Zeitschrift: Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 4 (1931-1934)
Heft: 2

Artikel: Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs
Autor: Chuard, Jules
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-250698

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ VAUDOISE DES SCIENCES NATURELLES
N° 25 1932 Vol. 4, N° 2

Les réseaux cubiques
et
Le problème des quatre couleurs

PAR

Jules CHUARD

(Mémoire présenté à la séance du 3 février 1932, publié avec l'appui financier de la Société Académique Vaudoise)

INTRODUCTION

Le *Problème des quatre couleurs,* souvent aussi dénommé: *Théorème des quatre couleurs,* s'est acquis une juste renommée parmi les questions d'*Analysis Situs,* tant par la simplicité de son énoncé, que par les difficultés qui se sont révélées à l'occasion de sa résolution.

On a constaté, d'une façon expérimentale, que quatre couleurs ont toujours été suffisantes jusqu'ici, pour colorier les différents pays d'une carte terrestre, de telle manière que deux pays voisins soient pourvus de couleurs distinctes. Il y a lieu d'ajouter que l'on entend par pays voisins, des pays qui ont une ligne frontière commune. S'ils ne se touchent qu'en un point, autrement dit s'ils n'ont qu'une borne commune, ils ne sont pas considérés comme voisins et peuvent par conséquent recevoir la même couleur.

La question suivante s'est alors posée :

Des régions de forme arbitraire et en nombre quelconque étant disposées sur une sphère (ou sur un plan) *sera-t-il possible dans tous les cas imaginables d'effectuer le coloriage de ces régions à l'aide de quatre couleurs seulement* ?

Tel est l'énoncé d'un problème qui a été proposé au monde mathématicien par le professeur Cayley, le 13 juin 1878, dans une séance de la Société mathématique de Londres. On en parlait certes antérieurement, mais son origine ne paraît pas pouvoir être indiquée d'une façon précise.

Dès lors, un grand nombre de spécialistes ont consacré à l'étude de cette question de sérieuses méditations. C'est ce qui explique qu'à l'heure actuelle sa bibliographie comporte une cinquantaine de mémoires, sans que l'on soit pour autant parvenu à la justifier ou à l'infirmer.

Il est curieux de constater que le même problème posé sur un tore, autrement dit sur un anneau, soit une surface plus compliquée que la sphère, est résolu depuis fort longtemps. On a montré en effet que, dans les cas les plus compliqués, sept couleurs sont nécessaires et suffisantes pour assurer le coloriage de la carte dans les conditions requises.

Mais si l'on en revient au problème de la carte sur une sphère, on doit reconnaître que les diverses publications, dont on vient de rappeler la grande variété, ne furent pas inutiles. Elles ont permis de déblayer le terrain, en ce sens que peu à peu l'on a acculé la difficulté dans un type de carte d'un caractère nettement défini. Cette carte est alors dénommée: *carte minima, carte normale,* ou aussi carte appartenant au *cas difficile.*

Une carte minima a ceci de particulier que chaque borne sert de frontière commune à trois pays distincts et à trois seulement. L'ensemble des frontières constitue alors un système de lignes qui est connu sous le nom de *réseau cubique.* Or, tandis que nos prédécesseurs, en ce domaine, ont eu plus spécialement en vue des méthodes de coloriage proprement dites, nous nous sommes résolument écarté de cette voie, pour nous attacher à l'étude des propriétés des réseaux cubiques, des réseaux cubiques tracés sur une sphère, et enfin, de ceux qui sont fournis par les cartes minima.

C'est en lisant la brochure de M. Veblen, que l'idée nous vint d'aborder cette étude. Nous avons été frappé par la simplicité des résultats auxquels conduit l'application de la méthode de cet auteur en ce qui concerne la *réduction d'un réseau cubique donné en un réseau linéaire et un réseau quadratique,* ainsi que de l'importance que présente, au point de vue du coloriage, une classification des réseaux quadratiques issus de cette réduction. Ce début nous a d'ailleurs valu une Note à l'Académie des Sciences de Paris.

Mais cette méthode, malgré des avantages incontestés, ne nous a pas permis de résoudre l'ensemble des difficultés que comporte la question. Pour en venir à bout, nous nous vîmes

dans l'obligation, à un moment donné, de faire intervenir des propriétés assez peu connues des *arbres linéaires* et *superficiels*.

Nous justifions ainsi, d'une façon affirmative, le problème des quatre couleurs, en indiquant du même coup une méthode de coloriage qui convient aux cartes minima. Les différents pays de la carte sont répartis en deux arbres superficiels distincts, grâce à un contour fermé unique, qui rencontre tous les sommets du réseau cubique donné. Et comme deux couleurs suffisent pour distinguer les pays de chaque arbre superficiel, la carte elle-même est coloriée à l'aide de quatre couleurs.

Il est clair que si la carte originale n'appartient pas au cas difficile, on commencera par lui faire subir les transformations d'usage, qui la rendront carte minima, c'est-à-dire apte à recevoir l'application de notre méthode. Après quoi, par une série d'opérations inverses, on reviendra à la carte donnée, laquelle sera entièrement coloriée à l'aide de quatre couleurs.

Pendant la préparation de ce travail, nous avons fait les communications orales suivantes :

1. Société vaudoise des Sciences naturelles, séances du 5 juillet 1922, 3 décembre 1924, 3 février 1932.
2. Société mathématique suisse, séances du 26 août 1922, 6 mai 1923.
3. Colloque mathématique des Universités de la Suisse romande, à Genève, le 17 février 1923.
4. Cercle mathématique de Lausanne, séance du 20 juin 1930.

La Note qui a paru dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, en date du 8 janvier, est intitulée:

Quelques propriétés des réseaux cubiques tracés sur une sphère.

La bibliographie, dont nous nous sommes servi, est restreinte. Il convient de citer :

1. O. Veblen: *An Application of modular Equations in Analysis Situs,* (Annals of Mathematics, Princeton, 1912).
2. A. Errera: *Du coloriage des cartes et de quelques questions d'Analysis Situs* (Paris, 1921).
3. Jules Chuard: *Questions d'Analysis Situs* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1922).

A ces ouvrages, nous ajouterons les deux fascicules XVIII

et XLI du Mémorial des Sciences mathématiques qui donnent un aperçu très complet sur l'état de la question au moment de leur publication. Le second, en particulier, mentionne 43 auteurs et 53 travaux sur le problème des quatre couleurs. Il nous dispensera de faire d'autres citations.

4. A. Sainte-Lagüe: *Les Réseaux*. Fascicule XVIII. 1926.
5. A. Sainte-Lagüe: *Géométrie de situation et jeux*. Fascicule XLI. 1929.

§ 1. Les Réseaux.

Nous avons défini antérieurement ce que l'on entend par *configuration linéaire*[1] ou *réseau*. Rappelons-en brièvement les fondements.

Une *arête* est un segment linéaire, soit un *arc de courbe de Jordan*, ou encore un lien *simple ouvert*. Elle est limitée à ses extrémités par deux points appelés *sommets*. Les sommets font partie de l'arête qu'ils limitent, mais ils sont dits *points extérieurs*, par opposition aux autres points de l'arête, lesquels sont dits *points intérieurs*.

Tout ensemble d'arêtes, en nombre fini, tel qu'un point intérieur de l'une n'appartienne jamais à une autre arête de l'ensemble, constitue ce que l'on nomme une *configuration linéaire*, un *réseau* ou un *assemblage* (*graph*, en anglais).

Nous désignerons par α_1 le nombre de ses arêtes et par α_0 celui de ses sommets. Le réseau est alors dit d'*ordre* α_0.

On entend par *degré* d'un sommet, le nombre des arêtes du réseau qui aboutissent à ce sommet. Un sommet de degré 1 sera dit *sommet libre*. Il sera dit de *liaison*, lorsque son degré est supérieur à 1. Nous conviendrons encore de nommer *bifurcation* un sommet (de liaison) dont le degré est égal à 3.

Si tous les sommets d'un réseau ont le même degré, le réseau est dit *homogène*. Un réseau homogène du premier degré est appelé réseau *linéaire*. Il ne renferme que des sommets libres. Il est donc représenté par un certain nombre d'arêtes isolées. Et puisque chaque arête a pour frontière deux sommets, on a l'égalité

$$\alpha_0 = 2\,\alpha_1$$

[1] J. Chuard : *Loc. cit.* 3.

Un réseau homogène du second degré est un réseau *quadratique*. Chacun de ses sommets sert de liaison à deux arêtes du réseau. Celui-ci comporte ainsi un ou plusieurs contours fermés, isolés les uns des autres. Il est tel que l'on a l'égalité:

$$\alpha_0 = \alpha_1$$

Un réseau homogène du troisième degré est dit *cubique*. Chacun de ses sommets est une bifurcation. On a ainsi l'égalité:

$$3\,\alpha_0 = 2\,\alpha_1$$

Un réseau homogène d'ordre α_0 et de degré k, décomposable en deux réseaux de même ordre α_0 et de degrés m et n, tels que l'on ait $m + n = k$, est nommé *réductible*. Dans le cas contraire, il est *irréductible* ou *primitif*.

Disons encore qu'un réseau est dit *connexe* si, étant donnés deux sommets quelconques de celui-ci, il est possible de trouver un certain nombre d'arêtes du réseau telles que l'on puisse, en suivant ces arêtes, passer de l'un des sommets considérés à l'autre. Si cette opération n'est pas réalisable, le réseau est dit: *non connexe*.

D'après Petersen, une *feuille* est une partie d'un réseau maintenue en connexion avec l'ensemble par une arête unique, laquelle est alors appelée *isthme*.

Il est intéressant de mentionner le théorème suivant, connu sous le nom de *théorème de Petersen*, dont la démonstration se trouve dans plusieurs des ouvrages cités par M. Sainte-Lagüe. Nous l'admettrons donc sans autre.

Un réseau cubique irréductible possède au moins trois feuilles.

De ce théorème, on déduit le suivant, d'une portée tout aussi générale, et d'une application plus immédiate:

Un réseau cubique, sans feuille, est toujours réductible.

Ajoutons enfin que la réductibilité d'un réseau cubique s'opère de manière à faire apparaître, d'une part un réseau linéaire, et de l'autre un réseau quadratique. Parfois le réseau quadratique est lui-même réductible en deux réseaux linéaires. Si cela est, le réseau cubique initial est alors réductible en trois réseaux linéaires. Cette dernière propriété est connue sous le nom de *théorème de Tait*.

Il est utile de définir quatre types de *configurations linéai-*

res connexes qui se rencontrent dans les réseaux et dont nous ferons un grand usage.

a) *Contour fermé. Un contour fermé est un réseau quadratique connexe.*

Le nombre des arêtes d'un contour fermé est égal à celui de ses sommets. Ce nombre sera au minimum égal à 2, car nous admettrons qu'une arête a toujours ses deux extrémités distinctes. On pourrait concevoir un contour fermé qui ne serait constitué que par une seule arête dont les extrémités seraient confondues en un sommet unique. Si nous ne le faisons pas, c'est que nous n'y voyons aucun avantage et que, par contre, un inconvénient se révèlerait dans l'emploi des matrices que nous définissons plus loin.

b) *Contour ouvert. Si d'un contour fermé, on supprime une ou plusieurs arêtes reliées les unes aux autres, on obtient un contour ouvert.*

Un contour ouvert de $n - 1$ arêtes renferme n sommets.

c) *Arbre linéaire. Un arbre linéaire est une configuration linéaire connexe qui ne renferme aucun contour fermé.*

Un arbre linéaire comprend $n - 1$ arêtes reliant entre eux n sommets donnés. Ces $n - 1$ arêtes constituent un nombre minimum d'arêtes nécessaires à la liaison des n sommets.

Bien souvent on désigne brièvement un arbre linéaire sous le nom d'*arbre*.

Un contour ouvert est un arbre d'une forme spéciale, caractérisée par la présence de deux sommets libres et de $n - 2$ sommets de liaison qui sont tous de degré 2. En général, un arbre a plusieurs sommets libres et des sommets de liaison d'un degré supérieur à 2.

Rappelons en passant la proposition suivante, qui est bien connue :

Il est possible de transformer en un arbre linéaire un réseau connexe de α_0 sommets et de α_1 arêtes, par la suppression de μ arêtes convenablement choisies,

$$\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 .$$

d) *Contour bouclé. Une configuration linéaire connexe ayant un égal nombre de sommets et d'arêtes, et qui n'est pas un contour fermé, est un contour bouclé.*

Un contour bouclé résulte de l'association d'un contour fermé et d'un ou plusieurs arbres linéaires, à la condition bien

entendu, que la soudure de ces différents types de configurations linéaires, n'entraîne pas la formation d'un second contour fermé.

§ 2. La matrice A.

Il est possible de caractériser un réseau à l'aide d'une certaine matrice, introduite par M. Veblen[1] sous le nom de *matrice A*.

Soit un réseau comprenant α_0 sommets et α_1 arêtes. Les frontières de chacune des α_1 arêtes sont constituées par deux sommets pris parmi les α_0 sommets considérés. Numérotons sommets et arêtes dans un ordre arbitraire et désignons:

les sommets par $a_1^0, a_2^0, \ldots\ldots, a_i^0, \ldots\ldots, a_{\alpha_0}^0$

et les arêtes par $a_1^1, a_2^1, \ldots\ldots, a_j^1, \ldots\ldots, a_{\alpha_1}^1$.

Soit maintenant η_{ij}^1 un nombre qui est égal à 1 si le sommet a_i^0 est frontière de l'arête a_j^1 et qui est nul dans tous les autres cas. Rangeons ces nombres en un tableau rectangulaire de α_0 lignes et α_1 colonnes en admettant que la ligne de rang i corresponde au sommet a_i^0, tandis que la colonne de rang j correspond à l'arête a_j^1. Le tableau ainsi formé est la *matrice A*.

L'on peut remarquer que dans cette matrice:

1° chaque colonne renferme deux nombres η_{ij}^1 égaux à 1 et deux seulement, car elle correspond à une arête qui a par définition ses extrémités distinctes.

2° la quantité de nombres η_{ij}^1 égaux à 1 que renferme une ligne indique le degré du sommet correspondant, soit le nombre d'arêtes qui aboutissent à ce sommet. Ainsi la ligne qui correspond à un sommet libre ne contient qu'un seul nom-

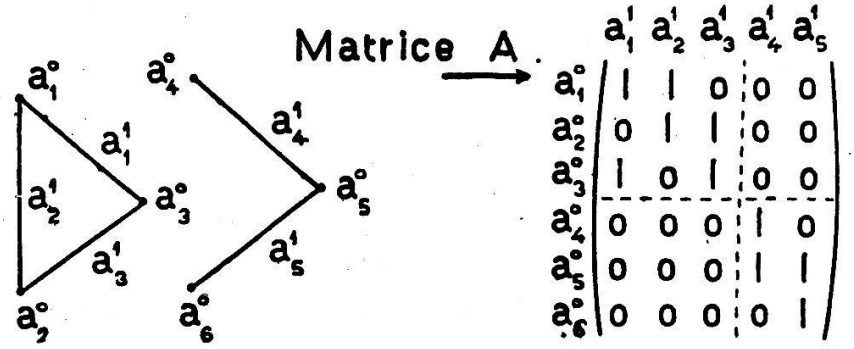


FIG. 1. — Réseau non connexe.

[1] O. VEBLEN : *Loc. cit.* 1.

bre η_{ij}^1 différent de zéro; celle qui correspond à un sommet de degré 2 en contient deux, etc.

Si d'une part, à un réseau correspond une matrice A, de l'autre, à une matrice A qui renferme des nombres zéro et un, et qui satisfait à la condition 1° ci-dessus, correspond un réseau bien déterminé. Une matrice A peut donc servir à définir un réseau.

Lorsqu'un réseau n'est pas connexe, il est possible de numéroter ses éléments, sommets et arêtes, de telle façon que la matrice A correspondante apparaisse aussi comme formée de matrices séparées. Nous nous bornerons à mettre ce fait en évidence à l'aide de l'exemple fig. 1.

§ 3. Les propriétés de la matrice A.

Nous disons qu'un déterminant est extrait de la matrice A, s'il est formé de certaines colonnes et d'autant de lignes de cette matrice.

Pour rechercher la valeur d'un déterminant extrait de la matrice A, comme pour déterminer le rang de celle-ci, on est conduit à effectuer des opérations arithmétiques qui peuvent se résumer de la façon suivante :

1° additionner deux lignes ou deux colonnes entre elles,

2° multiplier les termes d'une ligne ou d'une colonne par un certain facteur.

Nous admettrons alors que les combinaisons des nombres η_{ij}^1 qui en résultent, seront toujours réduites selon le module 2. En d'autres termes, nous n'aurons à appliquer que les quatre genres d'addition :

$$1+1=0\,,\quad 1+0=1\,,\quad 0+1=1\,,\quad 0+0=0$$

et les quatre genres de multiplication :

$$0.1=0\,,\quad 0.0=0\quad 1.1=1\,,\quad 1.0=0\,,$$

De cette façon, non seulement les nombres η_{ij}^1, mais encore tous ceux qui en résulteront par suite des combinaisons 1° et 2° ne prendront pour valeur que zéro ou un.

Il est particulièrement intéressant de rechercher la valeur d'un déterminant dont les lignes et les colonnes correspondent respectivement aux sommets et aux arêtes de chacun des types de configurations linéaires connexes que nous avons définis plus haut. A ce propos, on remarquera que le nom-

bre des sommets d'un contour fermé ou d'un contour bouclé est égal à celui de ses arêtes. Par contre, dans un contour ouvert et dans un arbre, le nombre des sommets surpasse d'un celui des arêtes. Or un déterminant a un nombre égal de lignes et de colonnes. Il est donc nécessaire, pour établir la correspondance qui doit exister entre une de ces configurations linéaires et un déterminant, de négliger un sommet. Nous abandonnerons ainsi momentanément un sommet libre. Remarquons que ce faisant on n'altère pas la nature de la configuration considérée. Il n'est peut-être pas inutile d'ajouter que si l'on avait supprimé un sommet de liaison, on aurait fractionné l'arbre en deux ou plusieurs parties, chacune d'elles étant encore un arbre amputé d'un sommet. Il y aurait alors lieu de rechercher la valeur du déterminant correspondant à chaque arbre partiel, pour en déduire celle du déterminant qui correspond à l'arbre considéré. C'est la règle du développement de Laplace qui interviendrait dans ce cas.

Les propositions suivantes sont fondamentales :

Proposition I. La valeur de tout déterminant extrait de la matrice A est zéro ou un.

C'est la conséquence naturelle de la convention que toutes les opérations se font suivant le module 2.

