

**Zeitschrift:** Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 3 (1929-1930)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Sur les courbes binominales  
**Autor:** Piccard, Sophie  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-249678>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur les courbes binomiales

PAR

Sophie PICCARD

(Présenté à la séance du 20 février 1929.)

### INTRODUCTION

C'est en cherchant à résoudre certains problèmes posés par le calcul des probabilités et la statistique qu'on est conduit à envisager les courbes binomiales dont nous allons nous occuper dans ce travail. Les principaux résultats en ont été donnés dans une note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, T. 186, 1928, p. 1687.

Partons du problème classique des épreuves répétées traité par Jacques Bernoulli. Supposons qu'on fasse  $s$  épreuves comportant deux événements contradictoires A et B de probabilités constantes  $p$  et  $q$  et soit  $x$  le nombre possible de réalisations de l'événement A au cours de ces épreuves. Ce nombre peut prendre toutes les valeurs entières comprises au sens large entre 0 et  $s$  et les probabilités correspondantes  $P(x)$  sont respectivement égales aux termes du binôme  $(q + p)^s$ , puisque

$$P(x) = \frac{s!}{x!(s-x)!} p^x q^{s-x}$$

Il en résulte, rappelons-le, que  $P(x)$  satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(a) \quad q(x+1) P(x+1) = p(s-x) P(x)$$

La loi de répartition des probabilités  $P(x)$  peut être représentée soit par des masses égales à  $P(x)$  concentrées en  $s+1$  points  $x=0, 1, \dots, s$  de l'axe des  $x$ , soit par  $s+1$  points

d'abscisses  $x$  et d'ordonnées  $P(x)$ . La loi de répartition des probabilités est discontinue.

Mais on sait combien il peut être utile dans certaines recherches théoriques, aussi bien qu'en statistique, de passer du discontinu au continu, en remplaçant la succession discrète de points représentant une loi de probabilité par une courbe continue passant par ces points, ce qui conduit à un problème d'interpolation.

Dans le cas qui nous occupe, une solution élégante de ce problème s'obtient à partir de la fonction caractéristique au sens de M. P. Lévy

$$\theta(w) = (q + pe^{iw})^s$$

en posant <sup>1</sup>

$$(1) \quad y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(w) e^{-ixw} dw$$

La fonction  $y$  ainsi définie est développable en séries de M. Charlier, utilisées fréquemment, comme on sait, en statistique mathématique. Malheureusement, on ne connaît pas l'approximation qu'on obtient en arrêtant ces séries à l'un de leurs premiers termes.

Une solution plus immédiate, et à certains égards plus simple et plus commode, s'obtient en remplaçant dans l'expression de  $P(x)$  les factorielles  $x!$ ,  $(s-x)!$  par  $\Gamma(x+1)$  et  $\Gamma(s-x+1)$ . L'interpolation est alors réalisée par la fonction

$$(2) \quad y = \frac{s!}{\Gamma(x+1) \Gamma(s-x+1)} p^x q^{s-x},$$

déjà utilisée, parfois implicitement, dans certaines recherches de calcul des probabilités et de statistique.

Lorsque  $p = q = 1/2$ , la courbe (2) coïncide avec (1), elle s'en écarte pour  $p \neq q$ .

La fonction  $y$  ainsi définie se calcule à l'aide de la formule de Stirling et bien que les développements qu'on obtient au moyen de cette formule ne soient pas convergents, il est possible d'évaluer l'erreur commise avec une approximation en général suffisante dans la pratique.

<sup>1</sup> S. D. WICHSELL, *Contributions to the analytical theory of sampling*, Archiv for Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 17, N° 19 (1923), p. 1-46. Ce travail se rattache au mémoire de M. CHARLIER: *Die strenge Form des Bernoullischen Theorems*, ibid., Bd. 5, N° 13 (1909), p.p. 1-22.

D'autre part, et cette propriété en facilite singulièrement l'étude et l'apparente davantage à  $P(x)$ , la fonction  $y$  satisfait aussi à l'équation fonctionnelle  $(\alpha)$ .

C'est à l'étude des courbes (2) que sera consacré notre travail.

Ces courbes, que nous appelons courbes binomiales, jouent, nous l'avons dit, un rôle considérable en statistique et à ce point de vue leur étude a été poussée assez loin<sup>1</sup>.

Dans ce travail, nous nous plaçons à un point de vue différent. Ce qui nous intéresse surtout, ce sont les propriétés asymptotiques de la fonction  $y$  et de certaines fonctions de  $s$  définies à partir de  $y$ .

Nous commençons, dans les deux premiers chapitres, par faire l'étude des variations de la fonction  $y$ , et, après avoir généralisé une formule de M. R. Frisch retrouvée par M. de Montessus de Ballore, nous envisageons l'intégrale

$$\int_{-1}^{s+1} y \, dx$$

qui joue un rôle essentiel dans cette recherche. Nous montrons que la différence

$$\int_{-1}^{s+1} y \, dx - 1$$

tend plus rapidement vers 0 que n'importe quelle puissance de  $\frac{1}{s}$ .

Cette propriété importante de l'intégrale  $\int_{-1}^{s+1} y \, dx$ , ainsi

qu'une partie des résultats du chapitre I, ont déjà été établis par M. D. Mirimanoff dans une note récente<sup>2</sup>. Nous avons cru devoir reproduire ici son analyse, en la complétant sur quelques points qu'il n'avait fait qu'effleurer.

<sup>1</sup> Voir p. ex. R. DE MONTESSUS DE BALLORE, *La formule fondamentale de la statistique*, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1927, pp. 103-115.

<sup>2</sup> L'enseignement mathématique, t. XXVI, 1927, pp. 287-293.



Nous montrerons dans le chapitre III que la propriété des intégrales

$$\int_{-1}^{s+1} y dx$$

dont il vient d'être question s'étend aux intégrales

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} y dl$$

la variable  $l$  étant l'écart  $x - sp$  et la limite  $\lambda$  un nombre de la forme  $s^k$ , où  $k$  est un nombre positif compris au sens étroit entre  $1/2$  et 1.

On trouvera dans le chapitre suivant l'étude du développement de la fonction  $y$  suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{\sqrt{spq}}$  qu'on obtient à l'aide de la formule de Stirling. En désignant par  $t$  l'écart réduit  $\frac{l}{\sqrt{2spq}}$ , nous montrons que les coefficients de ce développement, abstraction faite du facteur  $e^{-t^2}$

sont des polynômes en  $t$  qu'on peut calculer de proche en proche. D'autre part, le reste vérifie une inégalité curieuse à l'aide de laquelle nous avons pu établir une propriété importante de ces polynômes qui nous a été signalée par M. D. Mirimanoff.

## CHAPITRE I.

### Etude des variations de la fonction $y(x)$ . Forme des courbes binomiales.

#### § 1. Généralités.

Ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction, nous entendons par courbes binomiales les courbes définies par une équation de la forme

$$(1) \quad y = \frac{s!}{\Gamma(x+1)\Gamma(s-x+1)} p^x q^{s-x}$$

où  $s$  est un nombre entier  $\geq 0$ ,  $p$  et  $q$  deux nombres posi-

tifs liés par la relation  $p + q = 1$ . Dans l'étude de la fonction  $y = y(x)$ , nous ne sortirons pas du domaine réel et, pour fixer les idées, nous supposons  $p \leq q$ .

Lorsque  $x$  est un nombre entier  $m$  compris au sens large entre 0 et  $s$ , la valeur correspondante  $y(m)$  de  $y(x)$  est égale à la probabilité pour qu'un événement  $A$  de probabilité constante  $p$  se réalise  $m$  fois au cours de  $s$  épreuves.

Aux valeurs  $m = 0, 1, \dots, s$  correspondent  $s + 1$  points  $M_0, M_1, \dots, M_s$  de la courbe binomiale. Rappelons que

$$\sum_{m=0}^s y(m) = 1.$$

Transformons l'équation (1) en faisant usage des propriétés classiques de la fonction  $\Gamma(x)$ .

$$a) \quad \Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1)$$

$$\text{et } b) \quad \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Par application successive de la première de ces propriétés, on obtient:

$$\Gamma(s-x+1) = (s-x)(s-1-x) \dots (-x) \Gamma(-x)$$

Par application de la seconde propriété, on trouve

$$\Gamma(x+1) \Gamma(-x) = -\frac{\pi}{\sin \pi x}$$

L'équation (1) devient, en tenant compte de ces relations

$$(2) \quad y = \frac{s! \sin \pi x}{(s-x)(s-1-x) \dots (1-x) x \pi} p^x q^{s-x}$$

Déterminons les zéros de la fonction  $y(x)$ . Le produit  $s! p^x q^{s-x}$  étant  $\neq 0$  quel que soit  $x$ , les zéros de  $y$  sont ceux de  $\sin \pi x$ , sauf  $x = 0, 1, \dots, s$ . Par conséquent,  $y$  s'annule pour  $x = -1, -2, \dots, -m, \dots$  et pour  $x = s+1, s+2, \dots, s+1+m, \dots$   $m$  étant un nombre entier positif quelconque.

Ces zéros déterminent sur l'axe des  $x$  une infinité d'intervalles: l'intervalle  $i_0 = (-1, s+1)$ , que nous appellerons l'intervalle central, la suite d'intervalles  $i_k = (s+k, s+k+1)$  et la suite  $i_{-k} = (-k-1, -k)$ , où  $k$  est un nombre entier quelconque  $\geq 1$ .

Un point d'un intervalle  $i_k$  a pour abcisse  $s+k+\varepsilon$ , où

$\varepsilon$  est un nombre compris entre 0 et 1. A une valeur donnée de  $\varepsilon$  correspond une série de points que nous appellerons points homologues de ces intervalles.

Un point d'un intervalle  $i_{-k}$  a pour abscisse  $-1 - k + \varepsilon$ . Les points homologues de ces intervalles seront encore ceux qui correspondent à une même valeur de  $\varepsilon$ .

