de ses faces. De la même façon que l'on a établi la matrice A d'un réseau, on peut définir une nouvelle matrice, *la matrice* B de ce polyèdre. L'on introduit à ce propos un nombre η^2_{jk} qui est égal à 1 si l'arête a^1_j fait partie de la face a^2_k, sinon le nombre η^2_{jk} est nul. L'on dispose ces nombres η^2_{jk} en un tableau rectangulaire de α_1 lignes de α_2 colonnes, de telle façon que la ligne de rang

j corresponde à l'arête a_j^1 et que la colonne de rang k corresponde à la face a_k^2. Ce tableau est la matrice B.

Deux constatations sont immédiates:

1° Puisque chaque arête du polyèdre est une arête de liaison, soit de degré 2, chaque ligne de la matrice B contient deux termes égaux à 1, tous les autres étant nuls.

2° Dans chaque colonne, les seuls termes qui ne sont pas nuls sont ceux qui correspondent aux arêtes faisant partie de la frontière de la face envisagée. Or ces arêtes constituent un contour fermé.

L'on peut se proposer d'étudier les propriétés de la matrice B de la même façon que l'on a obtenu celles de la matrice A. Là encore on conviendra de réduire toutes les opérations arithmétiques suivant le module 2.

Il en résulte que *la valeur de tout déterminant extrait de la matrice* B *est égale soit à 1, soit à zéro.*

Si l'on désire connaître la valeur du déterminant qui correspond à l'un des types de configurations superficielles envisagés plus haut, il faut admettre que cette correspondance a lieu, d'une part entre les lignes du déterminant et les arêtes de la dite configuration, et de l'autre, entre les colonnes du premier et les faces de la seconde.

A ce propos, nous devons remarquer que dans une chaîne ouverte, de même que dans un arbre superficiel, le nombre des faces est supérieur d'une unité à celui des arêtes de liaison. Pour rétablir l'égalité entre ces deux nombres, il est nécessaire de négliger une face. Si cette suppression s'opère sur une face qui est soudée à l'ensemble le long d'une seule arête de liaison, la configuration qui reste est encore connexe et se présente sous la forme d'un arbre superficiel sur lequel, en plus des arêtes de liaison, une arête libre est prise en considération d'une façon particulière. Si l'on enlève une autre face, on morcelle l'arbre superficiel en deux ou plusieurs fragments du type ci-dessus. Il suffira donc d'examiner le premier cas.

Nous nous bornerons enfin à énoncer les résultats intéressants, sans nous attarder à des démonstrations qui sont immédiates, et qui de plus sont en tous points calquées sur celles du § 3. C'est ainsi que l'on trouve que :

Tout déterminant qui correspond à :

1° *une chaîne fermée ou bouclée, est nul;*

2° *un nœud superficiel ou bouclé, est nul;*
3° *une chaîne ouverte ou un arbre superficiel, est égal à* 1.

En outre, puisque le polyèdre considéré est connexe, il est possible, et cela de diverses manières, de le transformer en un arbre superficiel unique, celui-ci comprenant les α_2 faces du polyèdre soudées entre elles le long de $\alpha_2 - 1$ arêtes de liaison. Et puisque le déterminant d'ordre $\alpha_2 - 1$ qui lui correspond est égal à l'unité, le rang de la matrice B est au moins égal à ce nombre. Mais ce rang ne peut pas être supérieur, car chaque ligne de la matrice B contient deux termes égaux à 1, et deux seulement. La somme des α_2 colonnes est donc identiquement nulle (mod. 2). On a par suite la proposition :

Le rang de la matrice B est égal à $\alpha_2 - 1$.

Mais la matrice B peut encore être envisagée à un autre point de vue. En effet, nous avons vu que chacune de ses colonnes caractérise un contour fermé, soit la frontière de la face correspondante. Elle définit donc une solution du système (1), en nombres zéro et 1. Et comme cette matrice comprend α_2 colonnes, elle fournit le moyen d'écrire immédiatement α_2 solutions du système (1). Son rang étant $\alpha_2 - 1$, on en conclut que parmi ces α_2 solutions, $\alpha_2 - 1$ sont linéairement indépendantes, et peuvent concourir à la formation d'un système fondamental de solutions.

Une circonstance particulière se présente dans le cas de la sphère, car on a en vertu du théorème d'Euler

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

ou

$$\alpha_2 - 1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 = \mu$$

ce qui prouve que l'on peut former un système fondamental de solutions du système (1) uniquement à l'aide de $\alpha_2 - 1$ colonnes de la matrice B.

Exemple. Nous considérons un polyèdre caractérisé par : $\alpha_0 = 10$ sommets, $\alpha_1 = 15$ arêtes, $\alpha_2 = 7$ faces (fig. 13).