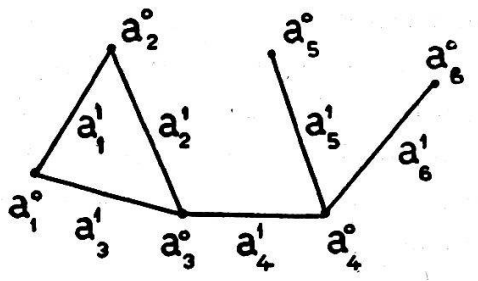
Proposition II. Tout déterminant correspondant à un contour fermé est nul.

Dans chaque ligne (colonne) du déterminant, il y a deux nombres η_{ij}^1 égaux à 1, les autres étant nuls. La somme de toutes les lignes (colonnes) est identiquement nulle (mod. 2). Le déterminant est donc nul.

Proposition III. Tout déterminant qui correspond à un contour bouclé est nul.

On sait qu'un contour bouclé renferme un contour fermé. Imaginons qu'il y ait p arêtes dans le contour bouclé et que n de celles-ci contribuent à la formation du contour fermé. Numérotons tout d'abord les éléments du contour fermé de 1 à n, puis les éléments restants du contour bouclé de $n+1$ à p. Le déterminant qui en résulte prend une forme particulière, et il suffit de lui appliquer la règle de Laplace pour constater qu'il est nul.

Proposition IV. Tout déterminant qui correspond à un contour ouvert est égal à 1.



$$\begin{array}{c|cccccc|} & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 & a^1_5 & a^1_6 \\ \hline a^0_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^0_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^0_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a^0_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a^0_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^0_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

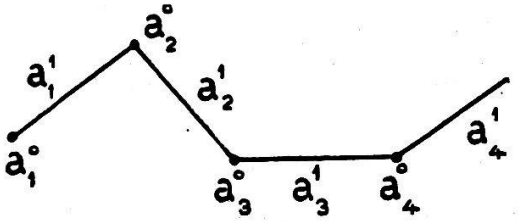
FIG. 2. — Contour bouclé.

Il est toujours possible de disposer de la notation des éléments d'un contour ouvert de façon que, lorsque l'on parcourt cette configuration d'un bout à l'autre, on rencontre successivement:

$$a^0_1\,,\ a^1_1\,,\ a^0_2\,,\ a^1_2\,,\ a^0_3\,,\ \ldots\ldots\,,\ a^1_{n-1}\,,\ a^0_n\,.$$

Imaginons que l'on supprime le sommet a^0_n. Le déterminant qui correspond au contour ouvert ainsi tronqué est tel que les termes de sa diagonale principale aient pour valeur l'unité, tandis que ceux qui se trouvent placés au-dessus de cette diagonale sont nuls. Le déterminant est donc bien égal à 1.

Si l'on avait abandonné un sommet de liaison, le contour ouvert se serait partagé en deux autres contours ouverts ayant le même caractère que celui que nous venons d'examiner. Les déterminants correspondant à chacun d'eux seraient égaux à 1, et il en serait ainsi du déterminant d'ordre $n - 1$, en vertu de la règle de Laplace.



$$\begin{array}{c|cccc|} & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 \\ \hline a^0_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^0_2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a^0_3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^0_4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

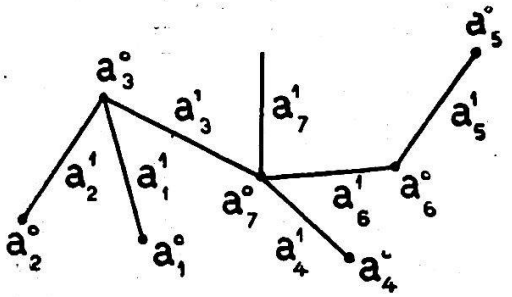
FIG. 3. — Contour ouvert.

Proposition V. Tout déterminant qui correspond à un arbre linéaire est égal à 1.

Une notation spéciale des éléments de l'arbre facilite singulièrement la démonstration.

Un arbre renferme plusieurs sommets libres. Désignons l'un d'eux par a_1^0 et soit a_1^1 l'unique arête qui aboutit à a_1^0. Imaginons que l'on supprime momentanément ces éléments: sommet et arête. La configuration qui subsiste est encore un arbre. Soient a_2^0 un de ses sommets libres et a_2^1 l'arête aboutissant à a_2^0. Supprimons ces éléments, il subsiste encore un arbre. On peut poursuivre le raisonnement qui précède jusqu'à épuisement des arêtes; la dernière, soit la n — 1ème sera limitée par les sommets a_{n-1}^0 et a_n^0. Par ce procédé chaque arête se trouve limitée par le sommet de même rang et par un autre sommet d'un rang postérieur.

Si maintenant l'on supprime le sommet a_n^0, le déterminant qui correspond à cet arbre a tous ses termes de la diagonale principale égaux à 1, tandis que ceux qui se trouvent placés au-dessus de cette diagonale sont nuls. Sa valeur est donc égale à 1.



$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 & a_7^1 \\
a_1^0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_2^0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_3^0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_4^0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
a_5^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
a_6^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
a_7^0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

FIG. 4. — Arbre linéaire.

Remarque. Il n'est peut-être pas inutile de dire que la valeur d'un déterminant ne dépend pas de la notation choisie. Car modifier la notation des sommets ou des arêtes revient à intervertir certaines lignes entre elles ou certaines colonnes entre elles. Ce sont là des opérations qui n'altèrent pas la valeur absolue d'un déterminant, la seule qui nous intéresse ici.

Proposition VI. Le rang de la matrice A d'un réseau connexe d'ordre α_0 *est* $\alpha_0 - 1$.

En effet, si le réseau est connexe, il existe au moins un arbre, formé de $\alpha_0 - 1$ arêtes, qui relie entre eux les α_0 sommets. A cet arbre correspond un déterminant d'ordre $\alpha_0 - 1$ qui est égal à 1. Le rang de la matrice A est donc

au moins égal à $\alpha_0 - 1$. Mais, puisque chacune des colonnes de cette matrice contient deux nombres η^1_{ij} égaux à 1, la somme de toutes ses lignes est identiquement nulle. Son rang est donc bien ~~sup~~inférieur à α_0 ; il est $\alpha_0 - 1$.

§ 4. Equations et solutions.

M. Veblen a imaginé d'associer à chaque ligne de la matrice A une équation linéaire et homogène. Rappelons que la ligne de rang i de cette matrice comprend les nombres :

$$\eta^1_{i1}, \quad \eta^1_{i2}, \ldots\ldots, \quad \eta^1_{i\alpha_1}$$

Envisageons donc α_1 inconnues x_j et écrivons :

$$(1) \qquad \eta^1_{i1}\, x + \eta^1_{i2}\, x_2 + \ldots\ldots + \eta^1_{i\alpha_1}\, x_{\alpha_1} = 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$
$$(\, i = 1, 2, \ldots\ldots, \alpha_0 \,)$$

Il existe α_0 équations de la forme (1). Elles constituent un système de α_0 équations linéaires et homogènes α_1 inconnues. Nous nommerons ce système: *le système* (1).

Chaque inconnue x_j du système (1) est liée à l'arête de même indice. La valeur qu'elle peut prendre, comme d'ailleurs son coefficient, est toujours un entier réduit selon le module 2.

Lorsque $x_j = 1$, nous conviendrons de dire que l'arête a^1_j est prise tout particulièrement en considération, ou qu'elle est parcourue une fois dans n'importe quel sens. Si au contraire, $x_j = 0$ nous dirons que l'on a momentanément négligé l'arête a^1_j. Cela revient à mettre en évidence, dans une opération déterminée, les arêtes du réseau qui sont marquées d'une valeur 1, tandis que l'on fait abstraction de celles qui sont marquées d'un zéro.

Le système (1) a le rang de la matrice de ses coefficients, c'est-à-dire $\alpha_0 - 1$.

Résoudre le système (1), c'est rechercher la valeur de $\alpha_0 - 1$ de ses inconnues en fonction des autres; mieux, c'est composer un système fondamental de solutions. Dans ce but, nous allons effectuer sur les lignes et les colonnes de la matrice A certaines opérations arithmétiques que nous préciserons en indiquant une méthode de résolution.

L'on prend $\alpha_0 - 1$ lignes de la matrice A et l'on permute, cas échéant, quelques-unes de ses colonnes de façon que le déterminant d'ordre $\alpha_0 - 1$, qui comprend les $\alpha_0 - 1$ premières colonnes, soit différent de zéro. Il est d'ailleurs

toujours permis de supposer que la notation des arêtes a été choisie de telle manière que ces permutations ne soient pas nécessaires. Désignons par Δ ce déterminant.

Par des combinaisons linéaires de lignes, on peut remplacer le déterminant Δ par un autre Δ' dans lequel les seuls termes qui ne sont pas nuls, se trouvent placés le long de sa diagonale principale. Ce but est toujours accessible, puisque chaque colonne du déterminant Δ renferme un ou au maximum deux nombres η_{ij}^1 égaux à 1.

Si maintenant, l'on écrit une équation linéaire et homogène avec chacune des lignes de la matrice ainsi transformée, on obtient un système d'équations (2) qui est équivalent au système (1). Mais dans le système (2), on trouve immédiatement la valeur des $\alpha_0 - 1$ premières inconnues en fonction des inconnues restantes. Celles-ci sont d'ailleurs au nombre de $\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$. En particulier, on obtient une solution du système (2), partant du système (1), en attribuant à l'inconnue x_r $(\alpha_0 \leqslant r \leqslant \alpha_1)$ la valeur 1, tandis que l'on pose

$$x_s = 0 \quad (s = \alpha_0, \alpha_0 + 1, \ldots, r - 1, r + 1, \ldots, \alpha_1).$$

Ce procédé permet de déduire μ solutions, en nombres zéro et un, du système (1), qui diffèrent toutes entre elles au moins par la valeur de l'inconnue x_r. Ces solutions sont linéairement indépendantes. Et comme toutes les autres solutions du système (1) peuvent s'obtenir à l'aide de celles-ci par des combinaisons linéaires, il s'en suit que le système de ces solutions est un *système fondamental de solutions du système* (1).

Si l'on dispose des valeurs de ces solutions dans un tableau rectangulaire de α_1 lignes et de μ colonnes, on forme une matrice de solutions que, par analogie avec ce qui est dit ci-dessus, nous nommerons *matrice fondamentale de solutions*. Chaque ligne d'une matrice de solutions correspond à une inconnue x_j et chaque colonne à une solution.

Pour un système d'équations (1) déterminé, il n'existe pas seulement une matrice fondamentale de solutions. Au contraire, tout ensemble de μ solutions linéairement indépendantes forme un système fondamental et donne lieu à une matrice fondamentale. Celle que nous avons obtenue plus haut se distingue des autres par le fait que le déterminant d'ordre μ qui est constitué par ses μ colonnes et ses μ dernières

lignes ne présente des termes différents de zéro que suivant sa diagonale principale. C'est là une conséquence du procédé de résolution adopté.

Si l'on désire obtenir l'ensemble des solutions du système (1), on doit envisager toutes les combinaisons possibles de ces μ solutions entre elles (0 à 0 , 1 à 1 , ... , μ à μ) . Le total de ces solutions est ainsi la somme des coefficients du binome, soit 2^{μ} . C'est donc un nombre fini.

On aurait pu choisir d'autres méthodes de résolution du système (1), et parvenir différemment à l'établissement d'un système fondamental de solutions. Nous avons envisagé celle qui précède parce qu'elle conduit à une interprétation géométrique simple de ses résultats.

En effet, au déterminant Δ qui est égal à 1, correspond un arbre linéaire. Cet arbre comprend les arêtes a_1^1 , a_2^1 , ... , $a_{\alpha_0-1}^1$ qui relient entre eux les α_0 sommets du réseau. Si l'on associe à cet arbre n'importe laquelle des autres arêtes, on le transforme en un contour bouclé, lequel renferme un contour fermé unique. Or c'est précisément ce que l'on fait lorsqu'on considère la solution particulière $x_r = 1$. Mais nous allons voir que du même coup, tous les embranchements arborescents disparaissent pour ne plus laisser subsister que le contour fermé.

Remarquons tout d'abord qu'un contour bouclé présente nécessairement un sommet libre. Soit a_h^0 ce sommet, par lequel ne passe qu'une arête du contour bouclé. Désignons cette arête par a_m^1. La solution considérée satisfait à toutes les équations du système (1), donc en particulier à l'équation de rang m . Mais dans celle-ci, seule la valeur x_m serait égale à 1. Les autres quantités x_j sont nulles puisqu'elles correspondent à des arêtes qui ne font pas partie du contour bouclé. Cette équation ne serait donc pas satisfaite. Pour qu'elle le soit, il est nécessaire que x_m soit égale à zéro et que par suite l'arête a_m^1 qui aboutit au sommet libre a_h^0 du contour bouclé disparaisse.

Cette amputation se poursuit tant qu'il existe un sommet libre au contour bouclé. Il ne subsiste plus finalement qu'un contour fermé. L'inconnue x_j correspondant à chacune des arêtes de ce contour est marquée d'un 1, tandis que toutes les autres inconnues sont nulles. Dans l'équation de rang i du système (1), les x_j seront toutes nulles si le sommet a_i^0

n'appartient pas au contour fermé; l'équation sera donc identiquement satisfaite. Si, au contraire, a_i^0 est un sommet de ce contour, deux x_j et deux seulement prendront la valeur 1, les autres étant nulles. L'équation sera satisfaite (mod. 2).

Ces considérations conduisent aux propositions suivantes :

Proposition VII. A chaque solution du système fondamental que nous avons obtenu plus haut correspond un contour fermé unique.

Proposition VIII. Réciproquement à tout contour fermé correspond une solution du système (1) , (en nombres zéro et un).

Les μ solutions d'un système fondamental étant linéairement indépendantes, nous conviendrons de dire que les μ *contours fermés correspondants sont linéairement indépendants.* On peut ainsi parler indifféremment de la solution ou du contour qui lui correspond.

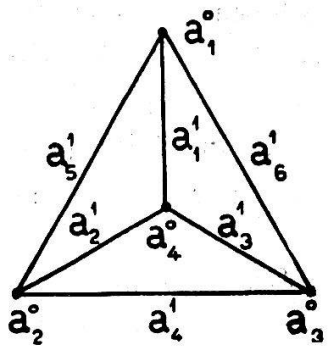
Il est parfois possible d'envisager simultanément sur un réseau deux (ou plusieurs) contours fermés distincts. A chacun d'eux correspond une solution du système (1). Il en sera de même de leur ensemble, d'où la proposition :

Proposition IX. A toute solution du système (1), *correspond un ou plusieurs contours fermés.*

Ajoutons encore que deux contours fermés qui correspondent à une même solution ne peuvent avoir une arête commune. Si en effet c'était le cas, l'inconnue x_j correspondant à cette arête prendrait la valeur 1 pour l'un et pour l'autre des deux contours, soit en tout deux fois. Mais comme 2 est congru à zéro (mod. 2), x_j doit s'annuler. De la sorte l'arête a_j^1 ne peut faire partie à la fois de deux contours fermés correspondant à une même solution.

Remarque. Pour que μ solutions constituent un système fondamental de solutions du système (1), il n'est pas nécessaire qu'à chacune d'elles corresponde un contour fermé unique; il suffit qu'elles soient linéairement indépendantes. Mais ce qui précède montre que l'on peut dans chaque cas former un système fondamental avec μ solutions telles que chacune d'elles corresponde à un seul contour fermé.

Nous appliquerons ces considérations au cas du tétraèdre : $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 6$.



$$\begin{array}{c|cccccc|} & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ \hline a_1^0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_2^0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ a_3^0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ a_4^0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

FIG. 5. — Le Tétraèdre.

On en déduit le système (1) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \qquad\qquad\qquad + x_5 + x_6 = 0 \\ \qquad x_2 + \quad + x_4 + x_5 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 + \quad + x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad\quad = 0 \end{array} \right\} \pmod{2}$$

et par suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \qquad x_5 + x_6 \\ x_2 = x_4 + x_5 \\ x_3 = x_4 + \quad + x_6 \end{array} \right\} \pmod{2}$$

L'ensemble des solutions du système (1) est contenu dans le tableau :

	0	1	2	3	2 1	3 1	3 2	3 2 1
x_1	0	0	1	1	1	1	0	0
x_2	0	1	1	0	0	1	1	0
x_3	0	1	0	1	1	0	1	0
x_4	0	1	0	0	1	1	0	1
x_5	0	0	1	0	1	0	1	1
x_6	0	0	0	1	0	1	1	1

§ 5. **Configurations superficielles.**

Nous avons étudié jusqu'ici quelques propriétés des réseaux envisagés comme systèmes de lignes, indépendamment des surfaces sur lesquelles ils peuvent être tracés. La nature de la surface toutefois qui supporte un réseau ne saurait demeurer indifférente aux propriétés de ce dernier. Car tel réseau que l'on rencontre sur une surface d'un certain genre,

ne se retrouve pas sur une surface d'un autre genre. Il y a donc un intérêt évident à étudier les propriétés d'un réseau en rapport avec celles de la surface qui le supporte. C'est une telle étude que nous allons aborder dans les pages suivantes.

Sans restreindre la généralité du sujet, on peut faire quelques conventions qui sont de nature à préciser les formes avec lesquelles on désire travailler.

Un réseau tracé sur une surface la subdivise en un certain nombre de régions que nous désignerons indifféremment sous le nom de *faces* ou de *pays*. La surface ainsi subdivisée prend le nom de *polyèdre* ou celui de *carte*.

Dans la suite, nous admettrons que :

1° *Les surfaces considérées dans cette étude sont des surfaces fermées bilatères qui ne présentent pas de lignes singulières.*

2° *Une face est toujours simplement connexe. Elle est limitée par un contour fermé unique.* Nous dirons que ce contour fait partie de la face qu'il limite, mais que ses *points* sont *extérieurs* à la face, par opposition aux autres points de celle-ci, qui sont dits: *points intérieurs.*

Il résulte de la façon dont un polyèdre a été obtenu qu'un point intérieur d'une face n'appartient jamais à une autre face. Deux faces contiguës ont en commun les points extérieurs qui font partie d'une ou de plusieurs arêtes de leur frontière.

Nous conviendrons encore de dire que tout ensemble de faces telles qu'un point intérieur de l'une n'appartienne jamais à une autre face de l'ensemble, est une configuration superficielle. L'étude de ces dernières n'est guère avancée. On peut cependant l'entreprendre dans le même esprit que celle des configurations linéaires. C'est ce que nous avons fait dans un travail déjà cité: Questions d'Analysis situs. Rappelons-en les fondements.