Montrons que la fonction  $y(x)$  est positive dans l'intervalle  $i_0$  et qu'elle est alternativement négative et positive dans les intervalles  $i_{\pm(2k-1)}$ ,  $i_{\pm 2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ )

En effet, soit d'abord  $x$  un nombre quelconque intérieur à l'intervalle  $i_0$ . On sait que  $\Gamma(x) > 0$  pour  $x > 0$ . Donc  $\Gamma(x+1)$  ainsi que  $\Gamma(s-x+1)$  sont positifs dans  $i_0$  et il en est de même de  $y$  en vertu de l'équation (1).

Considérons maintenant la valeur de  $x$  correspondant à un point quelconque de l'intervalle  $i_{2k-1}$ . En posant

$$x = s + 2k - 1 + \varepsilon,$$

il vient

$$\begin{aligned} y(x) &= y(s + 2k - 1 + \varepsilon) \\ &= \frac{(-1)^{s+2k-1} s! \sin \pi \varepsilon p^{s+2k-1+\varepsilon} q^{-2k+1-\varepsilon}}{(-1)^s (2k-1+\varepsilon) (2k+\varepsilon) \dots (s+2k-1+\varepsilon) \pi} \\ &= (-1)^{2k-1} \frac{s! \sin \pi \varepsilon p^{s+2k-1+\varepsilon} q^{-2k+1-\varepsilon}}{(2k-1+\varepsilon) \dots (s+2k-1+\varepsilon) \pi} < 0 \end{aligned}$$

On voit de même que l'ordonnée d'un point quelconque de l'intervalle  $i_{-(2k-1)}$  est  $< 0$ .

Passons maintenant à l'intervalle  $i_{2k}$ . En posant

$$x = s + 2k + \varepsilon,$$

on trouve

$$y = \frac{(-1)^{2k} s! \sin \pi \varepsilon p^{s+2k+\varepsilon} q^{-2k-\varepsilon}}{(2k+\varepsilon) (2k+1+\varepsilon) \dots (s+2k+\varepsilon) \pi} > 0.$$

On démontre de même que  $y > 0$  en un point quelconque de l'intervalle  $i_{-2k}$ .

Du reste, ces inégalités résultent immédiatement des propriétés classiques de la fonction  $\Gamma(x)$ .

Par conséquent, la courbe (1) est une courbe sinueuse se composant d'une infinité d'arcs  $\sigma_0$  (partie centrale),  $\sigma_k$ ,  $\sigma_{-k}$  correspondant aux intervalles  $i_0$ ,  $i_k$ ,  $i_{-k}$ .

Etudions les variations de ces arcs lorsque  $k$  augmente indéfiniment. Nous distinguerons deux cas

Cas 1.  $p < q$

Dans ce cas, les arcs  $\sigma_k$  s'aplatissent de plus en plus. Supposons, en effet, que  $x$  parcourt une suite  $s + k + \varepsilon$  de points homologues et montrons que la suite correspondante des  $|y|$  est décroissante et qu'elle tend vers 0. Partons de l'égalité

$$|y(s + k + \varepsilon)| = \frac{s! \sin \pi \varepsilon p^{s+k+\varepsilon} q^{-k-\varepsilon}}{(k + \varepsilon)(k + 1 + \varepsilon) \dots (s + k + \varepsilon) \pi}$$

Lorsque  $k \rightarrow \infty$ ,  $\sin \pi \varepsilon$  ne varie pas,  $p^{s+k+\varepsilon} q^{-k-\varepsilon}$  est une fonction décroissante de  $k$ , puisque  $p < q$ , et comme le dénominateur augmente indéfiniment avec  $k$ , le premier membre est une fonction décroissante de  $k$  tendant vers 0. La propriété est établie.

Les arcs  $\sigma_{-k}$ , au contraire, s'amplifient indéfiniment à partir d'un certain rang, lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Posons  $x = -k - 1 + \varepsilon$ . Il vient

$$|y(-k - 1 + \varepsilon)| = \frac{s! \sin \pi \varepsilon p^{-k-1+\varepsilon} q^{s+k+1-\varepsilon}}{(s + k + 1 - \varepsilon)(s + k - \varepsilon) \dots (k + 1 - \varepsilon) \pi}$$

d'où

$$|y(-k - 1 + \varepsilon)| > \frac{s! \sin \pi \varepsilon p^s}{(s + k + 1 - \varepsilon)^{s+1} \pi} \left(\frac{q}{p}\right)^{s+k+1-\varepsilon}$$

et comme une fraction de la forme  $\frac{a^x}{x^{s+1}}$ , où  $a > 1$ , augmente indéfiniment à partir d'un  $x$  suffisamment grand, lorsque  $x \rightarrow \infty$ , les arcs  $\sigma_{-k}$  s'amplifient indéfiniment.

Cas 2.  $p = q$

Dans ce cas, la courbe est symétrique par rapport à la droite  $x = \frac{s}{2}$ . En effet,  $h$  étant un nombre positif quelconque, on a (éq. 1)

$$y\left(\frac{s}{2} + h\right) = y\left(\frac{s}{2} - h\right) = \frac{s!}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + h + 1\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - h + 1\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

or la suite  $|y(x + k + \varepsilon)|$  est décroissante et tend vers 0. Donc les  $\sigma_k$  et les  $\sigma_{-k}$  s'aplatissent indéfiniment lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

§ 2. *Etude de la partie centrale.*

Nous avons vu que la fonction  $y(x)$  est positive dans l'intervalle central. Nous allons montrer maintenant qu'elle a dans cet intervalle un maximum et un seul; ce maximum est atteint pour une valeur de la variable comprise entre  $sp - q$  et  $sp + p$ .

**Théorème 1.** — Si la fonction  $X = \frac{y'}{y}$  est positive en un point  $x = x_0$  de l'intervalle central, la fonction  $y(x)$  est croissante dans l'intervalle  $(-1, x_0)$ . Si  $X(x_0) < 0$ ,  $y(x)$  est décroissante dans l'intervalle  $(x_0, s+1)$ .

**Démonstration.** — Prenons la dérivée logarithmique des deux membres de l'équation (1). On a en posant

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \Phi(x)$$

$$X = \Phi(s - x + 1) - \Phi(x + 1) - \log \frac{q}{p}$$

Considérons la dérivée  $\frac{\partial X}{\partial x}$

On a

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\Phi'(s - x + 1) - \Phi'(x + 1).$$

Or la fonction  $\Psi(u) = \Phi'(u)$  est positive pour  $u > 0$  et comme dans l'intervalle central les deux arguments  $(s - x + 1)$  et  $(x + 1)$  sont positifs, la dérivée  $\frac{\partial X}{\partial x}$  est négative et par conséquent  $X$  est une fonction décroissante de  $x$  dans cet intervalle. Si donc la fonction  $X$  est positive pour  $x = x_0$ , elle est positive pour  $x < x_0$  et par conséquent  $y$  est une fonction croissante de  $x$  dans l'intervalle  $(-1, x_0)$ . La première partie du théorème se trouve ainsi démontrée. On démontre de même la seconde partie.

**Théorème 2.** — La fonction  $y(x)$  est croissante dans l'intervalle  $(-1, sp - q)$ , elle est décroissante dans l'intervalle  $(sp + p, s + 1)$ .

**Démonstration.** — Il suffit de montrer que  $X > 0$  pour  $X = sp - q$  et que  $X < 0$  pour  $x = sp + p$ .

Rappelons la propriété suivante de la fonction  $\Phi(x)$ : lorsque  $m$  est un nombre entier,

$$\Phi(x+m) - \Phi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+m-1}$$

Or

$$X(sp-q) = \Phi(sq+q+1) - \Phi(sp+p) - \log \frac{q}{p}$$

Dans cette formule, la différence des arguments de  $\Phi$  est égale à

$$sq+q+1-sp-p = s(q-p) + 2q$$

Soit  $m$  le plus grand entier inférieur ou égal à cette différence.  $m$  vérifie l'inégalité

$$s(q-p) + 2q - 1 < m \leq s(q-p) + 2q$$

La fonction  $\Phi(u)$  étant une fonction croissante de  $u > 0$ , on a

$$\Phi(sq+q+1) - \Phi(sp+p) \geq \Phi(m+sp+p) - \Phi(sp+p)$$

Mais

$$\begin{aligned} & \Phi(m+sp+p) - \Phi(sp+p) \\ &= \frac{1}{sp+p} + \frac{1}{sp+p+1} + \dots + \frac{1}{sp+p+m-1} \end{aligned}$$

Or la somme

$$\frac{1}{sp+p} + \dots + \frac{1}{sp+p+m-1}$$

est supérieure à

$$\int_{sp+p}^{sp+p+m} \frac{dx}{x}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_{sp+p}^{sp+p+m} \frac{dx}{x} &= \log(sp+p+m) - \log(sp+p) \\ &> \log[sp+p+s(q-p)+2q-1] - \log(sp+p) \end{aligned}$$

ou encore

$$\int_{sp+p}^{sp+p+m} \frac{dx}{x} > \log \frac{sq+q}{sp+p} = \log \frac{q}{p}, \text{ car } \frac{sq+q}{sp+p} = \frac{q}{p}$$

Donc

$$\Phi(sq + q + 1) - \Phi(sp + p) > \log \frac{q}{p} \text{ et } X(sp - q) > 0,$$

c. q. f. d.

Passons maintenant à la démonstration de la seconde partie du théorème.

On a

$$X(sp + p) = \Phi(sq - p + 1) - \Phi(sp + p + 1) - \log \frac{q}{p}$$

La différence des arguments de  $\Phi$  est égale dans ce cas à  $s(q - p) - 2p$ . Soit  $m$  le plus petit entier supérieur ou égal à cette différence. Le nombre  $m$  vérifie l'inégalité

$$s(q - p) - 2p \leq m < s(q - p) - 2p + 1$$

On trouve par un raisonnement identique au précédent

$$\Phi(sq - p + 1) - \Phi(sp + p + 1) < \int_{sp+p}^{sp+p+m} \frac{dx}{x}$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{sp+p}^{sp+p+m} \frac{dx}{x} &= \log(sp + p + m) - \log(sp + p) \\ &< \log[sp + p + s(q - p) - 2p + 1] - \log(sp + p) \\ &= \log \frac{sq + q}{sp + p} = \log \frac{q}{p} \end{aligned}$$

On a donc bien  $X(sp + p) < 0$ , ce qu'il fallait démontrer.