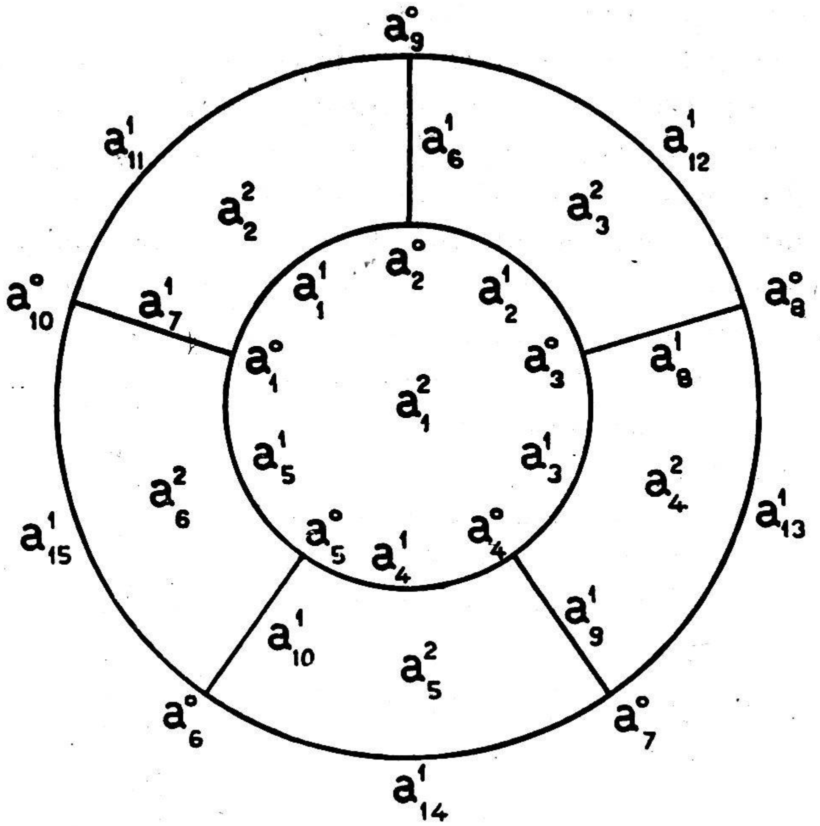

FIG. 13.

Matrice B $\longrightarrow$

	a^2_1	a^2_2	a^2_3	a^2_4	a^2_5	a^2_6	a^2_7
a^1_1	1	1	0	0	0	0	0
a^1_2	1	0	1	0	0	0	0
a^1_3	1	0	0	1	0	0	0
a^1_4	1	0	0	0	1	0	0
a^1_5	1	0	0	0	0	1	0
a^1_6	0	1	1	0	0	0	0
a^1_7	0	1	0	0	0	1	0
a^1_8	0	0	1	1	0	0	0
a^1_9	0	0	0	1	1	0	0
a^1_{10}	0	0	0	0	1	1	0
a^1_{11}	0	1	0	0	0	0	1
a^1_{12}	0	0	1	0	0	0	1
a^1_{13}	0	0	0	1	0	0	1
a^1_{14}	0	0	0	0	1	0	1
a^1_{15}	0	0	0	0	0	1	1

Matrice A

	a^1_1	a^1_2	a^1_3	a^1_4	a^1_5	a^1_6	a^1_7	a^1_8	a^1_9	a^1_{10}	a^1_{11}	a^1_{12}	a^1_{13}	a^1_{14}	a^1_{15}
a^0_1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a^0_2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a^0_3	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
a^0_4	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^0_5	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
a^0_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
a^0_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
a^0_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
a^0_9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
a^0_{10}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Tableau de l'ensemble des solutions du système (1).

																						3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
							2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
	1	2	3	4	5	6	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
3	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
5	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
7	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
8	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
9	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
10	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
11	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
13	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
14	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
15	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

Tableau de l'ensemble des solutions du système (1).
(*Suite.*)

																																6
																										5	6	6	6	6	6	5
											4	5	6	5	6	6	5	6	6	6	5	6	6	6	6	4	4	5	5	5	5	4
	4	5	6	5	6	6	5	6	6	6	3	3	3	4	4	5	4	4	5	5	4	4	5	5	5	3	3	3	4	4	4	3
	3	3	3	4	4	5	4	4	5	5	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	3	3	3	4	4	2	2	2	2	3	3	2
	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0
2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
7	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
8	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
9	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
10	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
12	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
13	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
14	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
15	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
		*		*	*			*	*												*	*	*	*	*						*	