Considérons tout d'abord une face isolément. Sa frontière comprend un certain nombre d'arêtes. Chacune de celles-ci n'appartient pour l'instant qu'à une face. Nous dirons que ces arêtes sont de degré 1 ou aussi que ce sont des *arêtes libres*.

Soient maintenant deux faces soudées entre elles le long d'une arête commune. Cette arête appartient à la fois aux deux faces. C'est une *arête de liaison*; elle est de degré 2.

Toutes les autres arêtes de la frontière de l'une ou de l'autre des deux faces sont demeurées des arêtes libres.

On peut concevoir des configurations superficielles dans lesquelles une arête sert de liaison à un nombre de faces supérieur à deux. On y est conduit tout naturellement lorsque l'on étudie les exemples cités par Poincaré dans ses Compléments à l'Analysis Situs, et que l'on cherche à illustrer géométriquement les coefficients de torsion d'une variété d'un espace à quatre (ou plus) dimensions. Mais cette disposition ne se présente pas avec des faces d'un polyèdre de l'espace usuel. Nous n'aurons donc pas l'occasion de l'envisager dans cette étude.

Il sera ainsi entendu que, quoiqu'il existe des arêtes de liaison d'un degré supérieur, nous n'étudierons ici que des configurations superficielles dont les arêtes de liaison sont de degré 2.

Ajoutons encore qu'une configuration superficielle est dite connexe si, étant données deux faces quelconques de la configuration, il existe un certain nombre de faces et d'arêtes de liaison telles, que l'on puisse, en se déplaçant sur ces faces et en traversant ces arêtes, tracer sur la configuration une ligne continue qui relie un point intérieur de la première face à un point intérieur de la seconde.

Ainsi la connexion d'une configuration superficielle est différente de celle d'un réseau. Par exemple, un réseau peut être connexe sans que la configuration superficielle à laquelle il sert de frontière le soit. C'est ce que nous montrons dans la fig. 6 : la configuration superficielle comprend deux faces et quatre arêtes; elle n'est pas connexe. Par contre le réseau, formé de quatre arêtes et deux sommets, est connexe.

Nous nous proposons maintenant de définir quelques types de configurations superficielles connexes.

a) *Chaîne fermée. Une chaîne fermée est un ensemble de faces tel que chacune d'elles soit contiguë à deux faces de l'ensemble et à deux seulement.*

Imaginons qu'une chaîne fermée se compose de n faces. Ces faces sont soudées les unes aux autres le long de n arêtes de liaison. Les autres arêtes de leurs frontières sont des arêtes libres. Elles constituent entre elles deux contours fermés.

ou un seul !

Dans les six figures 7 à 12, les arêtes de liaison sont marquées en traits renforcés.

b) *Nœud superficiel. Nous réservons ce nom à une chaîne fermée dont toutes les arêtes de liaison convergent en un même sommet.*

La frontière d'un nœud superficiel ne comprend qu'un contour fermé.

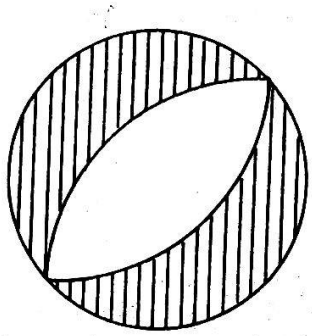


FIG. 6.
Configuration superficielle non connexe.

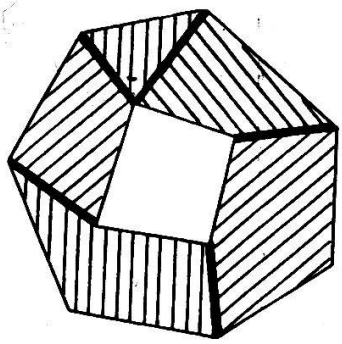


FIG. 7.
Chaîne fermée.

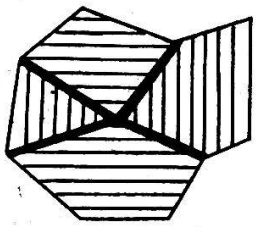


FIG. 8.
Nœud superficiel.

c) *Chaîne ouverte. Si d'une chaîne fermée ou d'un nœud superficiel, on supprime une ou plusieurs faces en connexion, on forme une chaîne ouverte.*

On constate que la suppression de la première face transforme deux arêtes de liaison en arêtes libres et que la disparition de chaque face subséquente entraîne celle d'une arête de liaison. Il y a donc dans une chaîne ouverte une arête de liaison de moins qu'elle ne comprend de faces. De plus, la frontière d'une chaîne ouverte se compose d'un seul contour fermé.

d) *Arbre superficiel. Un arbre superficiel est une configuration superficielle connexe qui ne renferme ni nœud superficiel, ni chaîne fermée.*

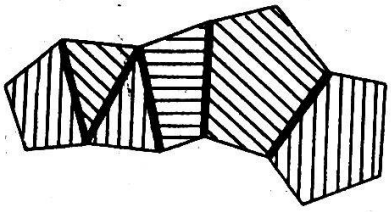


FIG. 9. — Chaîne ouverte.

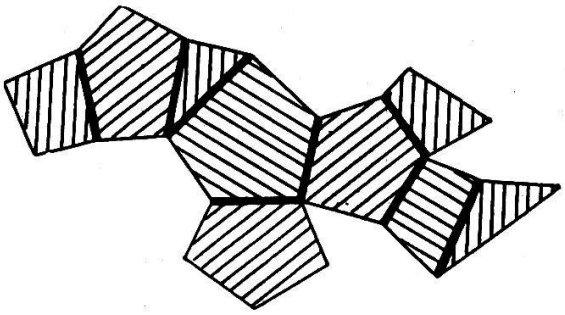


FIG. 10. — Arbre superficiel.

Si un arbre superficiel comprend n faces, celles-ci sont maintenues en connexion par $n - 1$ arêtes de liaison. Sa frontière comprend un seul contour fermé. Une chaîne ouverte est un arbre superficiel d'une forme particulière.

e) *Chaîne bouclée. Une chaîne bouclée résulte de la composition d'une chaîne fermée et d'un ou de plusieurs arbres superficiels.* Il est toutefois entendu qu'aucune nouvelle chaîne fermée ne doit naître de ces soudures.

Une chaîne bouclée possède le même nombre d'arêtes de liaison que de faces. Sa frontière comprend deux contours fermés.

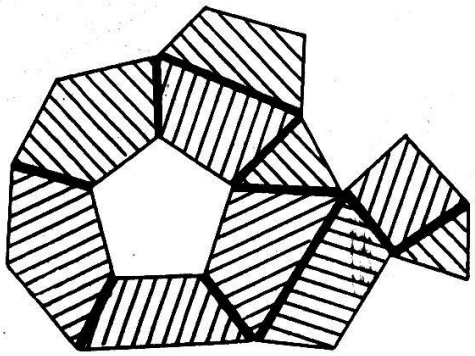


Fig. 11. — Chaîne bouclée.

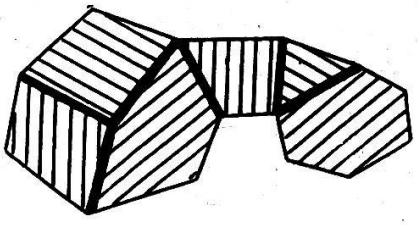


Fig. 12. — Nœud bouclé.

f) *Nœud bouclé. La configuration superficielle précédente devient un nœud bouclé si, à la chaîne fermée on substitue un nœud superficiel.*

Le nœud bouclé a les mêmes caractères qu'une chaîne bouclée, sauf qu'il est limité par un seul contour fermé.

Le but de cette étude étant le coloriage des cartes, il est naturel que nous recherchions le nombre de couleurs qui sont nécessaires pour colorier chacun des types de configurations superficielles que nous venons de définir. Considérons-les successivement :

1° *Chaîne fermée et nœud superficiel.* Le nombre des faces d'une pareille configuration peut être pair ou impair. S'il est pair, on peut assigner à chaque face un numéro 1 ou un numéro 2, et ceci de façon que toute face marquée 1 soit contiguë à deux faces marquées 2, et inversement. Les faces de même indice n'étant pas contiguës, le coloriage est possible à l'aide de deux couleurs. (Exemple, fig. 8.)

Si le nombre des faces est impair, il est possible d'opérer comme ci-dessus, sauf pour une face qui se trouve contiguë

à la fois à une face marquée 1 et à une face marquée 2. Une troisième couleur est donc nécessaire pour colorier cette face. (Exemple, fig. 7.)

2° *Chaîne ouverte et arbre superficiel.* Dans un arbre superficiel, on peut noter d'un indice 1 une face quelconque. Toutes les faces qui lui sont contiguës seront marquées d'un indice 2 ; puis on reprendra l'indice 1 pour toutes les faces qui sont contiguës aux faces marquées 2, etc. Cette opération peut se poursuivre jusqu'à épuisement des faces, car l'arbre superficiel ne contient aucune chaîne fermée, de sorte que l'on ne revient jamais au point de départ. Deux couleurs suffisent donc à assurer le coloriage soit d'un arbre superficiel, soit d'une chaîne ouverte. (Exemples, fig.9 et 10.)

3° *Chaîne bouclée et nœud bouclé.* On commence par colorier les faces de la chaîne fermée ou du nœud superficiel, puis on s'attaque à celles des arbres superficiels qui lui sont soudés. Cette dernière opération n'offre aucune particularité. Seul le nombre des faces de la chaîne fermée est important. Suivant qu'il est pair ou impair, il faudra utiliser deux ou trois couleurs. (Exemples, fig. 11 et 12.)

En résumé, l'on peut dire que deux couleurs sont suffisantes pour colorier les faces de l'un ou de l'autre des types de configurations superficielles que nous venons de définir, sauf lorsque la dite configuration renferme une chaîne fermée ou un nœud superficiel d'un nombre impair de faces, cas qui nécessite l'emploi de trois couleurs. Il est important de bien constater que les embranchements arborescents, quel que soit leur nombre ou leur étendue, ne compliquent en aucune façon le problème du coloriage.

§ 6. **La matrice B.**

Nous considérons un polyèdre quelconque de l'espace usuel, qui satisfait aux conditions énoncées plus haut. Soient α_1 et α_2 les nombres respectifs de ses arêtes et de ses faces. De la même façon que l'on a établi la matrice A d'un réseau, on peut définir une nouvelle matrice, *la matrice* B de ce polyèdre. L'on introduit à ce propos un nombre η^2_{jk} qui est égal à 1 si l'arête a^1_j fait partie de la face a^2_k, sinon le nombre η^2_{jk} est nul. L'on dispose ces nombres η^2_{jk} en un tableau rectangulaire de α_1 lignes de α_2 colonnes, de telle façon que la ligne de rang

j corresponde à l'arête a_j^1 et que la colonne de rang k corresponde à la face a_k^2. Ce tableau est la matrice B.

Deux constatations sont immédiates:

1° Puisque chaque arête du polyèdre est une arête de liaison, soit de degré 2, chaque ligne de la matrice B contient deux termes égaux à 1, tous les autres étant nuls.

2° Dans chaque colonne, les seuls termes qui ne sont pas nuls sont ceux qui correspondent aux arêtes faisant partie de la frontière de la face envisagée. Or ces arêtes constituent un contour fermé.

L'on peut se proposer d'étudier les propriétés de la matrice B de la même façon que l'on a obtenu celles de la matrice A. Là encore on conviendra de réduire toutes les opérations arithmétiques suivant le module 2.

Il en résulte que *la valeur de tout déterminant extrait de la matrice* B *est égale soit à 1, soit à zéro.*

Si l'on désire connaître la valeur du déterminant qui correspond à l'un des types de configurations superficielles envisagés plus haut, il faut admettre que cette correspondance a lieu, d'une part entre les lignes du déterminant et les arêtes de la dite configuration, et de l'autre, entre les colonnes du premier et les faces de la seconde.

A ce propos, nous devons remarquer que dans une chaîne ouverte, de même que dans un arbre superficiel, le nombre des faces est supérieur d'une unité à celui des arêtes de liaison. Pour rétablir l'égalité entre ces deux nombres, il est nécessaire de négliger une face. Si cette suppression s'opère sur une face qui est soudée à l'ensemble le long d'une seule arête de liaison, la configuration qui reste est encore connexe et se présente sous la forme d'un arbre superficiel sur lequel, en plus des arêtes de liaison, une arête libre est prise en considération d'une façon particulière. Si l'on enlève une autre face, on morcelle l'arbre superficiel en deux ou plusieurs fragments du type ci-dessus. Il suffira donc d'examiner le premier cas.

Nous nous bornerons enfin à énoncer les résultats intéressants, sans nous attarder à des démonstrations qui sont immédiates, et qui de plus sont en tous points calquées sur celles du § 3. C'est ainsi que l'on trouve que :

Tout déterminant qui correspond à :

1° *une chaîne fermée ou bouclée, est nul;*

2° *un nœud superficiel ou bouclé, est nul;*

3° *une chaîne ouverte ou un arbre superficiel, est égal à* 1.

En outre, puisque le polyèdre considéré est connexe, il est possible, et cela de diverses manières, de le transformer en un arbre superficiel unique, celui-ci comprenant les α_2 faces du polyèdre soudées entre elles le long de $\alpha_2 - 1$ arêtes de liaison. Et puisque le déterminant d'ordre $\alpha_2 - 1$ qui lui correspond est égal à l'unité, le rang de la matrice B est au moins égal à ce nombre. Mais ce rang ne peut pas être supérieur, car chaque ligne de la matrice B contient deux termes égaux à 1, et deux seulement. La somme des α_2 colonnes est donc identiquement nulle (mod. 2). On a par suite la proposition :

Le rang de la matrice B est égal à $\alpha_2 - 1$.

Mais la matrice B peut encore être envisagée à un autre point de vue. En effet, nous avons vu que chacune de ses colonnes caractérise un contour fermé, soit la frontière de la face correspondante. Elle définit donc une solution du système (1), en nombres zéro et 1. Et comme cette matrice comprend α_2 colonnes, elle fournit le moyen d'écrire immédiatement α_2 solutions du système (1). Son rang étant $\alpha_2 - 1$, on en conclut que parmi ces α_2 solutions, $\alpha_2 - 1$ sont linéairement indépendantes, et peuvent concourir à la formation d'un système fondamental de solutions.

Une circonstance particulière se présente dans le cas de la sphère, car on a en vertu du théorème d'Euler

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

ou

$$\alpha_2 - 1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 = \mu$$

ce qui prouve que l'on peut former un système fondamental de solutions du système (1) uniquement à l'aide de $\alpha_2 - 1$ colonnes de la matrice B.

Exemple. Nous considérons un polyèdre caractérisé par : $\alpha_0 = 10$ sommets, $\alpha_1 = 15$ arêtes, $\alpha_2 = 7$ faces (fig. 13).

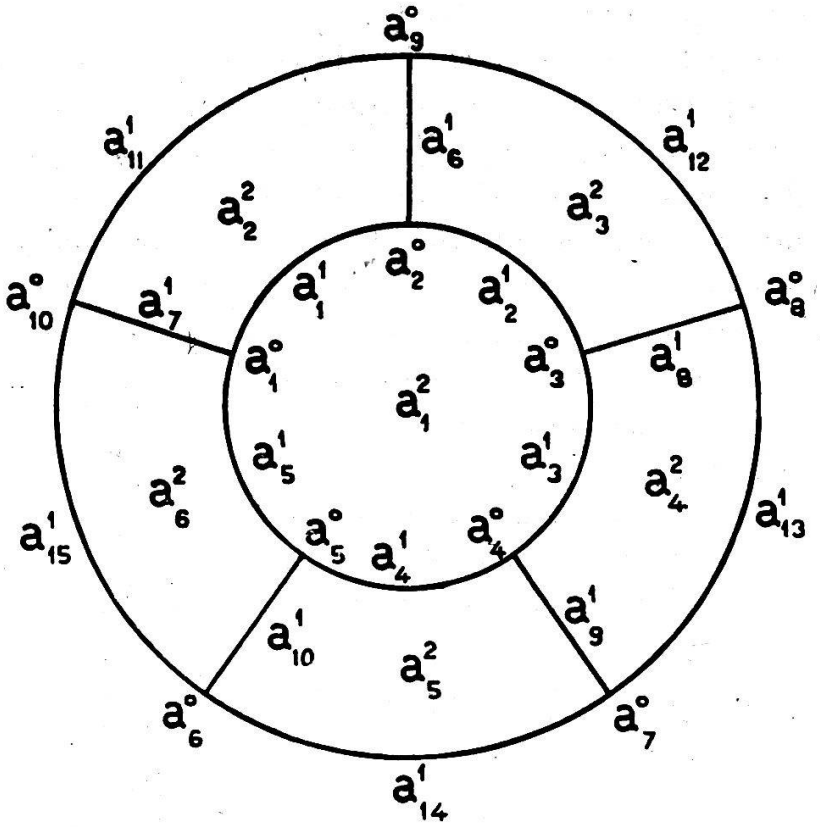


FIG. 13.

Matrice A

	a^1_1	a^1_2	a^1_3	a^1_4	a^1_5	a^1_6	a^1_7	a^1_8	a^1_9	a^1_{10}	a^1_{11}	a^1_{12}	a^1_{13}	a^1_{14}	a^1_{15}
a^0_1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a^0_2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a^0_3	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
a^0_4	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a^0_5	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
a^0_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
a^0_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
a^0_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
a^0_9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
a^0_{10}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Matrice B →

	a^2_1	a^2_2	a^2_3	a^2_4	a^2_5	a^2_6	a^2_7
a^1_1	1	1	0	0	0	0	0
a^1_2	1	0	1	0	0	0	0
a^1_3	1	0	0	1	0	0	0
a^1_4	1	0	0	0	1	0	0
a^1_5	1	0	0	0	0	1	0
a^1_6	0	1	1	0	0	0	0
a^1_7	0	1	0	0	0	1	0
a^1_8	0	0	1	1	0	0	0
a^1_9	0	0	0	1	1	0	0
a^1_{10}	0	0	0	0	1	1	0
a^1_{11}	0	1	0	0	0	0	1
a^1_{12}	0	0	1	0	0	0	1
a^1_{13}	0	0	0	1	0	0	1
a^1_{14}	0	0	0	0	1	0	1
a^1_{15}	0	0	0	0	0	1	1

Tableau de l'ensemble des solutions du système (1).