*Corollaire.* — Comme  $X$  est une fonction toujours décroissante de  $x$  dans l'intervalle central et comme  $X(sp - q) > 0$  et  $X(sp + p) < 0$ , il en résulte que  $X$  s'annule en un point unique de l'intervalle central et par conséquent, en vertu de ce qui précède,  $y$  possède dans cet intervalle un maximum et un seul, ce maximum étant compris entre  $x = sp - q$  et  $x = sp + p$ .

*Remarque.* — Dans le cas de  $p = q = 1/2$ , la fonction  $y(x)$  passe par le maximum pour  $x = \frac{s}{2}$  en vertu de la symétrie.

§ 3. *Généralisation d'une formule de MM. Frisch  
et R. de Montessus de Ballore.*

Introduisons maintenant l'écart  $l = x - sp$ . L'équation (1) s'écrit

$$(3) \quad y_l = \frac{s!}{\Gamma(sp + l + 1) \Gamma(sq - l + 1)} p^{sp+l} q^{sq-l}$$

M. Ragnar Frisch<sup>1</sup>, en 1924 et 1925, et indépendamment de lui M. de Montessus de Ballore<sup>2</sup>, en 1927, ont donné des formules importantes permettant de calculer de proche en proche les valeurs moyennes des différentes puissances de l'écart  $l$  compris entre deux limites données. Nous allons généraliser celle de ces formules qui donne la valeur moyenne de la première puissance de l'écart<sup>3</sup>.

Remplaçons dans l'équation (3)  $l$  par  $l + 1$ . Il vient

$$(4) \quad y_{l+1} = \frac{s!}{\Gamma(sp + l + 2) \Gamma(sq - l)} p^{sp+l+1} q^{sq-l-1}$$

Mais, en vertu de la première propriété citée de la fonction  $\Gamma$ , on a

$$\Gamma(sp + l + 2) = (sp + l + 1) \Gamma(sp + l + 1)$$

et de même

$$\Gamma(sq - l + 1) = (sq - l) \Gamma(sq - l)$$

On a donc la relation suivante

$$y_{l+1} = \frac{sq - l}{sp + l + 1} \frac{p}{q} y_l$$

qu'on peut écrire

$$(5) \quad spq y_l - p l y_l - spq y_{l+1} - q(l + 1) y_{l+1} = 0$$

Multiplions les deux membres de (5) par  $dl$  et intégrons entre les limites  $l = l_1$  et  $l = l_2 - 1$ . Il vient

$$(6) \quad spq \int_{l_1}^{l_2-1} y_l dl - p \int_{l_1}^{l_2-1} l y_l dl - spq \int_{l_1}^{l_2-1} y_{l+1} dl - q \int_{l_1}^{l_2-1} (l + 1) y_{l+1} dl = 0$$

<sup>1</sup> Biometrika, 1925, p. 170.

<sup>2</sup> Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 2<sup>e</sup> partie, mémoires 1927, pp. 103-115.

<sup>3</sup> Cf. L'enseignement mathématique, loc. cit.



Désignons les quatre intégrales qui figurent au premier membre de cette équation respectivement par  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  et  $J_4$ . On a d'une part

$$J_1 = spq \int_{l_1}^{l_2} y_1 dl - spq \int_{l_2-1}^{l_2} y_1 dl$$

$$J_2 = -p \int_{l_1}^{l_2} ly_1 dl + p \int_{l_2-1}^{l_2} ly_1 dl$$

d'autre part

$$J_3 = -spq \int_{l_1+1}^{l_2} y_1 dl = -spq \int_{l_1}^{l_2} y_1 dl + spq \int_{l_1}^{l_1+1} y_1 dl$$

$$J_4 = -q \int_{l_1+1}^{l_2} ly_1 dl = -q \int_{l_1}^{l_2} ly_1 dl + q \int_{l_1}^{l_1+1} ly_1 dl$$

On en déduit, en remplaçant dans l'équation (6)  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  et  $J_4$  par les expressions obtenues

$$\begin{aligned} spq \left\{ \int_{l_1}^{l_1+1} y_1 dl - \int_{l_2-1}^{l_2} y_1 dl \right\} - p \int_{l_1}^{l_2} ly_1 dl + p \int_{l_2-1}^{l_2} ly_1 dl - q \int_{l_1}^{l_2} ly_1 dl \\ + q \int_{l_1}^{l_1+1} ly_1 dl = 0 \end{aligned}$$

Or  $p + q = 1$ ; on peut donc écrire

$$(7) \int_{l_1}^{l_2} ly_1 dl = spq \int_{l_1}^{l_1+1} y_1 dl + q \int_{l_1}^{l_1+1} ly_1 dl - spq \int_{l_2-1}^{l_2} y_1 dl + p \int_{l_2-1}^{l_2} ly_1 dl$$

C'est la formule de MM. Frisch et de Montessus de Ballore généralisée.

## CHAPITRE II.

Etude de l'intégrale  $\int_{-1}^{s+1} y dx$ .§ 1. *Introduction.*

Dans ce chapitre, nous ferons l'étude de l'intégrale

$$\int_{-1}^{s+1} y dx$$

Nous allons montrer que la différence

$$\int_{-1}^{s+1} y dx - 1$$

tend plus rapidement vers 0 qu'une puissance quelconque de  $\frac{1}{s}$ , lorsque  $s$  augmente indéfiniment; d'une façon plus précise, pour tout  $n$

$$(8) \quad \int_{-1}^{s+1} y dx - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

$o$  étant le symbole de M. Landau (voir le § suivant).

*Interprétation géométrique.* — L'intégrale  $\int_{-1}^{s+1} y dx$  est

l'aire  $A_0$  comprise entre la partie centrale de la courbe binomiale et l'axe des  $x$ . Inscrivons dans cette partie de la courbe la ligne polygonale partant du point  $(-1,0)$ , ayant pour sommets successifs les points  $M_0, M_1, \dots, M_s$  et aboutissant au point  $(s+1,0)$ . L'aire comprise entre cette ligne polygonale et l'axe des  $x$  est égale à l'unité. Le premier membre de (8) est donc la différence des deux aires.

Pour établir la formule (8), nous envisagerons d'abord le cas de  $p = q = 1/2$ . Nous passerons ensuite au cas de  $p < q$ .

§ 2. *Rappel de quelques propriétés du symbole de M. Landau.*

Rappelons que la formule

$$(9) \quad f(s) = o \left( \frac{1}{s^n} \right)$$

signifie

$$\lim_{(s \rightarrow \infty)} s^n \cdot f(s) = 0.$$

Dans ce travail, nous aurons à nous appuyer sur les propriétés suivantes du symbole de M. Landau, dont la démonstration est immédiate.

a) Si les fonctions  $f_1(s)$  et  $f_2(s)$  vérifient la relation (9), il en est de même de leur somme  $f_1(s) + f_2(s)$ ,

b) Si  $f(s)$  vérifie (9), il en est de même de  $s^r f(s)$ ,  $r$  étant un nombre réel quelconque.

c) Si  $|f_2(s)| < |f_1(s)|$  à partir d'une certaine valeur de  $s$  et si  $f_1(s)$  vérifie (9), il en est de même de  $f_2(s)$ .

d) Une fonction  $f(s)$  de la forme  $\frac{a^s}{s^n}$ , où  $a > 0$ ,  $a > 1$  vérifie toujours la relation (9).

Démonstration. — En effet

$$\log \frac{a^s}{s^n} = s \log a - n \log s - \log a \rightarrow +\infty,$$

lorsque  $s$  augmente indéfiniment.

§ 3. *Cas de  $p = q = 1/2$ .*

Démontrons d'abord le lemme suivant:

*Lemme.* — Si  $p = q = 1/2$ , l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y dx$$

est égale à l'unité.

*Démonstration.* — Lorsque  $p = q = 1/2$ , l'équation (2) s'écrit

$$y = \frac{s! \sin \pi x}{2^s (s-x)(s-1-x) \dots (1-x)x\pi}$$

Décomposons la fraction

$$\frac{1}{(s-x)(s-1-x)\dots(1-x)x}$$

en éléments simples; on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-x)(s-1-x)\dots(1-x)x} &= \frac{1}{s!} \frac{1}{x} + \frac{1}{(s-1)!} \frac{1}{1-x} + \dots \\ &+ \frac{(-1)^{i-1}}{(s-i)! i!} \frac{1}{i-x} + \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s!} \frac{1}{s-x} \end{aligned}$$

Il vient en conséquence

$$\begin{aligned} &2^s \int_{-\infty}^{+\infty} y dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx + \dots + \frac{(-1)^{i-1} s!}{(s-i)! i!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{i\pi - \pi x} dx + \dots + (-1)^{s-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{s\pi - \pi x} dx \end{aligned}$$

Evaluons les intégrales qui figurent dans le second membre de cette égalité. Elles se ramènent immédiatement à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

qui, comme on le sait, est égale à  $\pi$ .

En effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x} d\pi x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x'}{x'} dx' = 1,$$

de sorte qu'en posant, pour  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $i\pi - \pi x = -x'$ , on a d'une manière générale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{i\pi - \pi x} dx = \frac{(-1)^{i+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x'}{x'} dx' = (-1)^{i+1}$$

On a par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y dx = \frac{1}{2^s} \left\{ 1 + s + \dots + \frac{s!}{(s-i)! i!} + \dots + 1 \right\} = \frac{2^s}{2^s} = 1$$

c. q. f. d.

Reprenons maintenant l'intégrale

$$\int_{-1}^{s+1} y dx = A_0.$$

Montrons d'abord que  $A_0$  est supérieur à l'unité. En effet, en posant

$$A_1 = - \int_{s+1}^{s+2} y dx = - \int_{-2}^{-1} y dx ; A_2 = \int_{s+2}^{s+3} y dx = \int_{-3}^{-2} y dx ; \dots$$

$$A_i = (-1)^i \int_{s+i}^{s+i+1} y dx = (-1)^i \int_{-i-1}^{-i} y dx ; \dots$$

nous pouvons écrire

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y dx = A_0 - 2A_1 + 2A_2 - \dots = 1$$

Or  $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$ ,  
puisque les arcs  $\sigma_k$  s'aplatissent de plus en plus, lorsque  $k \rightarrow \infty$   
(cf. ch. I, § 1).