	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
							1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
3	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
5	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
7	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
8	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
9	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
10	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
11	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
13	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
14	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
15	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

Tableau de l'ensemble des solutions du système (1).
(*Suite.*)

	4	5	6	5	6	6	5	6	6	6	3	3	3	4	4	5	4	5	6	5	6	6	5	6	6	6	6	4	4	5	5	5	5	6	4
	3	3	3	4	4	5	4	4	5	5	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	3	3	3	4	4	2	2	2	2	2	3	3	4	4	3
	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0				
2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0			
3	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0			
4	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0			
5	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0			
6	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0				
7	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0				
8	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0				
9	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0				
10	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0				
11	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1				
12	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1				
13	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1				
14	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1				
15	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1				
	*		*	*			*	*													*	*	*	*	*						*				

§ 7. Réseaux cubiques tracés sur une sphère.

Les propositions que nous venons d'établir sont très générales. Elles s'adaptent à des réseaux dont il n'était pas nécessaire de préciser la forme. Il est cependant particulièrement intéressant, pour le but que nous visons, de les appliquer à des réseaux cubiques tracés sur une sphère. C'est ce que nous allons examiner.

Il n'est pas inutile de rappeler que si un réseau cubique comprend α_0 sommets et α_1 arêtes, ces nombres sont liés entre eux par les égalités suivantes :

$$\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_0}{3} = \alpha_1 - \alpha_0$$

Si de plus, ce réseau est tracé sur une sphère qu'il transforme en un polyèdre comprenant encore α_2 faces simplement connexes, le théorème d'Euler permet d'écrire:

$$\alpha_2 - 1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1 = \mu$$

Considérons un tel polyèdre et imaginons que l'on ait établi les deux matrices A et B, en correspondance, la première avec ses sommets et ses arêtes, la seconde avec ses arêtes et ses faces. De la matrice A on déduit le système d'équations linéaires et homogènes (1), dont on forme un système fondamental de solutions à l'aide de μ colonnes de la matrice B. Il n'y a donc pas lieu de se préoccuper de la forme du système (1), puisque l'on dispose d'emblée de ses solutions.

Cependant ici, une remarque s'impose. Suivant une méthode propre à l'Analysis situs, on sait que l'on peut procéder à l'extension de l'une des faces du polyèdre considéré, n'importe laquelle, tout en rétrécissant au besoin les autres, et ceci de telle façon qu'elles viennent s'appliquer sur la face étirée. Cette dernière seule est ainsi masquée, les autres demeurent toutes visibles. Or lorsque l'on décrit le système fondamental de solutions, on peut précisément négliger celle des colonnes de la matrice B qui correspond à la face cachée.

Partant de ce système fondamental, on obtient l'ensemble des solutions du système (1) en combinant de toutes les manières possibles, d'abord 1 à 1, puis 2 à 2, 3 à 3, ... ses μ colonnes. Leur nombre est égal à $2^\mu - 1$, si l'on fait

abstraction de la solution identiquement nulle, qui d'ailleurs ne nous intéresse pas ici. Cette méthode a justement été appliquée à l'exemple qu'illustre la figure 13. Alors μ était égal à 6. Nous avons indiqué le tableau des $2^6 - 1$ solutions obtenues en partant des six premières colonnes de la matrice B.

Ainsi que nous l'avons vu plus haut, à chaque solution du système (1) correspond un contour fermé ou un ensemble de contours fermés. Cette propriété entraîne, dans le cas des réseaux cubiques, une proposition intéressante :

Deux contours fermés correspondant à la même solution du système (1) *ne peuvent pas se rencontrer.*

La rencontre ne serait possible en un sommet du réseau que si par celui-ci passaient quatre arêtes, car la même arête ne peut appartenir à deux contours fermés distincts. Si en effet, cette dernière éventualité se présentait pour l'arête a_m^1 la quantité x_m serait égale à $2 \equiv 0$ (mod. 2), d'où l'on conclurait que cette arête n'appartient à aucun des deux contours.

D'autre part, les réseaux que nous considérons ne renferment aucun isthme. En vertu du théorème de Petersen, ils sont réductibles en un réseau quadratique et un réseau linéaire. Mais un réseau quadratique est représenté par un ou plusieurs contours fermés. Il correspond donc à une solution du système (1). Et comme un tel réseau comprend un nombre égal d'arêtes et de sommets, soit α_0, la solution correspondante comprendra α_0 valeurs des x_j égales à 1, les $\alpha_1 - \alpha_0$ valeurs qui restent étant nulles. Il s'en suit la proposition :

A chaque réseau quadratique contenu dans le réseau cubique considéré correspond une solution du système (1) *qui comprend* α_0 *valeurs des* x_j *égales à* 1.

Grâce au théorème de Petersen, nous savons que de pareilles solutions existent. Remarquons en passant que ce sont celles qui possèdent un nombre maximum de valeurs x_j égales à 1, ceci en vertu du fait que le polyèdre renferme α_0 sommets et de la propriété des réseaux quadratiques que nous venons de rappeler. De plus, le nombre total des solutions du système (1) étant égal à $2^\mu - 1$, il n'y a qu'à prélever dans cet ensemble les solutions qui sont marquées de α_0 quantités x_j égales à 1, pour obtenir tous les réseaux quadratiques qui sont contenus dans le réseau cubique envi-

sagé. On a ainsi un moyen de déceler toutes les réductions possibles, d'où la proposition :

Le nombre des réductions d'un réseau cubique donné est égal au nombre de solutions du système (1) *qui comprennent* α_0 *valeurs* x_j *égales à* 1.

Une question vient ici tout naturellement à l'esprit :

Le nombre μ *étant donné, quel est le nombre des réductions que comporte le réseau cubique considéré?*

Il n'apparaît pas que la réponse en soit aisée. Son importance, pour la suite de nos déductions, n'étant pas essentielle, nous ne nous y attarderons guère. Nous nous bornerons simplement à constater que, sous cette forme, la question manque de précision. Il existe un général plusieurs polyèdres dont le nombre des faces est le même, mais qui se distinguent les uns des autres par la nature de ces faces. Le nombre μ relatif à ces polyèdres est invariable, tandis que le nombre des réductions possibles varie d'un polyèdre à l'autre.

Nous en donnerons pour preuve les quelques exemples ci-dessous qui correspondent tous au cas $\mu = 6$. Le dernier est celui que nous avons étudié plus haut, fig. 13. Nous avions alors, dans le tableau complet des solutions, marqué d'un * celles qui définissent les différents réseaux quadratiques.

* * *

Il est possible de classer les réseaux quadratiques qui sont issus de la réduction d'un réseau cubique, en trois types, de la façon suivante :

Nous dirons qu'un réseau quadratique est du :

Premier type, s'il est représenté par un contour fermé unique.

Second type, s'il comprend deux ou plusieurs contours fermés, chacun d'eux renfermant un nombre pair d'arêtes (ou de sommets).

Troisième type, s'il comprend deux ou plusieurs contours fermés, parmi lesquels il en est qui renferment un nombre impair d'arêtes.

Du moment que α_0 est un nombre pair, on peut ajouter de suite que, dans ce dernier cas, le nombre des contours fermés qui renferment un nombre impair d'arêtes est lui-même pair.

Dans les planches I à VI, nous avons accompagné chaque réseau quadratique d'un indice I, II ou III correspondant à son type.

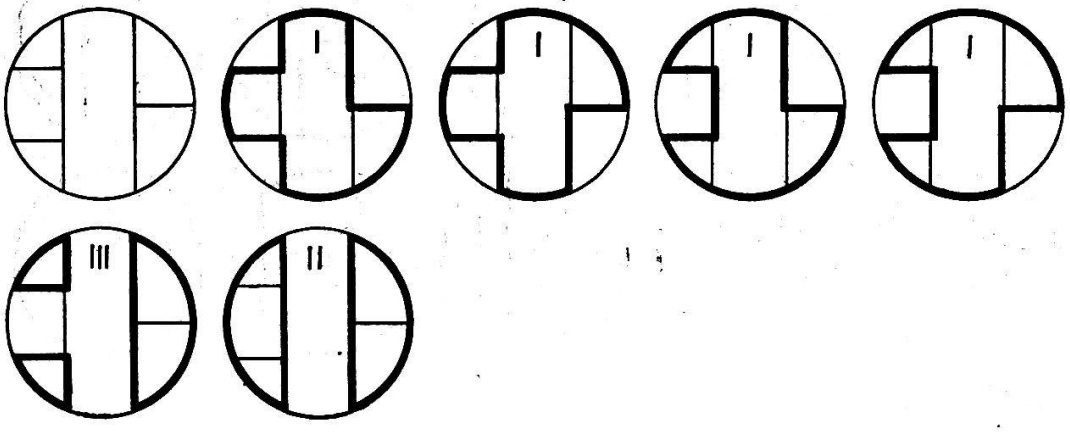


PLANCHE I. — Six réseaux quadratiques.

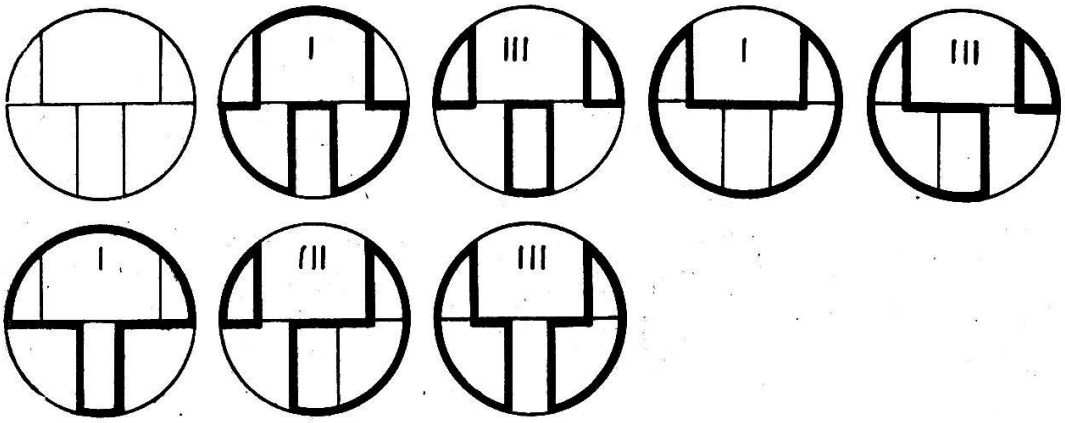


PLANCHE 2. — Sept réseaux quadratiques.

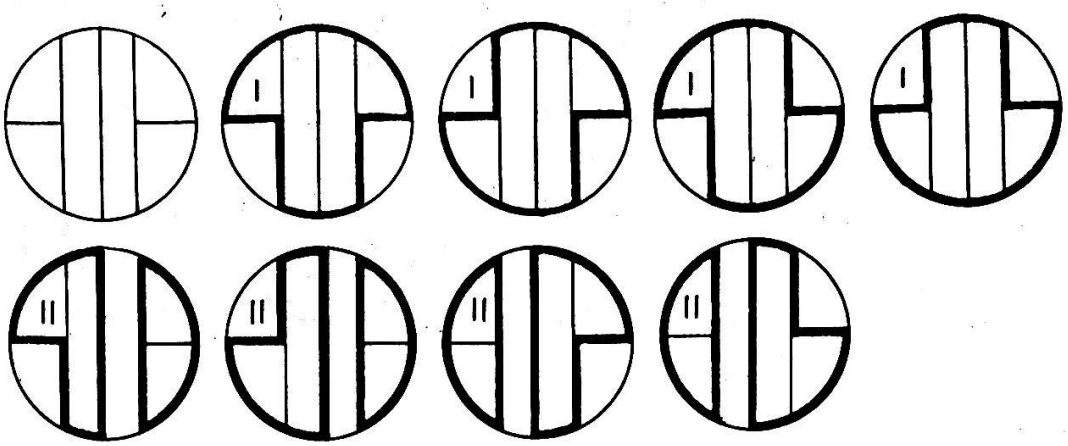


PLANCHE 3. — Huit réseaux quadratiques.

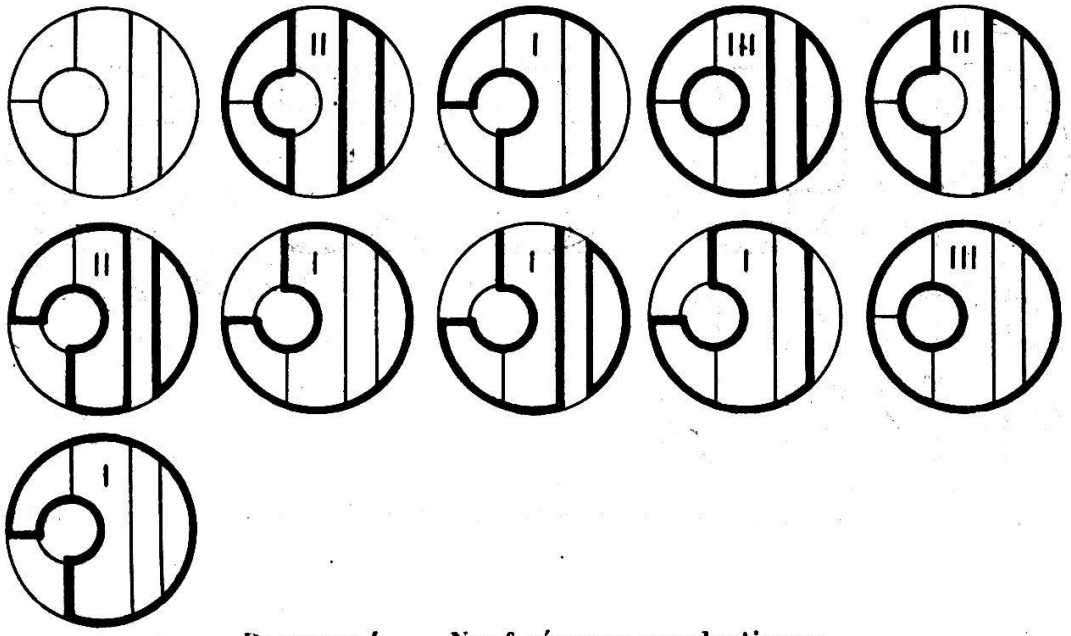


PLANCHE 4. — Neuf réseaux quadratiques.

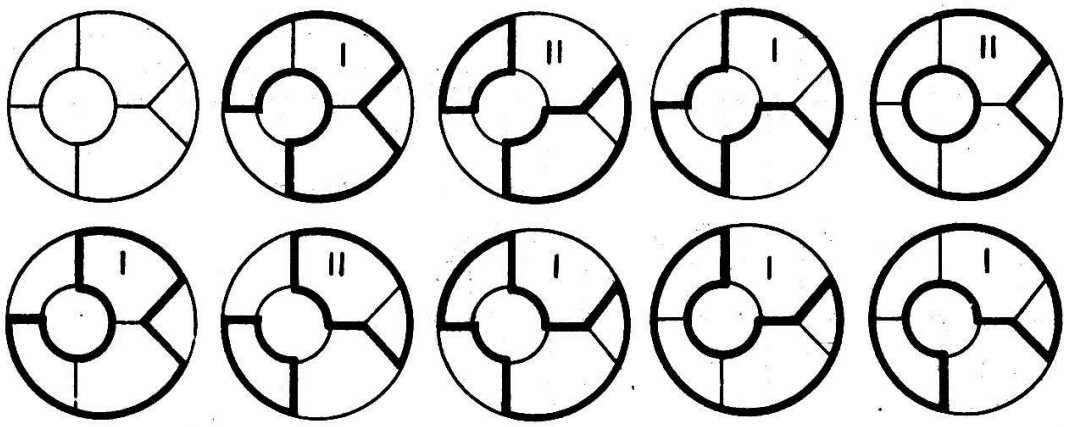


PLANCHE 5. — Dix réseaux quadratiques.

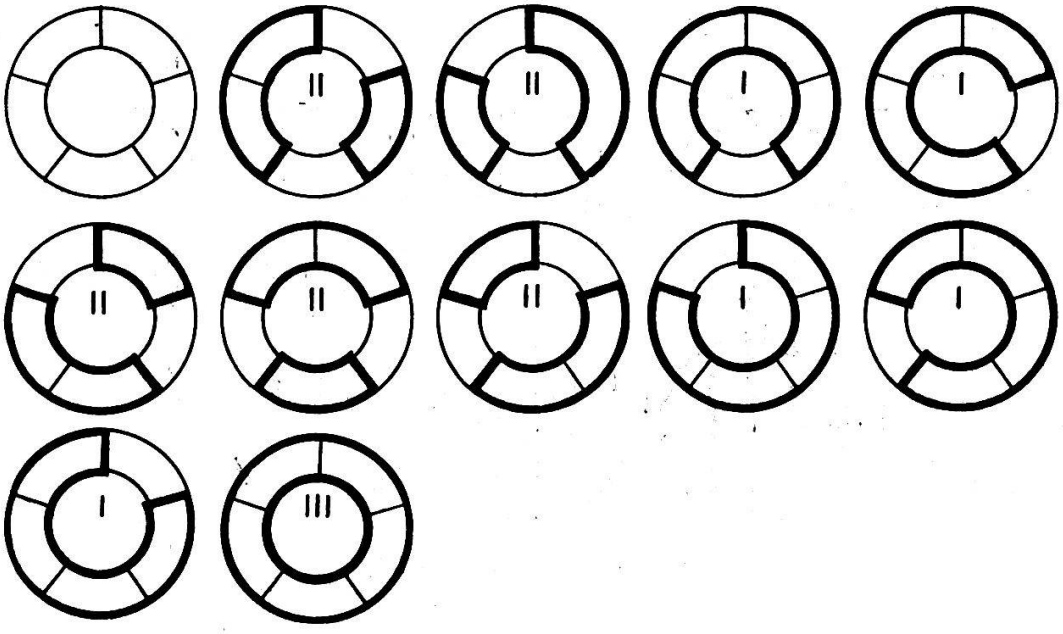


PLANCHE 6. — Onze réseaux quadratiques.

L'importance de ces types de réseaux quadratiques apparaît lorsque l'on se place au point de vue du coloriage du polyèdre. A cet effet, nous allons regarder chacun de ces réseaux comme une coupure et examiner ce qui en résulte relativement au morcellement de la sphère.

Premier type. La surface de la sphère, autrement dit celle du polyèdre, se trouve partagée en deux parties nettement distinctes. Ni l'une, ni l'autre de ces parties ne peut renfermer une chaîne fermée, car la présence d'une telle chaîne entraînerait l'existence d'un second contour fermé. Elles ne peuvent pas davantage contenir de nœud superficiel, puisque tous les sommets sont sur la frontière. Ce sont donc des arbres superficiels.