L'égalité (9) peut s'écrire

$$A_0 - 2[(A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \dots] = 1$$

Tous les termes entre crochets étant positifs, il en est de même de leur somme. On a donc bien  $A_0 > 1$ , c. q. f. d.

Montrons maintenant que

$$A_0 - 1 < \frac{\alpha}{a^s}$$

où  $\alpha > 0$  et  $a > 1$ .

Partons encore, à cet effet, de l'égalité (9).

Elle peut s'écrire

$$A_0 - 2A_1 + 2(A_2 - A_3) + \dots = 1$$

Tous les termes entre parenthèses étant positifs, on a

$$A_0 - 2A_1 < 1$$

ou encore

$$A_0 - 1 < 2A_1$$

Or

$$2A_1 = -2 \int_{s+1}^{s+2} y dx = -\frac{2 \cdot s!}{2^s \pi} \int_{s+1}^{s+2} \frac{\sin \pi x}{(s-x)(s-1-x)\dots(1-x)x} dx$$

Posons  $f(x) = \sin \pi x$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{(s-x)(s-1-x)\dots(1-x)x} \\ &= (-1)^s \frac{1}{(x-s)\dots(x-1)x} = (-1)^s |\varphi(x)| \end{aligned}$$

Désignons  $(-1)^{s+1} f(x)$  par  $f_1(x)$  et  $|\varphi(x)|$  par  $\varphi_1(x)$

Ces deux fonctions  $f_1(x)$  et  $\varphi_1(x)$  sont positives,  $x$  variant de  $s+1$  à  $s+2$ .

On obtient ainsi pour  $2A_1$  l'expression

$$2A_1 = \frac{2 \cdot s!}{2^s \pi} \int_{s+1}^{s+2} f_1(x) \varphi_1(x) dx$$

Désignons par  $M$  le maximum de la fonction  $\varphi_1(x)$  dans l'intervalle  $(s+1, s+2)$ . On voit tout de suite que

$$M = \varphi_1(s+1) = \frac{1}{(s+1)!}$$

En effet,  $\varphi_1(x)$  est une fonction décroissante de  $x$  dans l'intervalle  $(s+1, s+2)$ , car il en est de même de chaque facteur

$$\frac{1}{x-i} \quad (i=0, 1, 2 \dots s)$$

On a donc l'inégalité

$$2A_1 < \frac{2 \cdot s! (-1)^{s+1}}{2^s \pi (s+1)!} \int_{s+1}^{s+2} \sin \pi x dx$$

ou encore

$$2A_1 < \frac{4}{\pi^2 (s+1) 2^s}$$

car

$$(-1)^{s+1} \int_{s+1}^{s+2} \sin \pi x \, dx = (-1)^{s+1} [-\cos \pi x]_{s+1}^{s+2} = 2$$

et comme

$$A_0 - 1 < 2A_1$$

il vient

$$A_0 - 1 < \frac{4}{\pi^2 (s+1) 2^s}$$

Or

$$\frac{4}{\pi^2 (s+1)} < 0,41$$

En posant donc  $\alpha = 0,41$  et  $a = 2$  on a bien

$$A_0 - 1 < \frac{\alpha}{a^s}, \text{ c. q. f. d.}$$

Mais en vertu de la propriété d)

$$\frac{\alpha}{a^s} = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Il en résulte que

$$A_0 - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

en vertu de c) et le théorème est démontré.

#### § 4. Cas de $p < q$ .

Par définition,

$$A_0 = \int_{-1}^{s+1} y \, dx$$

C'est une fonction de  $p$  que nous désignerons par  $A_0(p)$ .

On a vu (§ 3) que

$$A_0\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Il suffit donc de montrer que

$$A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right) = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Appliquons à cette différence le théorème des accroissements finis

$$A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right) = \left(p - \frac{1}{2}\right) \frac{dA_0\left[\frac{1}{2} + \theta\left(p - \frac{1}{2}\right)\right]}{dp}; \quad 0 < \theta < 1.$$

où

$$p - \frac{1}{2} < 0; \quad 0 < \frac{1}{2} + \theta\left(p - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

Posons

$$\frac{1}{2} + \theta\left(p - \frac{1}{2}\right) = p_1; \quad 1 - p_1 = q_1;$$

$y$  ayant pour expression

$$y = \frac{s!}{\Gamma(x+1)\Gamma(s-x+1)} p^x q^{s-x},$$

la dérivée de  $A_0(p)$  par rapport à  $p$  sera

$$\begin{aligned} \frac{dA_0(p)}{dp} &= \int_{-1}^{s+1} \frac{s! x p^{x-1} q^{s-x}}{\Gamma(x+1)\Gamma(s-x+1)} dx \\ &\quad - \int_{-1}^{s+1} \frac{s! (s-x) p^x q^{s-x-1}}{\Gamma(x+1)\Gamma(s-x+1)} dx \end{aligned}$$

Posons  $x = sp + l$ .

$$\begin{aligned} dx &= dl & \text{si } x = -1, \quad l = -1 - sp \\ & & \text{si } x = s+1, \quad l = sq + 1. \end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{dA_0(p)}{dp} = \int_{-1-sp}^{sq+1} \frac{sp+l}{p} y_l dl - \int_{-1-sp}^{sq+1} \frac{sq-l}{q} y_l dl = \frac{1}{pq} \int_{-1-sp}^{sq+1} l y_l dl$$

Appliquons à cette dernière intégrale la formule de Frisch-de Montessus de Ballore généralisée

$$\begin{aligned} \frac{dA_0(p)}{dp} &= s \int_{-1-sp}^{-sp} y_l dl + \frac{1}{p} \int_{-1-sp}^{-sp} l y_l dl - s \int_{sq}^{sq+1} y_l dl + \frac{1}{q} \int_{sq}^{sq+1} l y_l dl \\ &= \int_{-1-sp}^{-sp} \frac{sp+l}{p} y_l dl - \int_{sq}^{sq+1} \frac{sq-l}{q} y_l dl = J_1 + J_2 \end{aligned}$$



$l$  variant de  $-1-sp$  à  $-sp$ ,  $\frac{sp+l}{p}$  varie de  $-\frac{1}{p}$  à  $0$ ,  $y_l$  croît de  $0$  à  $q^s$ . Donc  $J_1 < 0$ .

$l$  variant de  $sq$  à  $sq+1$ ,  $\frac{sq-l}{q}$  décroît de  $0$  à  $-\frac{1}{q}$ ,  $y_l$  décroît de  $p^s$  à  $0$ . Donc  $J_2 > 0$ .

Montrons que  $|J_1| > J_2$ .

A cet effet, posons  $l = -sp - \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ), dans  $J_1$ .

La fonction sous le signe d'intégration s'écrit alors

$$u' = \frac{s! p^{-\varepsilon} q^{s+\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon) \Gamma(s+1+\varepsilon)} \cdot \left(-\frac{\varepsilon}{p}\right)$$

Dans  $J_2$  posons  $l = sq + \varepsilon$ .

La fonction sous le signe d'intégration s'écrit

$$u'' = \frac{s! p^{s+\varepsilon} q^{-\varepsilon}}{\Gamma(s+1+\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon)} \cdot \frac{\varepsilon}{q}$$

Considérons le rapport des modules de  $u'$  et  $u''$

$$\frac{|u'|}{|u''|} = \frac{q^{s+1+2\varepsilon}}{p^{s+1+2\varepsilon}}$$

Comme ce rapport est supérieur à  $1$  pour tout  $\varepsilon$ , on a bien

$$|J_1| > J_2$$

Donc

$$\frac{dA_0(p)}{dp} < 0$$

et par conséquent

$$A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right) < \left(p - \frac{1}{2}\right) J_1$$

Or

$$-J_1 < \frac{1}{p} \int_{-1-sp}^{-sp} y_l dl < \frac{1}{p} q^s$$

Donc

$$A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right) < \left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{1}{p} q^s$$

Mais en vertu de la propriété d)

$$\left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{1}{p} q^s = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

il en est donc de même de  $A_0(p) - A_0\left(\frac{1}{2}\right)$ , c. q. f. d.

## CHAPITRE III

Etude de l'intégrale  $\int_{-\lambda}^{\lambda} y_l dl$ .

## § 1. Introduction.

La propriété de l'intégrale  $\int_{-1}^{s+1} y dx$  que nous venons d'établir s'étend aux intégrales  $\int_{-\lambda}^{\lambda} y_l dl$ , où  $\lambda$  est un nombre de la forme  $s^k$ , l'exposant  $k$  étant un nombre quelconque vérifiant l'inégalité  $\frac{1}{2} < k < 1$ . Nous montrerons, en effet, qu'on a encore

$$(10) \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} y_l dl - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Nous pourrions supposer que l'intervalle  $(-\lambda, \lambda)$  le long duquel est prise notre intégrale, est intérieur à l'intervalle central, puisque  $\lambda < 1 + sp$ , pour  $s$  suffisamment grand.

Nous commencerons par établir un lemme.

## § 2. Un lemme.

*Lemme :* Pour tout  $l$  tel que  $|l| \leq \lambda$  et à partir d'un  $s$  suffisamment grand,  $y_l$  vérifie l'inégalité

$$(11) \quad y_l < \frac{c}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

où  $c$  est une constante et  $t$  l'écart réduit

$$\frac{l}{\sqrt{2spq}}$$

*Démonstration.* — Nous partirons de l'expression suivante de  $y_l$  donnée récemment par MM. D. Mirimanoff et R. Do-vaz<sup>1</sup>

$$(12) \quad y_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi spq}} e^{-t^2 + F(t) + G(t)},$$

où

$$F(t) = \frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{spq}} \int_0^t \frac{1/2 - 2ptz + 2pz^2}{1 - \frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{spq}} z} dz - \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{spq}} \int_0^t \frac{1/2 - 2qtz + 2qz^2}{1 + \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{spq}} z} dz$$

$$G(t) = u(s) - u(sp + l) - u(sq - l)$$

et

$$u(s) = \frac{1}{12s} - \frac{\vartheta}{360s^3} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Posons

$$X = F(t) + G(t)$$

Il suffit de montrer que

$$e^X < ce^{\frac{t^2}{2}}$$

Soit  $\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{2spq}}$ . Nous commencerons par montrer que  $G(t) < 0$  pour  $|t| \leq \tau$  et  $s$  suffisamment grand.

Observons qu'on peut écrire

$$\frac{1}{sp + l} = \frac{1}{sp \left(1 + \frac{tq\sqrt{2}}{\sqrt{spq}}\right)}; \quad \frac{1}{sq - l} = \frac{1}{sq \left(1 - \frac{tp\sqrt{2}}{\sqrt{spq}}\right)}$$

Or à tout nombre positif  $\varepsilon$ , si petit soit-il, on peut faire correspondre un  $s_1$  tel que, pour  $s > s_1$ ,

$$(a) \quad 1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \frac{\tau q \sqrt{2}}{\sqrt{spq}}} < 1$$

$$1 < \frac{1}{1 - \frac{\tau p \sqrt{2}}{\sqrt{spq}}} < 1 + \varepsilon$$

<sup>1</sup> *Comptes rendus*, t. 185, 1927, p. 827.

Ces inégalités sont encore vérifiées si l'on remplace  $\tau$  par un nombre quelconque  $t$  positif ou nul  $\leq \tau$  <sup>(1)</sup>. Nous pouvons écrire par conséquent

$$G(t) < \frac{1}{12s} - \frac{1}{12sp}(1 - \varepsilon) - \frac{1}{12sq} + \frac{1}{360(sp)^3} + \frac{1}{360(sq)^3}(1 + \varepsilon)^3$$

Or quel que soit  $t \leq \tau$ , le signe de  $G(t)$ , pour  $s$  suffisamment grand, est celui de  $\frac{1}{12s} - \frac{1}{12spq}$ . Donc  $G(t) < 0$ , pour  $t$  positif ou nul  $\leq \tau$ . Mais cette inégalité a encore lieu pour  $t$  négatif tel que  $|t| \leq \tau$ . En effet, remplacer  $t$  par  $-t$  revient à permuter  $p$  et  $q$  dans l'inégalité précédente. Le résultat subsiste.

Pour démontrer notre lemme, il suffit donc d'établir l'inégalité

$$e^{F(t)} < ce^{\frac{t^2}{2}}$$

Or, en vertu des inégalités (a), nous pouvons écrire, pour  $t > 0$

$$\begin{aligned} F(t) &< \frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{spq}}(1 + \varepsilon) \int_0^t \frac{1}{2} dz - \frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{spq}} \int_0^t (2ptz - 2pz^2) dz \\ &\quad - \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{spq}}(1 - \varepsilon) \int_0^t \frac{1}{2} dz + \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{spq}} \int_0^t (2qtz - 2qz^2) dz \end{aligned}$$

ou bien, après quelques simplifications,

$$F(t) < \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{spq}} \left( \frac{p-q}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{q-p}{3} t^2 \right)$$

qu'on peut écrire

$$F(t) < at^2 + b,$$

$a$  et  $b$  tendant vers 0 avec  $\frac{1}{s}$ .

Or, pour  $s$  suffisamment grand et  $\varepsilon$  suffisamment petit, le signe de  $a$  est celui de  $q - p$ , tandis que le signe de  $b$  est celui de  $p - q$ . Si donc  $p \neq q$ ,  $a$  est positif et  $b$  négatif (puisque nous supposons  $p \leq q$ ) et par conséquent  $F(t) < at^2$ , où  $\alpha > a$ . En posant  $\alpha = 1/2$ , il vient, pour  $t > 0$  et  $s$  suffisamment grand,

<sup>1</sup> Pour  $t = 0$ , on remplacera le signe  $<$  du côté de 1 par  $=$ .

$$F(t) < \frac{t^2}{2} \quad \text{ou} \quad e^{F(t)} < e^{\frac{t^2}{2}}$$

Lorsque  $t < 0$ ,  $F(t)$  vérifie une inégalité qui s'obtient de la précédente en remplaçant  $t$  par son module  $|t|$  et en permutant  $p$  et  $q$ . Il vient alors, en supposant toujours  $p \neq q$ .

$$F(t) < at^2 + b,$$

où  $a < 0$  et  $b > 0$ , pour  $s$  suffisamment grand et  $\varepsilon$  suffisamment petit. D'où  $F(t) < b$  et par suite

$$e^{F(t)} < c$$

en posant  $c = e^b$ , et l'on voit que pour  $s$  suffisamment grand on peut poser  $c = 1 + \delta$ , où  $\delta$  est un nombre aussi petit qu'on veut.

Comme  $F(0) = 0$ , il en résulte que pour  $|t| \leq \tau$ , on a toujours

$$e^X < ce^{\frac{t^2}{2}}$$

si  $p \neq q$ .

Dans le cas de  $p = q$ , l'expression de  $F(t)$  se simplifie et l'on constate facilement qu'on a le droit de poser  $c = 1$ . L'inégalité (11) est donc établie.

*Corollaire.* — Comme  $F(t)$  a le signe de  $a$  pour  $t = -\tau$  et  $s$  suffisamment grand,  $F(-\tau) < 0$  et l'on a le droit de poser  $c = 1$  dans la formule (11). Par conséquent

$$y_{\pm\lambda} < \frac{e^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\sqrt{2\pi spq}}$$

Il en résulte qu'on a

$$y_{\pm\lambda} = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Pour établir cette formule, il suffit de montrer que

$$e^{-\frac{\tau^2}{2}} = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

ou que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^n e^{-\frac{\tau^2}{2}} = 0.$$

Mais, en posant  $\varepsilon = 2k - 1$  et  $s^\varepsilon = \sigma$ , le produit  $s^n e^{-\frac{\tau^2}{2}}$  s'écrit  $\sigma^{\frac{n}{\varepsilon}} e^{-\frac{\sigma}{4pq}}$

D'où

$$\log e^{\frac{\tau^2}{2}} s^{-n} = \frac{\sigma}{4pq} - \frac{n}{\varepsilon} \log \sigma$$

et comme

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma}{4pq} - \frac{n}{\varepsilon} \log \sigma \right) = \infty,$$

on voit qu'en effet

$$e^{-\frac{\tau^2}{2}} = o\left(\frac{1}{s^n}\right), \text{ c. q. f. d.}$$

$$\S 3. \text{ Théorème: } \int_{-\lambda}^{\lambda} y_l dl - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

*Démonstration.* — Nous avons montré (ch. II) que

$$\int_{-1-sp}^{sq+1} y_l dl - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

L'intégrale qui figure au premier membre de (10) peut s'écrire

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} y_l dl = \int_{-1-sp}^{sq+1} y_l dl - \int_{-1-sp}^{-\lambda} y_l dl - \int_{\lambda}^{sq+1} y_l dl$$

Pour établir le théorème en question, il suffit donc de montrer qu'on a séparément

$$\int_{-1-sp}^{\lambda} y_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right) \quad \text{et} \quad \int_{\lambda}^{sq+1} y_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Montrons d'abord qu'il en est ainsi de la seconde de ces intégrales. Elle est inférieure à  $\int_{\lambda}^{sq+1} l y_l dl$ . Appliquons à cette intégrale la formule de R. Frisch-de Montessus de Ballore généralisée. Il vient

$$\int_{\lambda}^{sq+1} l y_l dl = spq \int_{\lambda}^{\lambda+1} y_l dl + q \int_{\lambda}^{\lambda+1} l y_l dl - spq \int_{sq}^{sq+1} y_l dl + p \int_{sq}^{sq+1} l y_l dl$$

Désignons les quatre intégrales qui figurent dans le second membre de cette équation respectivement par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ .

Pour que l'on ait

$$\int_{\lambda}^{sq+1} ly_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

il suffit qu'il en soit de même de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ .

Montrons que si  $\alpha = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  il en est de même des trois autres intégrales.

En effet, on a

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1} ly_l dl < (\lambda + 1) \int_{\lambda}^{\lambda+1} y_l dl$$

Donc,  $\lambda + 1$  étant inférieur à  $s$  pour  $s$  suffisamment grand,  $\beta = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  si  $\alpha = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  en vertu des propriétés *b)* et *c)* (ch. I, § 2.)

D'autre part

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1} y_l dl > \int_{sq}^{sq+1} y_l dl$$

car  $l$  variant de  $p$  à  $sq + 1$ ,  $y_l$  est toujours décroissante (ch. I, § 2) et de plus  $p < \lambda < sq$  pour  $s$  suffisamment grand. Il en résulte que  $\gamma = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  si  $\alpha = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$

Enfin

$$\int_{sq}^{sq+1} ly_l dl < (sq + 1) \int_{sq}^{sq+1} y_l dl$$

et comme  $sq + 1 < s$ ,  $\delta = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  en même temps que  $\alpha$ , en vertu des propriétés *b)* et *c)*.

Il nous reste donc à montrer que

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1} y_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Or  $y_l$  étant toujours décroissante dans l'intervalle  $(\lambda, \lambda + 1)$  on a

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1} y_l dl < y_{\lambda}$$

Mais  $y_\lambda = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  en vertu du lemme du § 2 de ce chapitre; il en est donc de même de

$$\int_{\lambda}^{sq+1} y_l dl, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Montrons maintenant que

$$\int_{-1-sp}^{-\lambda} y_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

On a

$$\int_{-1-sp}^{-\lambda} y_l dl < - \int_{-1-sp}^{-\lambda} ly_l dl$$

En vertu de la propriété c), il suffit de montrer que

$$\int_{-1-sp}^{-\lambda} ly_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Appliquons à cette intégrale la formule de MM. Frisch-de Montessus de Ballore généralisée. Il vient

$$\begin{aligned} \int_{-1-sp}^{-\lambda} ly_l dl &= spq \int_{-1-sp}^{-sp} y_l dl + q \int_{-1-sp}^{-sp} ly_l dl - spq \int_{-\lambda-1}^{-\lambda} y_l dl + p \int_{-\lambda-1}^{-\lambda} ly_l dl \\ &= spq\gamma' + q\delta' - spq\alpha' + p\beta' \end{aligned}$$

En vertu des propriétés a) et b), il suffit, pour que

$$\int_{-1-sp}^{-\lambda} ly_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

que l'on ait séparément

$$\alpha' = o\left(\frac{1}{s^n}\right), \quad \beta' = o\left(\frac{1}{s^n}\right), \quad \gamma' = o\left(\frac{1}{s^n}\right) \quad \text{et} \quad \delta' = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Montrons que les trois dernières propriétés ont lieu si  $\alpha' = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$

Nous avons vu, en effet, que la fonction  $y_l$  est toujours croissante dans l'intervalle  $(-1-sp, -q)$ . D'autre part, pour  $s$



suffisamment grand, on a  $-sp < -\lambda < -q$ . De là résulte l'inégalité

$$\left| \int_{-\lambda-1}^{-\lambda} l y_l dl \right| < (\lambda + 1) \left| \int_{-\lambda-1}^{-\lambda} y_l dl \right|$$

Par conséquent  $\beta' = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  si  $\alpha' = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  en vertu de *b*) et *c*).