Ainsi un contour fermé unique qui passe par tous les sommets du réseau a pour effet de grouper les différentes faces du polyèdre en deux arbres superficiels. Et comme deux couleurs suffisent à colorier différemment les faces d'un tel arbre, quatre couleurs assureront certainement le coloriage du polyèdre dans son entier.

Second type. Chaque contour fermé étant regardé comme une coupure, leur ensemble morcellera la surface de la sphère en un certain nombre de régions, les unes limitant des arbres superficiels, les autres des chaînes fermées ou bouclées.

Considérons l'un de ces arbres superficiels. Sa frontière est un contour fermé qui renferme un nombre pair de sommets. Certains de ces sommets sont reliés entre eux par des arêtes de liaison des faces de l'arbre superficiel envisagé. Mais ces sommets-là sont toujours en nombre pair. Il en résulte que les sommets situés sur la frontière de cet arbre, mais qui ne font pas partie des arêtes de liaison de ses faces, sont aussi en nombre pair. Or c'est précisément par ces derniers sommets que passeront les arêtes de liaison de la chaîne fermée qui entoure le dit arbre superficiel. Il s'en suit que la chaîne fermée renfermera un nombre pair de faces.

Le même raisonnement se poursuivrait à l'égard des autres chaînes fermées, qui toutes renfermeront un nombre pair de faces.

Imaginons maintenant que l'on attribue l'indice 1 à l'une quelconque des régions que nous venons d'examiner. On attribuera l'indice 2 à toutes les régions qui sont en connexion avec la première, puis l'indice 1 à toutes celles qui sont en

connexion avec la région 2, et ainsi de suite. On est certain, de cette façon, d'épuiser toutes les régions de la sphère.

Nous savons que deux couleurs suffisent à assurer le coloriage d'un arbre superficiel ou d'une chaîne fermée, si celle-ci renferme un nombre pair de faces. C'est précisément le caractère des différentes régions que nous venons de mettre en évidence. Nous sommes donc encore en droit de conclure que quatre couleurs suffiront à assurer le coloriage de l'ensemble des faces du polyèdre.

Troisième type. La répartition de la surface de la sphère en régions d'indices 1 et 2 est toujours possible. Mais ici il existera des chaînes fermées comprenant un nombre impair de faces, dont le coloriage nécessitera trois couleurs. On ne pourra plus affirmer que par ce moyen on a encore le loisir de colorier les différentes faces du polyèdre avec quatre couleurs. Cela pourra avoir lieu dans certains cas particuliers, mais cela ne sera plus possible en général.

En conclusion de ce qui précède, nous dirons que la présence d'un seul réseau quadratique du premier ou du second type suffit à assurer le coloriage des différentes faces des polyèdres considérés à l'aide de quatre couleurs. Pour que cette opération soit impossible, il est nécessaire que tous les réseaux quadratiques soient du troisième type.

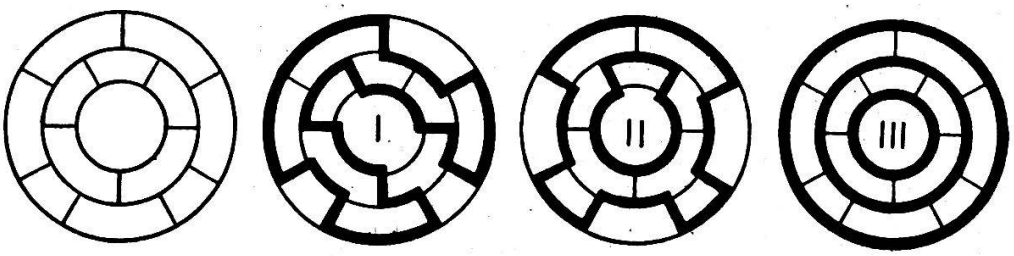


PLANCHE VII. — Exemple de M. de la Vallée-Poussin.
Un réseau quadratique de chaque type.

La présence dans l'une quelconque des régions que nous avons affectées plus haut d'un indice 1 ou 2 d'une ou plusieurs ramifications superficielles arborescentes ne complique en aucune façon le problème du coloriage. La difficulté provient uniquement des chaînes fermées qui renferment un nombre impair de faces.

Dans l'exemple que nous donnons, planche VII, dû à M. de la Vallée-Poussin [1], nous indiquons un représentant de chaque type de réseau quadratique.

§ 8. Le problème de la carte.

Une carte de forme arbitraire étant donnée sur une sphère, les propositions suivantes sont connues[2]:

1) *Le coloriage d'une carte se ramène à celui d'une autre carte, dont tous les sommets sont de degré trois, et dont le nombre des pays n'a pas augmenté.*

L'ensemble des arêtes frontières constitue alors un réseau cubique.

Au point de vue du coloriage, on ne restreint pas la portée du problème, dans chacun des cas suivants :

2) *Le réseau cubique considéré est connexe.* Il ne comprend donc pas des pièces séparées.

3) *Ce réseau cubique ne renferme pas de boucle.* Sinon une arête n'appartiendrait à aucune frontière.

4) *La frontière commune à deux pays voisins se compose d'une seule arête.*

C'est ainsi que nous excluons des réseaux cubiques que nous allons examiner, des particularités telles que celles qui sont représentées planche VIII.

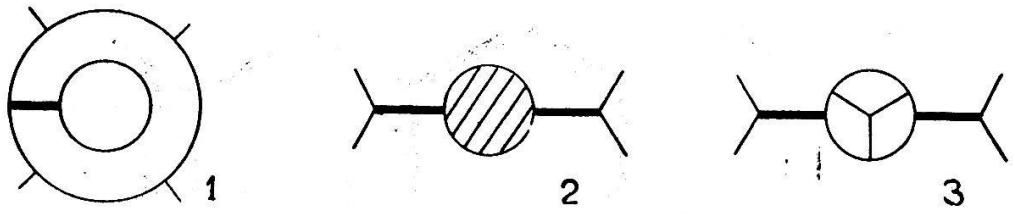


PLANCHE VIII. — Particularités qui sont exclues de nos réseaux cubiques.

Les restrictions que nous venons d'apporter aux réseaux cubiques que nous examinerons dorénavant, on ne le répétera jamais assez, ne diminuent en rien la généralité du problème du coloriage de la carte. Le réseau qui subsiste est précisément celui d'une carte minima, d'une carte normale, ou d'une carte qui appartient au cas difficile. Si par conséquent, l'on parvient à colorier cette carte minima à l'aide de qua-

[1] Cf. A. ERRERA : *Loc. cit.* 2, page 15.
[2] Cf. par exemple A. ERRERA : *Loc. cit.* page 34.

tre couleurs, l'on sera certain, à plus forte raison, d'être à même de colorier n'importe quelle autre carte.

Dans ce but, nous nous proposons d'établir la proposition suivante, qui est fondamentale :

Dans un réseau cubique, qui satisfait aux conditions 1), 2), 3), 4), *il existe au moins un réseau quadratique du premier type.*

Cette proposition peut encore s'énoncer comme suit :

Dans un réseau cubique, qui satisfait aux conditions 1), 2), 3), 4), *il existe au moins un contour fermé unique qui passe par l'ensemble des sommets du réseau.*

Cette proposition, disons-nous, est fondamentale, car elle résout *ipso facto* le problème proposé. Nous avons vu, en effet, au § 7, que ce réseau quadratique sépare les différents pays de la carte en deux arbres superficiels distincts. Et comme le coloriage de chacun d'eux nécessite deux couleurs seulement, celui de l'ensemble est assuré avec quatre couleurs. C'est là le nœud de la question, sur lequel nous allons porter toute notre attention dans les paragraphes qui suivent.

Remarquons encore que, sur un réseau cubique remplissant les conditions requises, il peut exister plusieurs réseaux quadratiques du premier type. Nous n'avons pas à en rechercher le nombre. Il nous suffira uniquement de justifier l'existence de l'un d'entre eux.

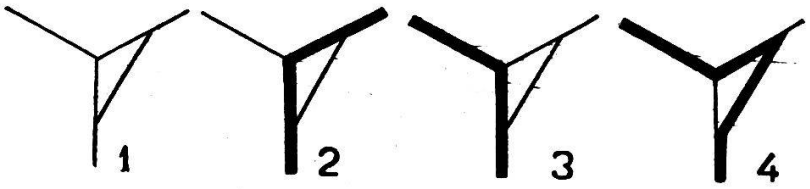


PLANCHE IX. — Comment se comporte un réseau quadratique du premier type en présence d'un triangle.

Une carte minima, dans les conditions où nous nous trouvons, ne renferme pas de pays à moins de trois côtés. Mais elle peut comprendre des triangles, des quadrilatères, des pentagones, ... La présence de pays de forme triangulaire n'est pas indispensable pour le but que nous poursuivons, savoir la justification de l'existence d'un réseau quadratique du premier type. On peut momentanément faire disparaître ces pays-là, en effaçant une des arêtes de leur frontière. Et si sur le réseau cubique ainsi amputé, il existe un réseau quadrati-

que du premier type, cela signifie que ce dernier existait déjà sur le réseau cubique préalablement donné. C'est d'ailleurs ce que nous faisons voir par les dessins de la Planche IX.

Fig. 2. Le contour fermé passe par les trois sommets du triangle.

Fig. 3. Le contour fermé ne rencontre que deux sommets.

Fig. 4. Une petite déformation a permis d'atteindre le troisième sommet.

Nous admettrons ainsi une nouvelle restriction :

5) *Les pays d'une carte minima comprendront au moins quatre côtés.*

Certains auteurs sont encore allés plus loin dans ce domaine, puisque la carte normale de M. Errera, par exemple, ne comprend pas de pays de moins de cinq côtés. Nous n'avons pas jugé à propos d'adopter ces restrictions, du moment que des cartes qui renferment des quadrilatères (celle de M. de la Vallée-Poussin, par exemple) rendent impossible le coloriage par la méthode des chaînes de Kempe.

§ 9. **Arbres linéaires et superficiels.**

Nous avons vu que l'on transforme un réseau donné en un arbre linéaire par la suppression d'un certain nombre d'arêtes convenablement choisies. Lorsque le réseau comprend α_0 sommets et α_1 arêtes, le nombre des arêtes qu'il faut supprimer est égal à μ :

$$\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$$

L'arbre lui-même comprend $\alpha_0 - 1$ arêtes.

On transforme par analogie un polyèdre en un arbre superficiel. Le nombre des faces du polyèdre étant α_2, ces faces sont maintenues en connexion par la présence de $\alpha_2 - 1$ arêtes de liaison. Il suffit de supprimer les autres, ou, ce qui revient au même, de les considérer comme faisant partie d'une coupure, pour que le polyèdre devienne un arbre superficiel.

Mais en vertu du théorème d'Euler, on a :

$$\mu = \alpha_2 - 1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$$

On a donc la possibilité de faire apparaître sur une sphère, simultanément les deux arbres: linéaire et superficiel. C'est là une propriété bien connue, que nous énoncerons comme suit :

Sur une sphère, la frontière de tout arbre superficiel com-

posé de l'ensemble des faces du polyèdre, est un arbre linéaire.

Réciproquement, sur une sphère, tout arbre linéaire de $\alpha_0 - 1$ *arêtes est la frontière d'un arbre superficiel composé de la totalité des faces du polyèdre.*

Cette réciproque est une conséquence du principe fondamental de l'arbre linéaire: celui-ci rencontre tous les sommets du réseau sans cependant constituer de contour fermé. Si donc l'on assimile un tel arbre à une coupure, cette coupure ne morcelle pas la surface qui demeure ainsi d'un seul tenant. Les α_2 faces du polyèdre ne peuvent être maintenues en connexion que suivant $\alpha_2 - 1$ arêtes de liaison. Elles forment ainsi un arbre superficiel.

Cette propriété est spécifique de la sphère. Nous aurons l'occasion de le rappeler plus loin, lorsque nous dirons quelques mots des réseaux tracés sur d'autres surfaces.

Il est clair que l'on pourrait envisager, sur le réseau considéré, des arbres linéaires qui renferment moins de $\alpha_0 - 1$ arêtes. Ces arbres n'offrent pas d'intérêt pour le but que nous poursuivons, aussi les négligerons-nous complètement.

Nous nous occuperons donc essentiellement des arbres linéaires qui comprennent $\alpha_0 - 1$ arêtes, n'oubliant pas que si ces arbres sont assimilés à des coupures, ils ne morcellent pas la surface de la sphère et constituent la frontière d'un arbre superficiel qui comprend la totalité des faces du polyèdre considéré.

Le nombre de ces arbres n'est en général pas connu. Nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire de le rechercher. On constate qu'il grandit très rapidement avec μ. Ce que nous désirons, par contre, c'est de fixer une manière de les classer.

A ce propos, nous remarquons que, *par rapport à un tel arbre,* un sommet quelconque du réseau est: soit de degré 1, sommet libre; soit de degré 2, sommet servant de liaison à deux arêtes; soit de degré 3, sommet que nous avons désigné plus haut sous le nom de *bifurcation.* Et si nous comparons différents arbres linéaires d'un même réseau, nous constatons bien vite qu'ils diffèrent entre eux par le nombre de leurs bifurcations, nombre qui varie entre des limites que nous allons déterminer. Le nombre des bifurcations que renferme un arbre linéaire sera donc le moyen de classement que nous nous proposons d'adopter.

Dans les diverses opérations que comporte ce classement, nous aurons souvent l'occasion de parler des μ arêtes qui servent de liaison aux faces de l'arbre superficiel. Parfois, c'est telle ou telle arête qui interviendra, parfois ce sera leur ensemble. Aussi, pour ne pas alourdir notre exposé, nous préférons leur donner une désignation en convenant de les dénommer *arêtes conjointes*. Leur ensemble sera le *système des arêtes conjointes*, ou plus brièvement le *système conjoint*. Ainsi, à chaque arbre de $\alpha_0 - 1$ arêtes, correspond un système conjoint qui comprend $\alpha_2 - 1$ arêtes.

Un examen même sommaire d'un arbre linéaire suffit pour constater qu'aucune arête conjointe n'aboutit à une bifurcation, car, dans ce cas, les trois arêtes du réseau font partie de l'arbre linéaire. Par suite, le nombre des bifurcations de cet arbre est en relation étroite avec la disposition des arêtes conjointes. Il est d'autant plus grand que ces arêtes aboutissent à un plus petit nombre de sommets. Il sera maximum quand elles aboutiront au nombre minimum de sommets qu'elles peuvent atteindre.

Disons d'emblée que la présence d'une bifurcation dans le système conjoint est manifestement impossible, car elle entraînerait l'existence d'un nœud superficiel parmi les faces qui composent l'arbre superficiel, ce qui ne se peut pas. Il n'y a donc pas d'arbre linéaire dans le système conjoint. Par contre, on peut y rencontrer un ou plusieurs contours ouverts ou fermés. Les contours ouverts peuvent d'ailleurs fort bien être constitués par une seule arête. Les arêtes du système conjoint aboutiront à un nombre minimum de sommets dans le cas, et dans ce cas seulement, où elles forment un ou plusieurs contours fermés. Elles ne rencontrent alors que μ sommets. Les $\alpha_0 - \mu$ sommets qui restent sont autant de bifurcations de l'arbre linéaire correspondant. Or ce nombre vaut:

$$\alpha_0 - \mu = 2\mu - 2 - \mu = \mu - 2$$

Tel est le nombre maximum de bifurcations d'un arbre linéaire. Nous conclurons par la proposition :

Le nombre maximum de bifurcations que peut renfermer un arbre linéaire reliant entre eux les α_0 sommets d'un réseau cubique est $\mu - 2$.

Passant à l'autre extrémité, nous démontrerons la proposition suivante :

Le nombre minimum de bifurcations d'un de ces arbres est zéro.

En effet, si ces μ arêtes étaient complètement séparées les unes des autres, elles constitueraient un réseau linéaire, partant affecteraient $2\ \mu$ sommets. Or le nombre de ces desniers α_0 est égal à $2\ \mu - 2$. Dans ces conditions, le système conjoint ne peut être représenté par un réseau linéaire. Deux au moins de ses sommets servent de liaison à des arêtes conjointes. Et si précisément il y en a deux, l'arbre linéaire envisagé n'a que deux sommets libres; il ne présente aucune bifurcation, c'est un contour ouvert.

En principe, il est donc possible de concevoir $\mu - 1$ *types d'arbres linéaires qui se différencient les uns des autres par le nombre de leurs bifurcations, ce nombre variant entre* $\mu - 2$ *et zéro.*

Il est clair que jusqu'ici nous n'avons rien prouvé relativement à l'existence effective des arbres de ces diverses catégories. Ce que nous savons, c'est qu'il existe des arbres linéaires de $\alpha_0 - 1$ arêtes qui relient entre eux les α_0 sommets du réseau considéré. Et nous venons de voir la possibilité que nous avons d'une répartition de ces arbres en nous basant sur le nombre de leurs bifurcations.

Nous nous proposons de montrer que si l'on part de l'un quelconque d'entre eux, il est possible d'en obtenir d'autres qui présentent un nombre moindre de bifurcations. C'est là ce que nous entendrons par: la *réduction des bifurcations* d'un arbre donné.

Ajoutons en passant qu'un arbre linéaire du dernier type a deux sommets libres et aucune bifurcation; un arbre du type précédent a trois sommets libres et une bifurcation, et ainsi de suite, d'où la proposition :

Un arbre linéaire qui renferme k *bifurcations a aussi* $k + 2$ *sommets libres.*

RÉDUCTION DES BIFURCATIONS

§ 10. Examen d'un cas concret.

Les propriétés des réseaux cubiques sur lesquelles nous désirons baser notre démonstration sont en général peu connues. Il nous paraît donc indiqué d'en poser les bases sur un exemple concret. Mais, nous avons hâte de le dire, cet exemple n'a pas été choisi d'une façon spéciale de manière à rendre aisée la méthode que nous avons en vue. Tout au contraire, c'est en étudiant l'exemple de M. de la Vallée-Poussin, tel qu'il est représenté planche VII, que nous en avons découvert la forme. Sous un nombre restreint d'éléments, il renferme, ainsi que nous le verrons dans la suite, les mêmes difficultés qu'un autre réseau cubique du cas difficile dont le nombre des éléments serait plus grand.

Ce réseau, fig. 1, pl. X, a les caractéristiques suivantes:

$$\alpha_0 = 18 \text{ sommets}, \quad \alpha_1 = 27 \text{ arêtes}, \quad \alpha_2 = 11 \text{ faces}, \quad \mu = 10 .$$

Il renferme des arbres linéaires, tels que ceux que nous avons examinés plus haut, qui peuvent être répartis en 9 classes. Nous indiquons, fig. 2 à 10, planche X, un exemple d'arbre de chaque classe. Les arêtes faisant partie des arbres respectifs ont été marquées d'un trait renforcé.