Ensuite on a

$$\int_{-1-sp}^{-sp} y_l dl < \int_{-\lambda-1}^{-\lambda} y_l dl$$

car  $-sp < -\lambda$  et  $-\lambda < -q$  pour *s* suffisamment grand,  $y_l$  croissant toujours lorsque *l* varie de  $-1-sp$  à  $-q$ .

Par conséquent,  $\gamma' = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  avec  $\alpha'$ .

Enfin

$$\left| \int_{-1-sp}^{-sp} l y_l dl \right| < (1 + sp) \left| \int_{-1-sp}^{-sp} y_l dl \right|$$

Donc si  $\alpha' = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$  il en est de même de  $\delta'$ .

Il nous reste à montrer que

$$\int_{-\lambda-1}^{-\lambda} y_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Comme  $y_l$  est toujours croissante dans l'intervalle  $(-\lambda-1, -\lambda)$ , on a

$$\int_{-\lambda-1}^{-\lambda} y_l dl < y_{-\lambda}$$

Mais

$$y_{-\lambda} = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Donc

$$\int_{-\lambda-1}^{-\lambda} y_l dl = o\left(\frac{1}{s^n}\right) \text{ en vertu de c).}$$

Par suite

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} y^l dl - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right), \text{ c. q. f. d.}$$

*Remarque.* — La démonstration du théorème précédent est plus simple dans le cas où  $p = q = \frac{1}{2}$ . Dans ce dernier cas  $y_l$  peut être mise sous la forme indiquée par M. D. Mirimanoff<sup>1</sup>.

$$y_l = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{-t^2 + (f+\frac{1}{2})\frac{1}{s}}, \text{ où } f = 2 \int_0^t \frac{z - 2tz^2 + 2z^3}{1 - \frac{2z^2}{s}} dz$$

$$\text{et } \frac{t}{s} = u(s) - u\left(\frac{s}{2} + l\right) - u\left(\frac{s}{2} - l\right)$$

#### CHAPITRE IV

Développement de  $y$  suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{\sqrt{spq}}$

##### § 1. Introduction.

En partant de la formule (12) que nous avons envisagée dans le chapitre précédent, il est facile de développer  $y$  suivant les puissances croissantes de

$$\frac{1}{\sqrt{spq}} = \frac{1}{\sigma},$$

$\sigma$  désignant l'écart quadratique moyen  $\sqrt{spq}$ .

Posons

$$y = \frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{P_1(t)}{\sigma} + \frac{P_2(t)}{\sigma^2} + \dots + \frac{P_n(t)}{\sigma^n} + \frac{E_n}{\sigma^{n+1}} \right)$$

Nous montrerons dans ce chapitre que les coefficients  $P_i(t)$  sont des polynômes en  $t$  qui peuvent être calculés de proche en proche. Nous établirons d'autre part une propriété importante de  $E_n$  qui nous sera utile dans la suite.

<sup>1</sup> *Comptes rendus* 182, 1926, p. 1119.

§ 2. Développement de  $F(t) + G(t)$  suivant  
les puissances de  $\frac{1}{\sigma}$ .

Nous supposons dans ce qui suit que la variable  $t$  vérifie l'inégalité  $|t| \leq \tau = \frac{s^k}{\sigma\sqrt{2}}$ , l'exposant  $k$  étant toujours un nombre compris au sens étroit entre  $1/2$  et  $1$ .

Posons

$$(13) \quad F(t) + G(t) = \frac{\pi_1(t)}{\sigma} + \frac{\pi_2(t)}{\sigma^2} + \dots + \frac{\pi_n(t)}{\sigma^n} + \frac{\varepsilon_n}{\sigma^{n+1}}$$

Montrons que les coefficients  $\pi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont des polynômes en  $t$  et que  $\varepsilon_n$  vérifie à partir d'un  $s$  suffisamment grand l'inégalité

$$(14) \quad |\varepsilon_n| < \gamma_0 |t|^v + \gamma_1 |t|^{v-1} + \dots + \gamma_v$$

où  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_v$  sont des nombres non négatifs et  $v$  un nombre entier qui ne dépend pas de  $s$ , mais varie avec  $n$ .

Pour établir cette propriété du développement de  $F(t) + G(t)$ , il suffit de l'établir séparément pour les développements de  $F(t)$  et des différents termes de  $G(t)$ .

Considérons d'abord le développement de  $F(t)$ . Supposons  $t > 0$ . On a

$$F(t) = \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^t \frac{1/2 - 2ptz + 2pz^2}{1 - \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} z} dz - \frac{q\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^t \frac{1/2 - 2qtz + 2qz^2}{1 + \frac{q\sqrt{2}}{\sigma} z} dz = U_1 + U_2.$$

La première de ces intégrales peut s'écrire, en développant

$$\frac{1}{1 - \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} z} \text{ suivant les puissances croissantes de } \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} z$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} \right)^i \left[ \frac{1}{2} \frac{t^i}{i} - \frac{2pt^{i+2}}{(i+1)(i+2)} \right] + \frac{(p\sqrt{2})^{n+1}}{\sigma^{n+1}} \int_0^t \frac{1/2 z^n - 2ptz^{n+1} + 2pz^{n+2}}{1 - \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} z} dz$$

On voit que les coefficients des  $\frac{1}{\sigma^i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont des polynômes en  $t$ . Quant au reste, son module est inférieur à

$$\frac{(p\sqrt{2})^{n+1}}{\sigma^{n+1}} \int_0^t \frac{z^n + 2ptz^{n+1} + 2pz^{n+2}}{1 - \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} z} dz$$

Mais à partir d'un  $s$  suffisamment grand,  $\frac{1}{1 - \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} z} < 2$ , et par

conséquent, le module du reste est inférieur à

$$2 \frac{(p\sqrt{2})^{n+1}}{\sigma^{n+1}} \left[ \frac{1}{2} \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{2(2n+5)pt^{n+3}}{(n+2)(n+3)} \right]$$

Il est donc bien de la forme  $\frac{\varepsilon_n}{\sigma^{n+1}}$ , où  $|\varepsilon_n|$  est inférieur à la valeur d'un certain polynôme en  $t$ , dont le degré et les coefficients, qui sont des nombres non négatifs, sont indépendants de  $s$ .

D'une façon analogue, on démontre que le développement suivant les puissances de  $\frac{1}{\sigma}$  de l'intégrale  $U_2$  qui s'écrit

$$U_2 = \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{(q\sqrt{2})^i}{\sigma^i} \left[ \frac{1}{2} \frac{t^i}{i} - \frac{2qt^{i+2}}{(i+1)(i+2)} \right] \\ + (-1)^{n+1} \frac{(q\sqrt{2})^{n+1}}{\sigma^{n+1}} \int_0^t \frac{z^n - 2qtz^{n+1} + 2qz^{n+2}}{1 + \frac{q\sqrt{2}}{\sigma} z} dz$$

possède les mêmes propriétés. Il suffit de faire remarquer que le module du reste est inférieur à la valeur d'un certain polynôme en  $t$  qu'on obtient en remplaçant dans ce reste tous les termes par leurs modules et  $\frac{1}{1 + \frac{q\sqrt{2}}{\sigma}}$  par 1. Le degré et

les coefficients de ce polynôme sont encore indépendants de  $s$ .

Donc la propriété en question est vraie de  $F(t)$  pour  $t > 0$ . Lorsque  $t < 0$ ,  $F(t) = F(-|t|)$  peut être mis, chapitre III, § 2, sous la forme:

$$F(-|t|) = -\frac{p\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^{|t|} \frac{1/2 - 2p|t|z + 2pz^2}{1 + \frac{p\sqrt{2}}{\sigma} z} dz \\ + \frac{q\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^{|t|} \frac{1/2 - 2q|t|z + 2qz^2}{1 - \frac{q\sqrt{2}}{\sigma} z} dz$$

Par un raisonnement semblable au précédent, on arrive au même résultat, seulement dans ce cas  $|\varepsilon_n|$  est inférieur à un polynôme en  $|t|$ .

Passons maintenant à  $G(t)$ .

On a

$$G(t) = u(s) - u(sp + l) - u(sq - l)$$

Or, en vertu de la formule de Stirling, quel que soit le nombre entier  $k$ ,

$$(15) \quad u(s) = \frac{1}{12s} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{s^3} + \dots + \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k-1) 2k} \cdot \frac{1}{s^{2k-1}} \\ + \frac{(-1)^k \theta B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{s^{2k+1}}$$

$B_2, B_3, \dots$  étant les nombres de Bernoulli et  $\theta$  un nombre positif inférieur à 1.

Supposons que  $k$  soit le nombre entier le plus petit vérifiant l'inégalité  $2(2k+1) > n$ . En écrivant

$$\frac{1}{s^i} = \frac{(pq)^i}{(spq)^i} = \frac{(pq)^i}{\sigma^{2i}}$$

on obtient le développement de  $u(s)$  suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{\sigma}$ . Les coefficients des  $\frac{1}{\sigma^i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) dans ce développement sont des constantes. Le reste s'écrit

$$\frac{(-1)^k \theta B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{(pq)^{2k+1}}{\sigma^{2(2k+1)}} = \frac{(-1)^k \theta B_{k+1} (pq)^{2k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{\sigma^d} \cdot \frac{1}{\sigma^{n+1}}$$

où  $d$  est un entier  $\geq 0$ .