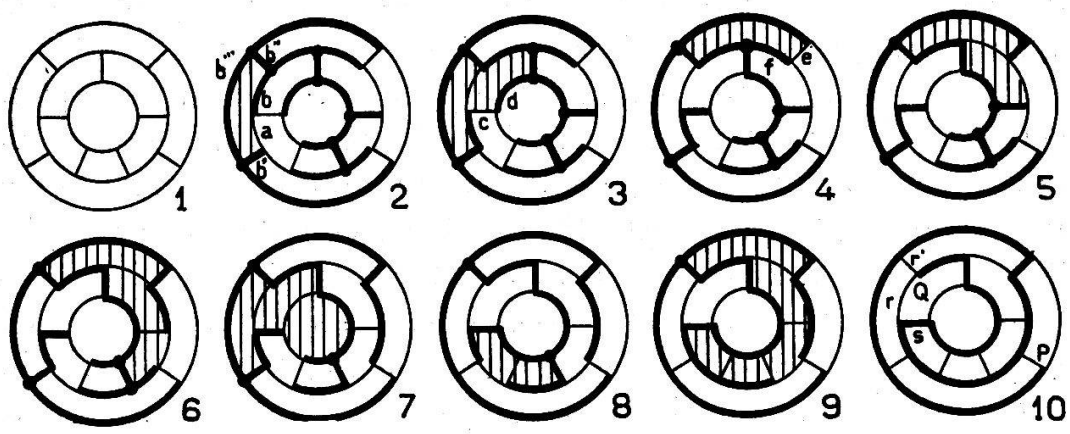


PLANCHE X. — Les différentes classes d'arbres linéaires que renferme un réseau cubique donné.

L'arbre linéaire, fig. 2, planche X, comporte 8 bifurcations. On constate que le système conjoint se compose de deux contours fermés. On transforme cet arbre en un contour bouclé en lui adjoignant n'importe quelle arête con-

jointe, par exemple l'arête a . En effet, la configuration linéaire qui en résulte comprend un contour fermé, précisément celui qui délimite l'aire couverte de hâchures. Si l'on supprime l'une quelconque des arêtes qui appartiennent à ce contour fermé, un arbre linéaire réapparaît. Or remarquons que l'on peut supprimer, si l'on veut, l'une des arêtes *b* ou *b'* l'arbre qui apparaît dans ces conditions ne compte plus que 7 bifurcations. Mais si l'on convient de supprimer soit l'arête *b''*, soit l'arête *b'''*, c'est un arbre de 6 bifurcations qui surgit.

A l'arbre linéaire de la fig. 3, convenons d'associer l'arête *c*, puis de supprimer l'arête *d*, on obtient l'arbre de la figure 4. Associons à ce dernier l'arête *e* et supprimons l'arête *f*, on aboutit à l'arbre de la fig. 4, et ainsi de suite.

Dans chaque exemple, nous avons couvert de hâchures l'aire qui apparaît chaque fois que l'on associe une arête conjointe à l'arbre linéaire existant.

C'est à ce passage d'un arbre comportant *k* bifurcations à un arbre qui n'en compte plus que $k - 1$ ou $k - 2$ que nous avons donné le nom de *réduction des bifurcations de l'arbre considéré*. Cette réduction des bifurcations a pour nous une grande importance.

Il convient de remarquer que dans le choix des réductions que nous avons opérées planche X, nous n'avons été guidé par aucune considération d'ordre théorique. Dans chaque figure, plusieurs voies s'offraient à nous; c'est au hasard que nous avons fixé l'une d'elles.

Arrêtons-nous un instant sur l'arbre de la fig. 10, planche X, que nous reproduisons fig. 1, planche XI. Il ne comporte aucune bifurcation, c'est donc un contour ouvert. Soient P et Q ses deux sommets libres. A chacun d'eux aboutissent deux arêtes conjointes. Convenons d'appeler *r* et *r'* celles qui aboutissent au sommet Q. Associons au contour ouvert PQ l'arête *r*, nous créons à la fois un contour bouclé et une bifurcation. Pour supprimer cette dernière, sans revenir en arrière, nous ne pouvons que faire disparaître l'arête *s*. Cela nous amène à un nouveau contour ouvert, contour qui est limité par les sommets P et Q_1 (fig. 2).

On passe dans les mêmes conditions du contour PQ_1 au contour PQ_2, en associant l'arête *t* et en supprimant l'arête *u* (fig. 3), puis au contour PQ_3 (fig. 4). On s'aperçoit maintenant que les deux sommets P et Q_3 limitent la même arête

du réseau. En les réunissant, on forme un contour fermé qui passe par tous ses sommets, autrement dit un réseau quadratique du premier type.

Revenons au point de départ, fig. 1, planche XI, et associons (fig. 5) l'arête r', nous nous voyons dans l'obligation de supprimer l'arête s'. Nous aboutissons alors au contour PQ′ qui met en évidence un autre réseau quadratique du premier type.

Enfin, on peut agir à l'égard du sommet P comme on vient de le faire pour le sommet Q. Pour ne pas allonger, nous nous bornerons à constater que l'on aboutit aux deux contours ouverts QP_i et QP_k qui sont représentés fig. 7 et 8, planche XI. Nous constatons que, dans le cas particulier, les réseaux quadratiques qui en résultent sont ceux que nous avons déjà obtenus.

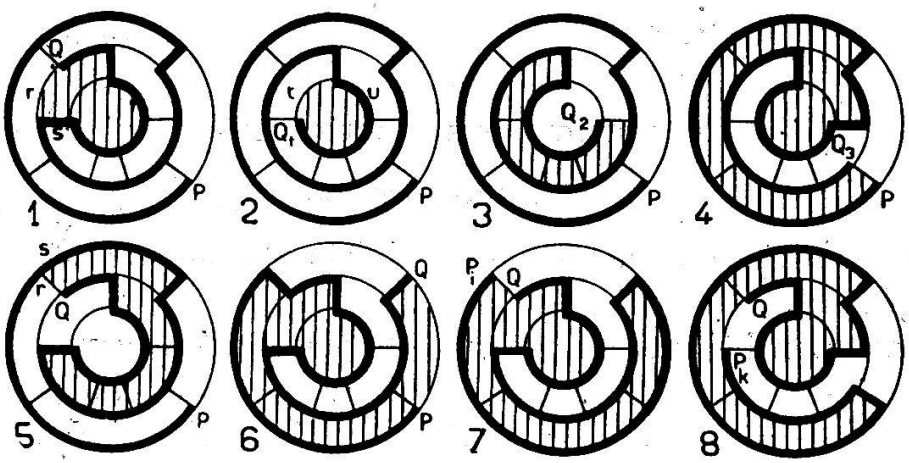


PLANCHE XI. — Passage d'un contour Z à un contour V.

L'importance des contours ouverts tels que ceux qui sont représentés par les fig. 4, 6, 7 et 8, planche XI, est capitale pour le but que nous poursuivons. Il suffit en effet que l'un seul d'entre eux existe, sur le réseau cubique donné, pour que l'on puisse conclure à l'existence d'un réseau quadratique du premier type. Il est donc nécessaire de les distinguer nettement de tous les autres contours ouverts, c'est pourquoi nous adopterons les définitions suivantes :

Un contour ouvert qui passe par l'ensemble des sommets du réseau cubique considéré, dont les sommets libres limitent la même arête, est un contour V.

Tout autre contour ouvert, passant par l'ensemble des sommets du réseau, est un contour Z.

C'est ainsi que les fig. 1, 2, 3, 5, planche X, représentent des contours Z, tandis que les fig. 4, 6, 7, 8, représentent des contours V.

Nous conviendrons enfin de désigner sous le nom d'*opération double* le passage du contour PQ au contour PQ_1 ou de ce dernier à PQ_2, ou, d'une manière générale, du contour PQ_i au contour PQ_{i+1}.

Une opération double comporte, comme son nom l'indique, deux opérations: 1) l'association d'une arête conjointe, ce qui a pour effet de faire apparaître une bifurcation, 2) la suppression d'une arête de façon à faire disparaître la bifurcation. Comme dans ce dernier cas, il s'agit de ne pas revenir en arrière, il n'y a jamais d'ambiguïté dans le choix de l'arête que l'on supprime, laquelle appartient toujours au contour fermé qui résulte de la première opération. De plus, les deux arêtes, celle que l'on associe et celle que l'on supprime, sont contiguës.

RÉDUCTION DES BIFURCATIONS

§ 11. Cas général.

Il nous paraît maintenant possible de nous attaquer au cas général.

Nous considérons un réseau cubique, tracé sur une sphère, qui satisfait aux conditions exposées au § 8. Nous faisons apparaître sur ce réseau un arbre linéaire qui relie entre eux la totalité des sommets. Cet arbre appartient à l'une des classes dont nous avons constaté l'existence au § 9. Admettons qu'il renferme k bifurcations. Deux questions se posent d'emblée, que nous allons examiner successivement.

Première question. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir l'arbre ainsi obtenu, pour que l'on puisse réduire le nombre de ses bifurcations?

La réponse à cette question est immédiate: *Il faut et il suffit que deux sommets libres de l'arbre limitent la même arête du réseau.*

En effet, par l'adjonction de cette arête, on transforme l'arbre en un contour bouclé, lequel renferme, nous le savons, un contour fermé. Ce dernier est réuni aux autres arêtes du contour bouclé en des points qui sont des bifurcations. Si alors on supprime une arête qui rencontre l'une de ces

bifurcations, tout en faisant partie du contour fermé, la configuration linéaire qui en résulte est encore connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant; c'est un arbre linéaire qui ne comprend plus que $k - 1$ bifurcations. Comme il peut se faire que l'arête supprimée aboutisse à deux bifurcations, il arrive que le nombre de celles-ci soit d'un seul coup diminué de deux unités.

Nous admettrons maintenant que toutes les réductions possibles ont été effectuées, cela d'ailleurs sans qu'il fût nécessaire de choisir d'avance un plan de travail. Nous entendons par là que, au gré de notre fantaisie, nous avons opéré une première réduction, puis une seconde, etc., sans la moindre préoccupation du meilleur choix possible. Il est clair que, ce que nous entendons par meilleur choix, c'est celui qui conduirait à un contour Z, ou, mieux encore, à un contour V. Nous sommes donc en présence d'un arbre linéaire qui présente h bifurcations, tel que deux de ses sommets libres ne limitent jamais la même arête. Dans ces conditions, nous posons une:

Deuxième question. Est-il possible de transformer cet arbre de façon à le rendre réductible ?

Le moyen approprié, pour répondre à cette question, est à la fois simple et varié. Il est simple, car ayant choisi un des sommets libres de l'arbre considéré, nous effectuerons une série d'opérations doubles. Il est varié, car si la première série de ces opérations est irréductible, nous avons le loisir de procéder à une seconde série, à une troisième, ... , en partant d'un sommet libre de n'importe quelle figure qui est issue des transformations antérieures. Cela donne une grande variété de moyens.

Le but que l'on se propose d'atteindre, en utilisant toutes ces opérations doubles, est de remplacer l'arbre donné par un autre, dont deux sommets libres limitent la même arête du réseau. Alors, en vertu de la réponse à la première question, la réduction est immédiate.

Il convient ici de faire une constatation. Le problème de réductibilité d'un arbre linéaire est le même que celui qui consiste à passer d'un contour Z à un contour V. Or un arbre a d'autant plus de sommets libres, que le nombre de ses bifurcations est plus élevé. S'il se réduit à un contour ouvert, il n'a plus que deux sommets libres. Les possibilités

que l'on a de faire en sorte que ces sommets limitent la même arête du réseau, sont certainement moindres que celles dont on dispose dans le cas d'un arbre quelconque, puisque le nombre des sommets de l'ensemble du réseau n'a pas varié, tandis que celui des sommets libres de l'arbre est plus grand. Telles sont les raisons pour lesquelles nous examinerons avec de plus amples détails les séries de transformations qui doivent conduire d'un contour Z à un contour V. Et si nous parvenons à en justifier la possibilité, nous aurons du même coup justifié la possibilité de la réduction des bifurcations de tout arbre linéaire du réseau.

Nous désignons encore, comme précédemment, par P et Q les sommets libres d'un contour Z et commençons par effectuer une première série de transformations qui laissent P invariable. Des sommets Q_1, Q_2, Q_3, ... , apparaissent ainsi. Deux cas sont à considérer :

1) Un des sommets Q_k se trouve à l'extrémité de l'une des arêtes qui aboutissent au sommet P. Le contour Z est devenu un contour V; la série de transformations est dite réductible.

2) Un des sommets Q_k occupe la position initiale Q, le contour Z ayant une forme identique à celle du début. La série de transformations est irréductible; les différents sommets Q_i constituent un cycle.

Cette dernière éventualité étant admise, le sommet Q demeure fixe. Une nouvelle série de transformations conduit aux sommets P_1, P_2, ... Cette série est réductible ou non. Imaginons qu'elle soit irréductible. Partant du contour PQ_1 et laissant Q_1 invariable, on passe de P à P'_1, P'_2, P'_3, ... Et si ces sommets constituent encore un cycle, on partira du contour PQ_2, laissant Q_2 fixe, on passera de P à P''_1, P''_2, ... L'inexistence d'un contour V, soit d'un réseau quadratique du premier type, est liée à la persistance de séries irréductibles.

Rappelons à ce propos que nous entendons par *série réductible* une série de transformations qui conduisent d'un contour Z à un contour V, et *série irréductible,* une série dans laquelle les sommets P_i, respectivement Q_i, constituent un cycle, le contour Z reprenant sa forme originale.

De ce qui précède, il résulte que dans un réseau cubique qui satisfait aux conditions du § 8:

1) *l'existence d'une seule série réductible permet de réduire d'une unité, éventuellement de deux, le nombre des bifurcations d'un arbre linéaire donné.*

2) *l'existence d'une seule série réductible permet de passer d'un contour Z à un contour V.*

3) *l'existence d'un contour V assure celle d'un réseau quadratique du premier type.*

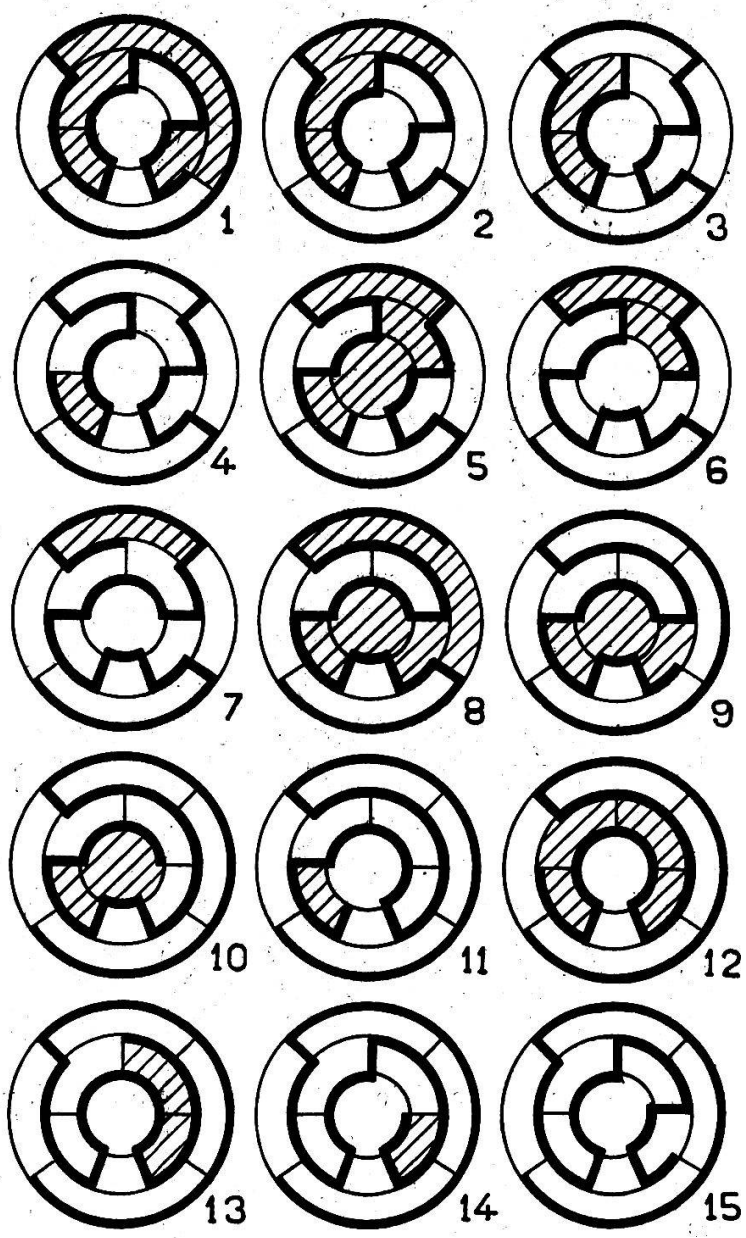


PLANCHE XII. — Une série de transformations irréductible.

Il s'agit maintenant d'examiner les conditions d'existence d'une série irréductible.

Mais auparavant, nous pensons qu'il n'est pas inutile, ceci pour fixer les idées, d'en donner deux exemples. Nous re-

prenons, à cet effet, le type de carte de la planche X, à propos de laquelle sont reproduites les transformations des planches XII et XIII.