On voit que le module du coefficient de  $\frac{1}{\sigma^{n+1}}$  est inférieur à une constante, dont le choix est indépendant de  $s$ . La propriété est donc vraie de  $u(s)$ .

Pour montrer qu'elle est vraie de  $u(sp+l)$ , envisageons le développement

$$(16) \quad u(sp+l) = \frac{1}{12(sp+l)} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{(sp+l)^3} + \dots \\ + \frac{(-1)^k \theta_1 B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{(sp+l)^{2k+1}}$$

et montrons que la propriété en question est vraie pour chaque terme de (16).

Or, pour  $m = 1, 3, \dots$ ,

$$\frac{1}{(sp+l)^m} = \left( \frac{q}{spq + qt\sqrt{2spq}} \right)^m = \frac{q^m}{\sigma^{2m}} \left( \frac{1}{1 + \frac{qt\sqrt{2}}{\sigma}} \right)^m \\ = \frac{q^m}{\sigma^{2m}} \left[ 1 - \frac{qt\sqrt{2}}{\sigma} + \dots + (-1)^h \frac{(qt\sqrt{2})^h}{\sigma^h} + (-1)^{h+1} \frac{(qt\sqrt{2})^{h+1}}{\sigma^{h+1} \left( 1 + \frac{qt\sqrt{2}}{\sigma} \right)} \right]^m$$

$h$  étant le nombre entier le plus petit vérifiant l'inégalité

$$2m + h + 1 > n.$$

Il est évident que les coefficients de  $\frac{1}{\sigma^i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) du développement de  $\frac{1}{(sp+l)^m}$  sont des polynômes en  $t$  et quant au reste, c'est la somme des termes en  $\frac{1}{\sigma^j}$ , où  $j > n$ . En remplaçant dans chacun de ces termes  $\sigma^j$  par  $\sigma^{n+1}$  et  $\frac{1}{1 + \frac{qt\sqrt{2}}{\sigma}}$

par 1, (dans le cas de  $t > 0$ ), ou par 2, (dans le cas de  $t < 0$ ), et le numérateur par son module, on voit que le reste est de la forme  $\frac{\varepsilon_n}{\sigma^{n+1}}$ , où  $|\varepsilon_n|$  vérifie une inégalité de la forme (14).

Quant à

$$\frac{(-1)^k \theta_1 B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{(sp+l)^{2k+1}}$$

le module de

$$\frac{1}{(sp+l)^{2k+1}} = \frac{q^{2k+1}}{\sigma^{n+1} \sigma^d \left( 1 + \frac{qt\sqrt{2}}{\sigma} \right)^{2k+1}}$$

est inférieur à  $\frac{q^{2k+1}}{\sigma^{n+1}}$ , si  $t > 0$ , et à  $\frac{(2q)^{2k+1}}{\sigma^{n+1}}$ , si  $t < 0$ , et on voit que la loi est vérifiée pour  $u(sp + l)$ .

Le même raisonnement s'applique à  $u(sq - l)$  qui a pour expression

$$u(sq - l) = \frac{1}{12(sq - l)} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{(sq - l)^3} + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^k \theta_2 B^{k+1}}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{1}{(sq - l)^{2k+1}}$$

où l'on peut écrire

$$\frac{1}{(sq - l)^m} = \frac{p^m}{(spq - lq)^m} = \frac{p^m}{\sigma^{2m}} \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{pt\sqrt{2}}{\sigma}} \right)^m$$

La propriété énoncée se trouve ainsi établie.

### § 3. Développement de $y$ suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\sigma}$ .

Posons  $F(t) + G(t) = X$

L'équation (12) devient

$$y = \frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^X$$

Développons  $e^X$  par la formule de Maclaurin. Il vient

$$e^X = 1 + \frac{X}{1} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta X}; \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Remplaçons  $X$  par son développement (13); en réunissant

les termes en  $\frac{1}{\sigma}$ ,  $\frac{1}{\sigma^2}$ , ...,  $\frac{1}{\sigma^n}$ , on obtient

$$(17) \quad e^X = 1 + \frac{P_1(t)}{\sigma} + \frac{P_2(t)}{\sigma^2} + \dots + \frac{P_n(t)}{\sigma^n} + \frac{E_n}{\sigma^{n+1}}$$

$P_i(t)$  est la somme des coefficients des termes en  $\frac{1}{\sigma^i}$

( $0 < i \leq n$ ), qui figurent dans  $\frac{X}{1}$ ,  $\frac{X^2}{2!}$ , ...,  $\frac{X^i}{i!}$ . Donc  $P_i(t)$  est un polynôme en  $t$ .

Pour former  $E_n$  il faut prendre l'ensemble des termes des  $\frac{X^i}{i!}$  dont le degré en  $\frac{1}{\sigma}$  est supérieur à  $n$  et y ajouter

$$\frac{X^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}$$

Les premiers termes forment soit des polynômes en  $t$ , soit des polynômes en  $t$  multipliés par des puissances de  $\varepsilon_n$ . Donc la valeur absolue de la partie de  $E_n$  qui provient des  $\frac{X^i}{i!}$  est inférieure à partir d'un  $s$  suffisamment grand à celle d'un polynôme de la forme

$$(18) \quad C_0 |t|^N + C_1 |t|^{N-1} + \dots + C_N,$$

l'entier  $N$  et les nombres non négatifs  $C_0, C_1, \dots, C_N$  ne dépendant pas de  $s$ .

Envisageons maintenant l'expression

$$\frac{X^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}.$$

On a

$$|X| < \sum_{i=1}^n \frac{\pi_i}{\sigma^i} + \frac{|\varepsilon_n|}{\sigma^{n+1}}$$

où  $\pi_i$  est un polynôme en  $t$  que l'on obtient de  $\pi_i$  en y remplaçant les termes par leurs modules.

On voit que

$$\frac{|X|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\alpha}{\sigma^{n+1}}$$

où  $|\alpha|$  est inférieur à un polynôme de la forme (18).

Nous avons vu d'autre part (chapitre III, § 2) que pour tout  $|t| \leq \tau$  et  $s$  suffisamment grand,  $X$  vérifie l'inégalité

$$e^x < ce^{\frac{t^2}{2}}$$

A fortiori

$$e^{\vartheta x} < ce^{\frac{t^2}{2}}$$

Il en résulte que  $E_n$  vérifie bien une inégalité de la forme

$$(19) \quad |E_n| < e^{\frac{t^2}{2}} [C_0 |t|^N + C_1 |t|^{N-1} + \dots + C_N]$$



§ 4. *Calcul de proche en proche des polynômes  $P_i(t)$ .*

Rappelons que les polynômes  $P_i(t)$  peuvent être calculés de proche en proche à l'aide de la relation

$$(20) \quad iP_i = \pi_1 P_{i-1} + 2\pi_2 P_{i-2} + 3\pi_3 P_{i-3} + \dots + i\pi_i P_0$$

Or

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \pi_1 = \sqrt{2} t(q-p) \left[ \frac{t^2}{3} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{t^2}{2} (p^2 + q^2) - \frac{2 \cdot 2 \cdot t^4}{3 \cdot 4} (p^3 + q^3) + \frac{pq-1}{12} \\ &= -\frac{t^4}{3} (1-3qp) + \frac{t^2}{2} (1-2pq) + \frac{pq-1}{12} \end{aligned}$$

On en tire:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} (\pi_1 P_1 + 2\pi_2) \\ &= \frac{t^6}{9} (q-p)^2 - \frac{t^4}{3} \{2(q-p)^2 + pq\} + t^2 \left( \frac{3}{4} - 2pq \right) + \frac{pq-1}{12} \\ &= \frac{t^6}{9} (1-4pq) - \frac{t^4}{3} (2-7pq) + t^2 \left( \frac{3}{4} - 2pq \right) + \frac{pq-1}{12} \end{aligned}$$

On pourra calculer de même les polynômes  $P_3, P_4, \dots$ . Lorsque  $p=q$ , les calculs se simplifient;  $y$  étant dans ce cas une fonction paire de  $t$ , les polynômes de rangs impairs sont nuls, en particulier  $P_1(t)=0$ , tandis que

$$P_2(t) = -\frac{t^4}{12} + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{16}.$$

## CHAPITRE V

Une propriété des polynômes  $P_i(t)$ .§ 1. *Introduction.*

Les formules établies dans les chapitres précédents vont nous permettre de démontrer une propriété curieuse des polynômes  $P_i(t)$ .

Soit  $P(t)$  un polynôme en  $t$ ,  $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ .

Envisageons l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} P(t) dt$$

Montrons qu'on a

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} P(t) dt = c \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt + \left[ e^{-t^2} Q(t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

$Q(t)$  étant un autre polynôme en  $t$  et  $c$  une constante.  
En effet

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} \sum_{i=0}^n a_i t^i dt = \sum_{i=0}^n a_i \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} t^i dt$$

Mais

$$\begin{aligned} (21) \quad \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} t^i dt &= -\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} t^{i-1} d(-t^2) \\ &= \left[ -\frac{1}{2} t^{i-1} e^{-t^2} \right]_{t_1}^{t_2} + \frac{i-1}{2} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} t^{i-2} dt \end{aligned}$$

On obtient ainsi une formule de récurrence par l'application successive de laquelle on démontre la propriété énoncée.

Montrons que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t) dt.$$

En effet

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t) dt = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt,$$

car

$$[e^{-t^2} Q(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

D'autre part

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1,$$

on a donc bien

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t) dt \quad \text{c. q. f. d.}$$

Or  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t) dt$  est la valeur moyenne de  $P(t)$ , en

supposant que  $t$  obéit à la loi de Gauss. Nous l'appellerons la valeur moyenne gaussienne de  $P(t)$  et la représenterons par le symbole  $M[P(t)]$ . Nous pouvons donc écrire

$$M[P(t)] = c.$$

Nous allons montrer que les valeurs moyennes gaussiennes des polynômes  $P_i(t)$  sont nulles quel que soit  $i$ .