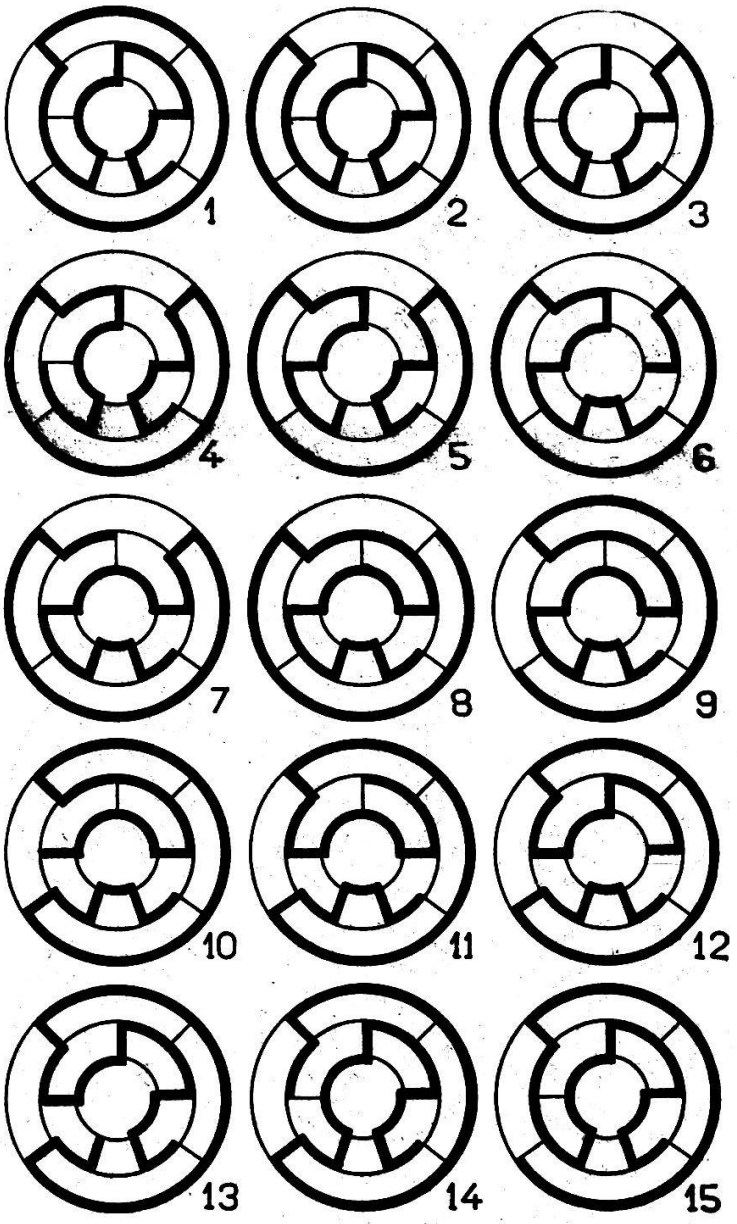


PLANCHE XIII. — Une autre série de transformations irréductible.

Il faut remarquer d'emblée que, lorsque l'on s'est engagé dans la voie des transformations d'un contour Z, on n'en peut suivre qu'une seule. Celle-ci, sans doute, n'est pas connue d'avance; elle n'en existe pas moins d'une façon unique car, à moins de détruire l'arête que l'on vient d'associer (ce qui n'aurait aucun sens), il ne se présente jamais d'indécision sur le choix des arêtes que l'on associe ou supprime. Cette constatation a son importance.

De plus, chaque opération double fait apparaître un contour fermé qui limite une aire simplement connexe. Cette aire se compose toujours d'un arbre superficiel, lequel peut se réduire à une chaîne ouverte ou même à une face unique. Elle se modifie, s'agrandit ou se rétrécit, lorsque l'on passe d'un contour Z au suivant. Le plus souvent, ces modifications ne paraissent pas obéir à une loi. Pourtant, dans le cas d'une série irréductible, l'existence de cette loi est indispensable. Imaginons un instant qu'elle n'existe pas. Du sommet P qui est fixe partent deux arêtes conjointes qui aboutissent à deux sommets du réseau L et M. Du sommet Q l'on passe successivement aux différents sommets Q_i ($i = 1, 2, 3. \ldots$) et comme dans la succession de ces points aucun cycle ne se révèle, il n'y a pas de raison pour que l'un d'eux ne puisse pas coïncider soit avec le sommet M, soit avec L, mais alors la série est réductible.

La loi qui préside à l'existence d'une série irréductible apparaît de prime abord sous la forme d'un cycle de points. Dans la suite des sommets Q_i ($i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$), Q_n coïncide avec Q_0 lequel n'est autre que Q. Mais ce cycle exige plus qu'une simple coïncidence des sommets Q_n et Q.

Pour qu'il existe réellement, il faut encore que toutes les arêtes du contour ouvert aient repris leur position initiale.

Les différentes arêtes du réseau cubique considéré qui permettent de souder entre eux les sommets Q_i d'un certain cycle, constituent une configuration linéaire à laquelle nous convenons de donner le nom de *tracé T*. Or le tracé T ne doit pas être regardé comme une simple juxtaposition d'arêtes. C'est plutôt une ligne continue qui se referme et qui est orientée dans le sens qui va de Q_i à Q_{i+1}. Et si cette ligne passe plusieurs fois par la même arête, celle-ci est comptée autant de fois qu'elle a été parcourue.

Sur la ligne qui caractérise un tracé T, les différents sommets Q_i occupent une position caractéristique. Rappelons à ce propos que l'on passe de Q_i à Q_{i+1} par le moyen d'une opération double dans laquelle interviennent deux arêtes contiguës, l'une étant l'arête que l'on associe et l'autre celle que l'on supprime. Le sommet qui les réunit toutes deux n'est pas et ne peut pas être un sommet Q_i, d'où la conséquence :

Entre deux sommets consécutifs Q_i *d'un tracé* T, *il existe*

toujours un sommet du réseau qui n'est pas pris en considération.

En outre, si la série est irréductible, le contour Z doit se transformer en lui-même. Il est par suite nécessaire que toute arête qui a été préalablement associée, devienne à son tour une arête que l'on supprime, et inversement. Cela revient à dire que dans le tracé T, chaque arête doit être parcourue au moins une fois dans chaque sens.

Enfin, comme nous l'avons déjà vu, dans chaque opération double, on crée un contour fermé (pour le détruire sitôt après) qui délimite une aire simplement connexe. Le déplacement que l'on effectue sur le tracé T permet d'orienter chacune de ces aires. En général, lorsque l'on passe de l'une d'elles à la suivante, l'orientation change de sens. Cette propriété se manifeste chaque fois que les deux aires consécutives ont en commun la face sur laquelle s'appuie le tracé T. Mais il arrive aussi que les faces composant les aires qui correspondent à deux transformations consécutives ne soient pas communes. Ce fait produit une rupture dans la cadence des orientations, rupture qui devra réapparaître, mais en sens inverse, au moment précis où, en suivant le tracé T, on repassera à cet endroit.

Dans ces conditions, le tracé T ne doit pas être regardé simplement comme un fil continu et isolé, mais bien au contraire, comme un fil soudé aux différentes aires qui apparaissent dans chaque opération double. Ces aires, comme d'ailleurs la sphère elle-même, sont simplement connexes. Si elles font partie d'une série irréductible, elles se succèdent de telle façon que leurs orientations respectives se détruisent les unes les autres. On ne s'expliquerait pas, en effet, que des aires également orientées s'empilent les unes sur les autres, constituant ainsi des nappes distinctes sur une surface de connexion aussi simple que la sphère.

Il est évident que l'on pourrait envisager un tracé T dans ses rapports avec une série réductible. Dans ce cas, aucun caractère distinctif ne sera à signaler. Toutes les fantaisies sont admissibles, du moment que l'on sera arrêté dans ces opérations par la présence d'un contour V.

Si nous résumons ce que nous savons d'un tracé T, nous sommes en droit de dire :

Le tracé T *d'une série, réductible ou non, est représenté*

par un fil continu qui est parcouru constamment dans le même sens. Ce fil se compose d'un certain nombre d'arêtes du réseau donné. Sur ce fil, entre deux sommets consécutifs Q_i et Q_{i+1}, *se trouve toujours intercalé un troisième sommet du réseau qui n'appartient pas à la série des points* Q_i.

Si la série est irréductible, le fil est un contour fermé. Chaque arête du réseau qui appartient au tracé T *est parcourue deux fois, une fois dans un sens, une fois en sens opposé.*

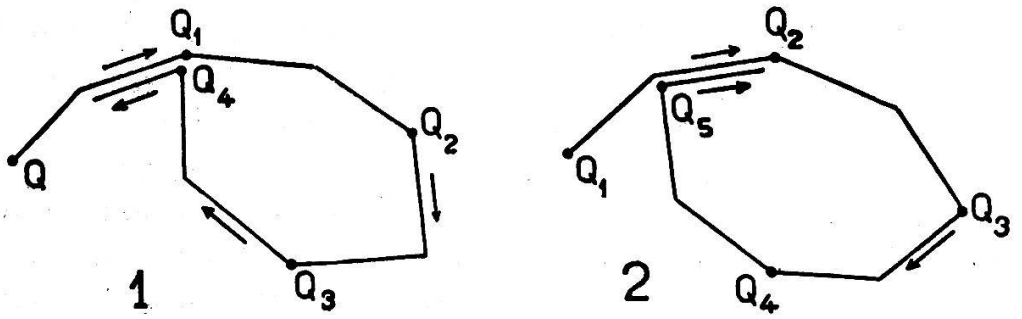


PLANCHE XIV. — Jonction d'un tracé T.

Il reste enfin à examiner les conditions dans lesquelles le fil qui constitue un tracé T revient sur des arêtes déjà parcourues. Cette jonction peut se faire de deux façons différentes, suivant qu'elle s'opère sur un sommet Q_i ou sur un sommet intermédiaire. Mais avant de faire cette distinction, il convient de remarquer qu'en chaque sommet du tracé T il y a :

1. une arête qui appartient au contour Z,
2. une arête que l'on a supprimée (du contour bouclé précédent),
3. une arête que l'on a associée (pour former le contour bouclé suivant).

Les arêtes indiquées sous 2 et 3 font déjà partie du tracé T. Si donc il y a une jonction en ce sommet, celle-ci ne peut avoir lieu que par l'arête 1. Et comme cette arête appartient au contour Z, c'est par une suppression et non pas par une association que la jonction peut s'effectuer.

a) La jonction a lieu en un sommet Q_i.

Le fil qui constitue le tracé T se présente dans la disposition du schéma fig. 1, planche XIV. Faisant retour au sommet Q_i par une arête que l'on supprime, il doit en repartir à l'aide d'une arête que l'on associe. Mais lors du premier

passage on a associé l'arête qui contribue à former le contour que l'on est en train de fermer. La seule arête qui demeure disponible est précisément celle qui n'appartient pas à ce contour fermé. On s'en éloigne donc en sens contraire de celui qui a été suivi lors du premier passage, détruisant ainsi l'effet antérieurement produit. On conçoit fort bien que si cela se produit une seconde fois dans les mêmes conditions, on réussira à se retrouver dans la position initiale du contour Z, préalablement envisagé.

b) La jonction a lieu en un sommet intermédiaire.

La disposition du tracé T est représentée fig. 2, planche XIV. Dans ce cas l'arête qui a été supprimée lors du premier passage, appartient au contour qui se ferme. En l'associant maintenant, on s'engage sur un chemin déjà parcouru avec la même orientation. Ce caractère ne saurait convenir à une série irréductible puisqu'il n'a pas pour effet de détruire ce qui a été créé lors du premier passage. Il nous permettra précisément de déceler la présence d'une série réductible.

Dans ces conditions, la question capitale qui nous préoccupe peut se condenser dans la proposition suivante:

Sur un réseau cubique tracé sur une sphère, satisfaisant aux conditions du § 8, il est impossible qu'il n'y ait que des séries de transformations irréductibles.

Pour la démontrer, nous partons d'un contour Z dont les extrémités sont les sommets P et Q. Nous admettons que les deux séries de transformations que l'on obtient en laissant P puis Q fixes, soient irréductibles. Afin de distinguer les différents tracés T dont il va être question, nous conviendrons d'affecter de l'indice p le tracé T qui résulte de la fixité du sommet P, et de l'indice q celui qui correspond à la fixité du sommet Q. Ainsi le tracé T_p est jalonné par les sommets Q, Q_1, Q_2, ..., Q_i, ..., qui sont les extrémités de contours Z. Chacun de ces sommets peut à son tour être regardé comme fixe. C'est alors le sommet P qui se déplace en suivant des tracés T, T_1, T_2, ..., T_i, ..., sur lesquels on rencontrera les sommets suivants :

sur T_q : P, P_1, P_2, ...
sur T_{q_1} : P, P'_1, P'_2, ...
sur T_{q_2} : P, P''_1, P''_2, ..., etc.

Les tracés T_{q_i} partent tous du sommet P. Ils empruntent tous une partie du tracé T_q, puisqu'à partir de P on a chaque fois associé la même arête. Mais comme le sommet fixe Q_i diffère d'une série à l'autre, ils doivent suivre des voies différentes. Mais si toutes les séries sont irréductibles, ces voies finissent par se souder au premier tracé T_q, tout au moins dans le voisinage du sommet P.

A l'égard des sommets où s'opère l'écartement des tracés T_{q_i} on ne peut formuler aucune règle. Cela provient du fait que, selon notre hypothèse, deux faces contiguës n'ont en commun qu'une seule arête et qu'en outre ces faces sont des polygones d'au moins quatre côtés. Il s'en suit que le champ d'action des tracés T_{q_i} n'est limité en aucune façon sur l'ensemble du réseau. Cette constatation est très importante ainsi que nous le verrons au paragraphe suivant, car il peut arriver que, dans des réseaux cubiques qui n'appartiennent pas au cas difficile, ces tracés ne puissent emprunter qu'un ensemble bien déterminé d'arêtes du réseau considéré.

Il est d'autre part un fait connu que les réseaux qui ont une forme régulière, tels que ceux que nous représentons: planche XV, possèdent un grand nombre de réseaux quadratiques du premier type. Ce n'est donc pas sur ces réseaux que l'on recherchera uniquement des séries irréductibles.

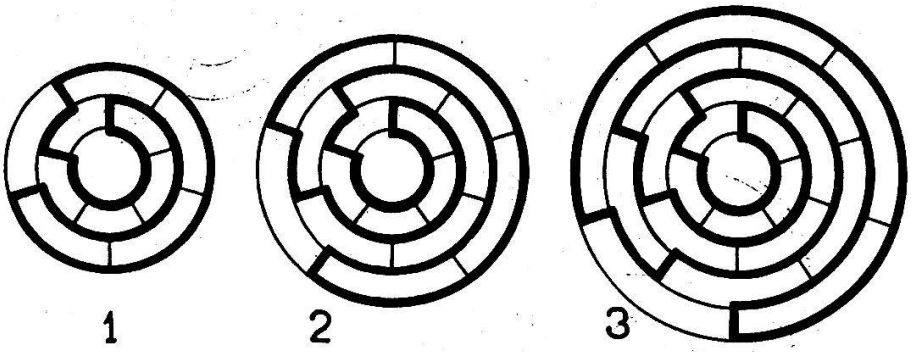


PLANCHE XV. — Réseaux de forme régulière.

Rappelons enfin que ce qui caractérise plus spécialement une série irréductible, c'est la forme particulière de son tracé T_q. Les sommets libres des différents contours Z se succèdent sur un tel tracé avec une cadence régulière, de deux en deux sommets. De plus chaque arête est parcourue une fois dans un sens et une fois en sens contraire.

Si donc toutes les séries envisagées étaient irréductibles, il serait nécessaire que tous les tracés T_{q_i} finissent par se rejoindre, la jonction s'opérant en l'un des sommets P_i du premier. Mais on doit prendre garde que la forme de chaque tracé dépend de déplacements qui s'effectuent autour de faces

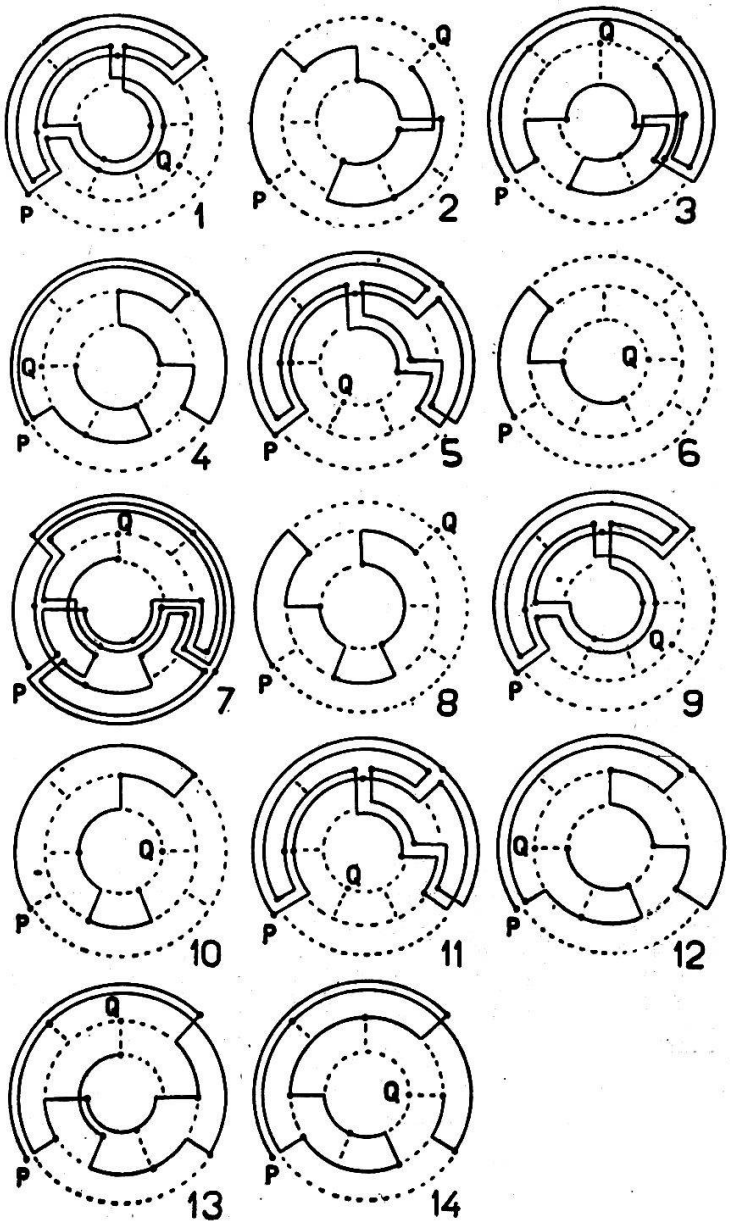


PLANCHE XVI. — Les tracés T.

qui ont tantôt un nombre pair, tantôt un nombre impair d'arêtes et cela avec une variété de moyens qui n'a d'égale que celle que l'on a mise à compliquer la forme du réseau donné. On comprendrait, à la rigueur, que cette cadence ne soit pas troublée dans le cas d'un réseau qui présente toutes les garanties de symétrie voulues. Mais nous venons de voir

que précisément dans ce cas il n'y a pas lieu de rechercher des séries irréductibles, puisque l'on est certain d'avance de rencontrer un réseau quadratique du premier type. Cette cadence ne se justifie pas, et à fortiori ne se réalise pas.

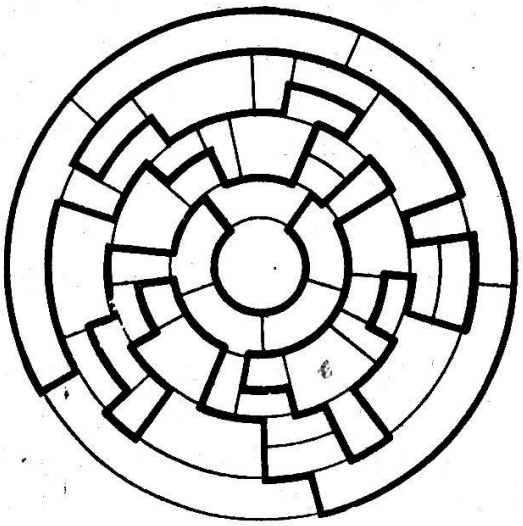


Fig. 14. — Carte de 52 pays.

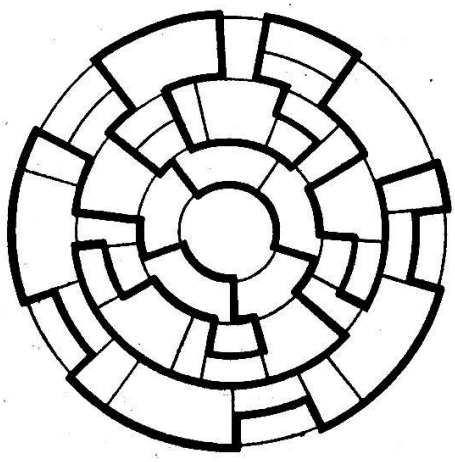


Fig. 15. — Carte de 47 pays.

Exemples de M. Errera.

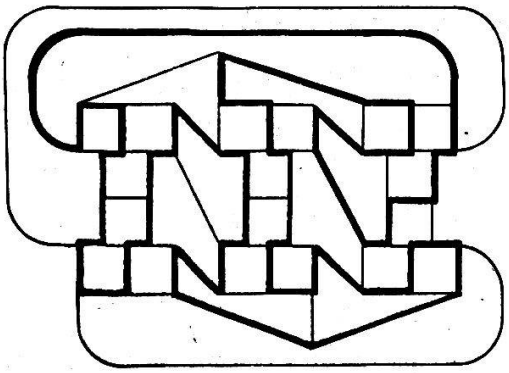


Fig. 16. — Carte de 30 pays.

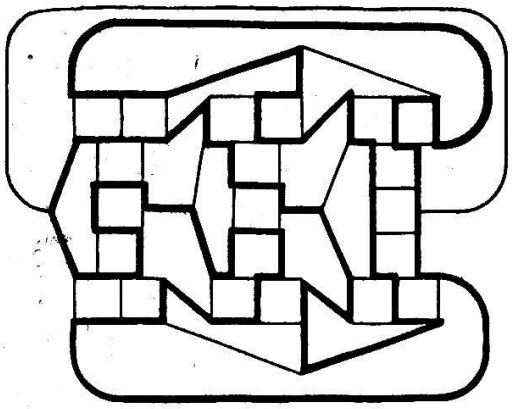


Fig. 17. — Carte de 36 pays.

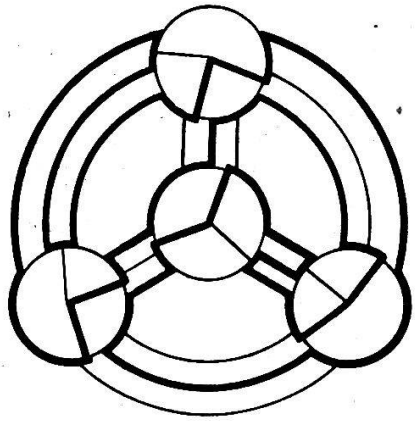


Fig. 18. — Carte de 28 pays

Exemples de M. Reynolds.

Nous indiquons, à titre d'exemple, planche XVI, les différents tracés T_{q_i} qui résultent de l'application de la méthode que l'on vient de développer à la planche XII.

Conclusion. Il est reconnu, d'une façon indiscutable, que si l'on sait colorier une carte dont la frontière est un réseau cubique qui satisfait aux conditions restrictives du § 8, on est capable du même coup de colorier une carte dont les frontières sont quelconques. Or, dans les pages qui précèdent, nous avons montré pourquoi, sur les réseaux cubiques considérés, on doit nécessairement rencontrer une série réductible, partant mettre en évidence un contour V et par suite un réseau quadratique du premier type.

A titre de renseignement, nous faisons suivre ces pages de la reproduction des exemples cités par MM. Errera et Sainte-Lagüe dans les ouvrages que nous avons rappelés plus haut, exemples qui constituent chaque fois une irréductibilité en regard des méthodes adoptées par leurs auteurs respectifs. Sur chacun d'eux, un réseau quadratique du premier type est représenté par un trait renforcé.

§ 12. A propos d'un cas d'exception.

Nous considérons ici des réseaux cubiques dans lesquels certaines faces contiguës ont en commun deux arêtes et nous allons examiner relativement aux transformations d'un contour Z, la région qui est comprise entre ces deux faces.

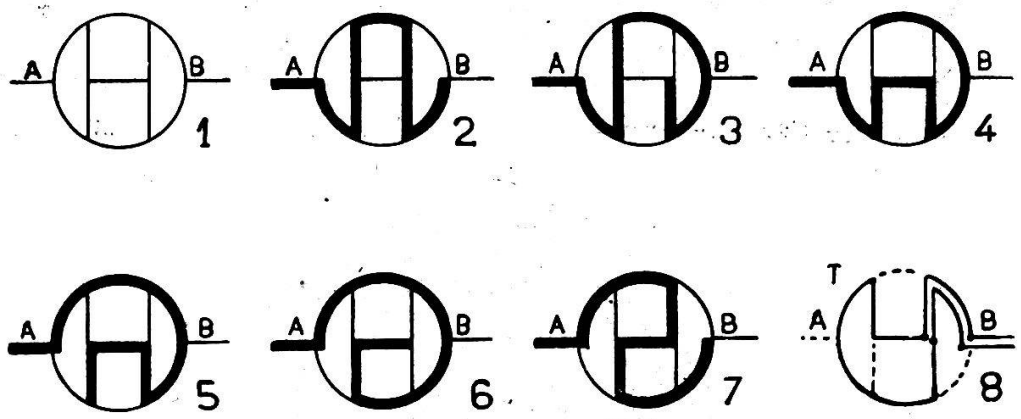


PLANCHE XVII.

Il n'est pas inutile que nous fixions les idées sur un exemple concret. C'est ainsi que nous envisageons le réseau partiel, fig.1, planche XVII. Il est entendu que les arêtes qui aboutissent aux sommets A et B complètent un réseau

cubique que nous n'avons pas jugé à propos de dessiner. Le fait que les faces de cette région sont des quadrilatères n'offre rien de particulier.

Nous admettons qu'un contour Z, après avoir passé par le sommet A, se termine au sommet B. Nous constatons qu'après avoir effectué quelques opérations doubles, nous revenons au sommet B, sans nous être arrêté sur le sommet A. Ce dernier sommet n'est pas un des sommets que l'on prend spécialement en considération sur le tracé T. Ainsi le tracé T pénètre dans la région considérée par le sommet B et il en repart au même sommet.

On comprend aisément que le tracé T ne puisse faire étape sur le sommet A, car ce dernier sommet n'est abordé qu'à l'aide d'une arête que l'on associe et par suite l'arête que l'on supprime nous transporte en un autre sommet.

Il s'en suit que le tracé T ne peut attaquer cette région qu'en y entrant au sommet B. C'est là une obligation très importante que nous ne rencontrons jamais dans le cas général. Car alors chaque contour fermé est relié avec les autres parties du réseau par trois arêtes, ou plus, de sorte qu'il peut toujours être attaqué par deux sommets au moins.

C'est ce qui explique le fait que, si un réseau cubique contient suffisamment de régions de cette espèce, il soit fort possible qu'il ne renferme aucun contour V, et par suite aucun réseau quadratique du premier type.

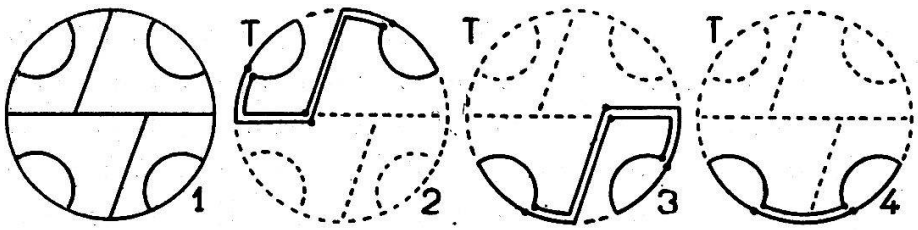


PLANCHE XVIII.

Il est à peine besoin de remarquer que la forme du réseau à l'intérieur du contour fermé qui passe par les sommets A et B, ne joue aucun rôle. Le cas le plus simple est celui dans lequel ce contour fermé ne limite qu'une seule face. Nous en donnons un exemple fig. 1, planche XVIII. Les autres figures de cette planche indiquent divers tracés T de ce réseau qui ne renferme pas de réseau quadratique du premier type.

Remarque. — Cet exemple nous a été communiqué par M. Errera à la suite d'une communication que nous avons faite à la Société Mathématique Suisse. Il n'appartient pas au cas difficile et ne saurait aucunement infirmer notre théorie, car il est exclu par la restriction 4). Le coloriage, à l'aide de quatre couleurs, est d'ailleurs aisé.

Il suffit de transformer légèrement cet exemple, en lui adjoignant une arête de plus, pour faire immédiatement apparaître un réseau quadratique du premier type, ainsi que le prouve la fig. 19.

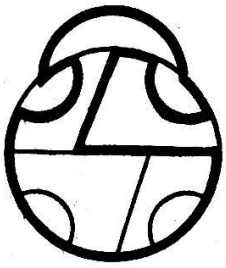


Fig. 19.

§ 13 A propos d'un autre moyen d'étudier les réseaux cubiques.

Lorsque nous avons entrepris cette étude, l'existence d'un réseau quadratique du premier type a immédiatement fait l'objet de nos plus vives préoccupations. De suite, elle s'est affirmée avec une singulière netteté. Nous pensions alors l'établir en nous basant sur les propriétés des équations de M. Veblen, ou plutôt sur celles du système fondamental de solutions. Cet essai n'a pas été concluant. Il n'est cependant pas inutile d'indiquer la voie dans laquelle nous nous étions engagé.

Les quantités α_0, α_1, α_2 et par suite μ étant fixées, il existe différents polyèdres qui ne se distinguent les uns des autres que par la forme de leurs faces. Les matrices B de ces polyèdres ne sont pas sans marquer une certaine parenté puisqu'elles se composent toutes de α_1 lignes et de α_2 colonnes. Rappelons que dans une ligne d'une telle matrice, deux éléments sont égaux à 1, tous les autres étant nuls. Dans ces conditions, il devient intéressant d'envisager une matrice qui comprend suffisamment de lignes pour que toutes les dispositions possibles de ces éléments soient prises en considération. On forme ainsi une matrice surcomplète dont le nombre des colonnes est toujours α_2, mais dont celui des lignes est devenu $\frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 - 1)$. Or il suffit de supprimer

dans des conditions convenables un nombre déterminé de lignes de cette matrice surcomplète, et au besoin d'en répéter quelques-unes, pour dégager la matrice B de l'un ou l'autre des polyèdres qui comprennent α_2 faces.

A ce propos, deux cas sont à considérer suivant qu'il est nécessaire ou non de répéter une ou plusieurs lignes. Admettons qu'il n'y ait pas de répétition. Les α_1 lignes de la matrice B sont toutes distinctes. Pour les obtenir, il est nécessaire de supprimer ν lignes de la matrice surcomplète, ν étant égal à :

$$\begin{aligned}\nu &= \tfrac{1}{2}\,\alpha_2\,(\alpha_2 - 1) - \alpha_1 \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\alpha_2 - 3)\,(\alpha_2 - 4)\end{aligned}$$

Dans le polyèdre ainsi caractérisé, deux faces ont au maximum une arête commune.

Lorsque dans une matrice B des lignes sont identiques, cela signifie que des faces du polyèdre correspondant ont en commun deux ou plusieurs arêtes. Or, dans ce domaine, tous les degrés d'arbitraire sont possibles. Il n'est par conséquent pas aisé d'établir une théorie qui s'adapte à l'ensemble des matrices qui rentrent dans cette catégorie. D'ailleurs ce cas n'est pas intéressant, pour le but que nous nous étions proposé, à savoir: le coloriage des faces d'un polyèdre. C'est la raison pour laquelle nous l'avons ostensiblement laissé de côté. Voilà comment nous avons été conduit à poser la restriction 4) aux conditions du § 8, disant que *dans un polyèdre considéré, deux faces contiguës n'ont qu'une seule arête commune.*

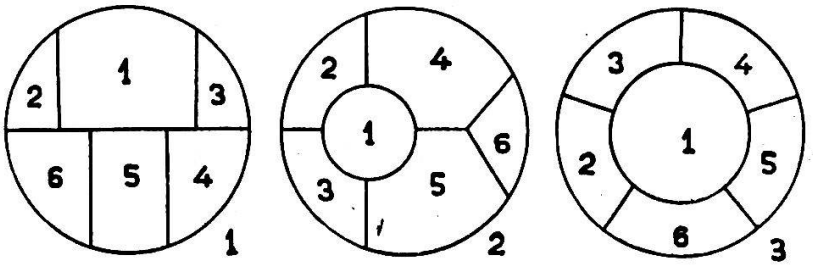


PLANCHE XIX.

A titre d'exemple, nous avons représenté des réseaux de 7 faces dans les planches I à VI. Ceux qui satisfont à la condition que nous venons de rappeler sont fixés par les planches II, IV et VI. Nous les répétons dans les figures 1, 2, 3, planche XIX, en numérotant leurs faces d'une façon arbitraire.

La matrice surcomplète de 7 faces a la teneur suivante :

1.2	1	1	0	0	0	0	0
1.3	1	0	1	0	0	0	0
1.4	1	0	0	1	0	0	0
1,5	1	0	0	0	1	0	0
1.6	1	0	0	0	0	1	0
1.7	1	0	0	0	0	0	1
2.3	0	1	1	0	0	0	0
2.4	0	1	0	1	0	0	0
2.5	0	1	0	0	1	0	0
2.6	0	1	0	0	0	1	0
2.7	0	1	0	0	0	0	1
3.4	0	0	1	1	0	0	0
3.5	0	0	1	0	1	0	0
3.6	0	0	1	0	0	1	0
3.7	0	0	1	0	0	0	1
4.5	0	0	0	1	1	0	0
4.6	0	0	0	1	0	1	0
4.7	0	0	0	1	0	0	1
5.6	0	0	0	0	1	1	0
5.7	0	0	0	0	1	0	1
6.7	0	0	0	0	0	1	1

Le nombre ν est ici égal à 6 .

On obtient la matrice B de la fig. 1, planche XIX, en supprimant les lignes

2.3 2.4 2.5 3.5 3.6 4.6

celle de la fig. 2 en supprimant les lignes

1.6 1.7 2.5 2.6 3.4 3.6

et finalement celle de la fig. 3, en supprimant les lignes

1.7 2.4 2.5 3.5 3.6 4.6

* * *

On se rappelle d'autre part, que l'on passe d'une matrice B à celle d'un système fondamental de solutions, par la suppression de l'une de ses colonnes. Si alors l'on associe entre elles les μ colonnes qui restent, de toutes les manières possibles, en réduisant les nombres obtenus suivant le mo-

dule 2, on forme l'ensemble de toutes les solutions que possède le système d'équations linéaires et homogènes (1).

Ce travail peut aussi s'effectuer sur les colonnes d'une matrice surcomplète, après omission de l'une d'elles. On constitue ainsi un grand tableau de $2^{\mu} - 1$ colonnes et de $\frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 - 1)$ lignes, duquel on déduira celui de l'ensemble des solutions d'un système (1), par la suppression des ν lignes dont il vient d'être question.

Il resterait à fixer les conditions auxquelles doit satisfaire le choix des ν lignes que l'on supprime. Nous ne voulons cependant pas nous y attarder, quoique les considérations qui découlent de cette étude ne soient pas dépourvues d'intérêt. Seulement, nous n'avons pas réussi à trouver le moyen de distinguer les réseaux quadratiques du premier type des autres réseaux quadratiques. Telle est la raison pour laquelle nous avons cherché une autre voie, celle des arbres linéaires et superficiels.

§ 14. **Réseaux cubiques tracés sur un tore.**

Cette question ne nous retiendra pas longuement, car le problème du coloriage des pays d'une carte dessinée sur un tore est connu. On sait qu'il faut 7 couleurs. Mais ce qu'il nous importe de faire voir, c'est qu'il serait impossible d'appliquer au tore les méthodes que nous venons de développer à l'égard de la sphère.

Le théorème d'Euler, généralisé pour le tore, donne en effet la relation suivante :

$$\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1$$

Il s'en suit que la frontière de tout arbre superficiel qui comprend les α_2 faces, est une configuration linéaire de $\alpha_0 + 1$ sommets. Or celle-ci n'est pas un arbre linéaire. Elle renferme au contraire deux contours fermés linéairement indépendants. La recherche d'un contour fermé unique qui passerait par l'ensemble des sommets est ici chose illusoire.

* * *

Ce résultat négatif s'affirme avec plus de netteté encore, si au lieu du tore on envisage des surfaces d'un ordre de connexion plus élevé. Soit P cet ordre de connexion. La frontière de tout arbre superficiel composé de la totalité des faces

renferme $P - 1$ contours fermés linéairement indépendants, ainsi que le montre la relation

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 3 - P$$

ou

$$\alpha_1 - (\alpha_2 - 1) = \alpha_0 + P - 2 = \alpha_0 - 1 + (P - 1).$$

TABLE DES MATIERES

Pages.

Introduction 41
§ 1. Les réseaux 44
§ 2. La matrice A 47
§ 3. Les propriétés de la matrice A 48
§ 4. Equations et solutions 52
§ 5. Configurations superficielles 56
§ 6. La matrice B 61
§ 7. *Réseaux cubiques tracés sur une sphère* 66
§ 8. Le problème de la carte 73
§ 9. Arbres linéaires et superficiels 75
§ 10. Réduction des bifurcations. Cas concret 79
§ 11. Réduction des bifurcations. Cas général 82
§ 12. A propos d'un cas d'exception 94
§ 13. A propos d'un autre moyen d'étudier les réseaux cubiques . . 96
§ 14. Réseaux cubiques tracés sur un tore 99