*Remarque.* — Ceci explique pourquoi, dans les expressions de la probabilité  $P_{l_1}^{l_2}$  d'un écart compris entre  $l_1$  et  $l_2$  qu'on obtient du développement de  $y$  du chapitre précédent par application de la formule sommatoire, d'Euler-Maclaurin, l'intégrale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt \quad \text{ne figure que dans le premier terme}^1.$$

## § 2. Quelques propriétés de la valeur moyenne gaussienne d'un polynôme.

I. Si

$$M[P(t)] = 0,$$

on a

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P(t) dt = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

où

$$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{2spq}} = \frac{s^k}{\sqrt{2spq}}$$

En effet, dans ce cas

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P(t) dt = [Q(t)e^{-t^2}]_{-\tau}^{\tau} = \left[ e^{-t^2} \sum_{i=0}^m b_i t^i \right]_{-\tau}^{\tau}$$

<sup>1</sup> Cf. *Comptes rendus*, 182, 1926, p. 1118 (8).

Il suffit de montrer que

$$[t^i e^{-t^2}]_{-\infty}^{\infty} = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

pour  $i$  impair.

Or

$$[t^i e^{-t^2}]_{-\infty}^{\infty} = 2\tau^i e^{-\tau^2}$$

Considérons donc le produit

$$s^n \tau^i e^{-\tau^2} = \frac{1}{(\sqrt{2pq})^i} s^{ik+n-\frac{i}{2}} e^{-\frac{s^{2k-1}}{2pq}}$$

Prenons le logarithme de

$$e^{\frac{s^{2k-1}}{2pq}} s^{-(ik+n-\frac{i}{2})}$$

on obtient

$$\frac{s^{2k-1}}{2pq} - \left(ik + n - \frac{i}{2}\right) \log s.$$

Comme  $k > 1/2$ , cette différence tend vers l'infini avec  $s$ . Son inverse tend, par conséquent, vers zéro lorsque  $s$  augmente indéfiniment, ce qui démontre la propriété énoncée.

2) Pour que  $M[P(t)] = 0$ , il suffit qu'on ait

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} P(t) dt = 0$$

En effet, la variable  $\tau$  tendant vers l'infini avec  $s$ , on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} P(t) dt = \lim_{(s \rightarrow \infty)} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-t^2} P(t) dt = 0.$$

d'où  $M[P(t)] = 0$ , c. q. f. d.

3) On a

$$M[P(t)] = c = \sum a_i \frac{(i-1)(i-3)\dots 1}{2^k}$$

où

$$0 \leq i = 2k \leq n.$$

Pour établir cette propriété, utilisons la formule de récurrence (21).

Si  $i$  est pair,  $i = 2k$ , on a par application successive de cette formule:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} t^i dt \\
&= \left[ -\frac{1}{2} t^{i-1} e^{-t^2} \right]_{t_1}^{t_2} + \frac{(i-1)}{2} \left[ -\frac{1}{2} t^{i-3} e^{-t^2} \right]_{t_1}^{t_2} + \dots \\
&+ \frac{(i-1)(i-3)\dots 3}{2^{k-1}} \left[ -\frac{1}{2} t e^{-t^2} \right]_{t_1}^{t_2} + \frac{(i-1)(i-3)\dots 3 \cdot 1}{2^k} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt
\end{aligned}$$

Si  $i$  est impair,  $i = 2k + 1$ , on a

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} t^i dt \\
&= \left[ -\frac{1}{2} t^{i-1} e^{-t^2} \right]_{t_1}^{t_2} + \frac{(i-1)}{2} \left[ -\frac{1}{2} t^{i-3} e^{-t^2} \right]_{t_1}^{t_2} + \dots \\
&+ \frac{(i-1)(i-3)\dots 4}{2^{k-1}} \left[ -\frac{1}{2} t^2 e^{-t^2} \right]_{t_1}^{t_2} + \frac{(i-1)(i-3)\dots 4 \cdot 2}{2^k} \int_{t_1}^{t_2} t e^{-t^2} dt
\end{aligned}$$

Mais

$$\int_{t_1}^{t_2} t e^{-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_{t_1}^{t_2}$$

En résumé, pour  $i$  pair, on a

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} t^i dt = [q_i e^{-t^2}]_{t_1}^{t_2} + \frac{(i-1)(i-3)\dots 1}{2^k} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

Pour  $i$  impair, on a

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} t^i dt = [q_i e^{-t^2}]_{t_1}^{t_2}$$

où  $q_i$  est un polynôme en  $t$  de degré  $(i-1)$ .

On a, par conséquent,

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} P(t) dt = [Q(t)e^{-t^2}]_{t_1}^{t_2} + c \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

où

$$Q(t) = a_0 q_0 + a_1 q_1 + \dots + a_n q_n$$

et où  $c = M[P(t)]$  est bien de la forme annoncée.

### § 3. Lemme 1.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Démonstration. — On a

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt - 1 = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Envisageons le module du second membre.

On a tout d'abord, en intégrant par parties et supposant  $x > 0$  :

$$\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \quad (1)$$

Cette formule n'est qu'un cas particulier de la suivante :

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt &= \frac{e^{-x^2}}{2x} \left\{ 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{(2x^2)^2} - \dots \pm \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{(2x^2)^{n-1}} \right\} \\ &\quad \mp \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}} dt \end{aligned}$$

On a donc, puisque l'intégrale au second membre est positive :

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt < \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

En appliquant cette dernière propriété, on trouve

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^\infty e^{-t^2} dt < \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{\pi} \tau}$$

Or nous avons vu (v. § 2) que

$$\tau^i e^{-\tau^2} = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

Donc à fortiori

$$\frac{e^{-\tau^2}}{\tau} = o\left(\frac{1}{s^n}\right)$$

On a donc bien

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^\infty e^{-t^2} dt - 1 = o\left(\frac{1}{s^n}\right) \quad , \text{ c. q. f. d. }$$

#### § 4. Lemme 2.

L'intégrale

$$\int_{-\tau}^\infty e^{-t^2} E_n dt$$

est bornée pour  $s$  suffisamment grand, d'une manière plus précise

$$\int_{-\tau}^\infty e^{-t^2} E_n dt = o(1) .$$

Rappelons que la formule  $f(s) = O[g(s)]$ , où  $g(s)$  est une fonction positive de  $s$ , signifie que le quotient  $\frac{|f(s)|}{g(s)}$  est borné à partir d'une valeur suffisamment grande de la variable  $s$ .

*Démonstration.* — On a

$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} E_n(t) dt \right| \leq \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} |E_n(t)| dt \\ < \int_{-\tau}^{\tau} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[ C_0 |t|^N + C_1 |t|^{N-1} + \dots + C_N \right] dt$$

en vertu de l'inégalité (19), à partir d'un  $s$  suffisamment grand.

Mais

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[ C_0 |t|^N + \dots + C_N \right] dt = 2 \int_0^{\tau} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[ C_0 t^N + \dots + C_N \right] dt$$

Faisons dans cette dernière intégrale le changement de variable  $\frac{t}{\sqrt{2}} = t'$ .

Il vient

$$2 \int_0^{\tau} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[ C_0 t^N + \dots + C_N \right] dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} e^{-t'^2} P(t') dt'$$

$P(t')$  désignant un polynôme en  $t'$ .

D'après ce qu'on a vu au début de ce chapitre, on a

$$2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} e^{-t'^2} P(t') dt' = 2\sqrt{2} \left[ Q(t') e^{-t'^2} \right]_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} + 2\sqrt{2} M[P(t')] \int_0^{\frac{\tau}{\sqrt{2}}} e^{-t'^2} dt'$$

Mais cette dernière expression est une fonction bornée de  $s$ .

On a donc bien

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} E_n(t) dt = o(1), \quad \text{c. q. f. d.}$$

*Conséquence.*

$$\lim_{(s \rightarrow \infty)} \frac{1}{s} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} E_n dt = 0.$$



§ 5. Valeurs moyennes gaussiennes des polynômes  $P_i(t)$ .

*Théorème.* — Les valeurs moyennes gaussiennes de tous les polynômes  $P_i(t)$  ( $i = 1, 2 \dots$ ) sont nulles.

*Démonstration.* — On a  $M [P_1(t)] = 0$  en vertu de la formule 3) du § 2 de ce chapitre.

$$M [P_2(t)] = \frac{1 - 4pq}{9} \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3} - \frac{2 - 7pq}{3} \frac{3 \cdot 1}{2^2} \\ + \left( \frac{3}{4} - 2pq \right) \frac{1}{2} + \frac{pq - 1}{12} = 0$$

en faisant usage de la même formule.

Supposons que la propriété soit vraie de  $P(t), \dots P_{n-1}(t)$ .

Montrons qu'elle est encore vraie de  $P_n(t)$ .

Partons à cet effet du développement de  $y$  suivant les puissances de  $\frac{1}{\sigma}$  considéré dans le chapitre précédent.

$$y = \frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \frac{P_1(t)}{\sigma} + \frac{P_2(t)}{\sigma^2} + \dots + \frac{P_{n-1}(t)}{\sigma^{n-1}} + \frac{P_n(t)}{\sigma^n} + \frac{E_n}{\sigma^{n+1}} \right)$$

Multiplions tous les termes de ce développement par  $\sigma n dl$  et intégrons entre les limites  $-\lambda, +\lambda$ . Il vient

$$\sigma^n \int_{-\lambda}^{\lambda} y dl = \frac{\sigma^n}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2} dl + \frac{\sigma^{n-1}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2} P_1(t) dl + \dots \\ + \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2} P_{n-1}(t) dl + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2} P_n(t) dl \\ + \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2} E_n dl$$

Remplaçons dans toutes les intégrales du second membre

$l$  par  $\sqrt{2}\sigma t$ . Il vient

$$\begin{aligned} \sigma^n \int_{-\lambda}^{\lambda} y dl &= \frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} dt + \frac{\sigma^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P_1(t) dt + \dots \\ &+ \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P_{n-1}(t) dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P_n(t) dt \\ &+ \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} E_n dt \end{aligned}$$

Faisons maintenant tendre  $s$  vers l'infini.

En vertu des propriétés établies au § 3, chapitre III, et au § 3, chapitre V, on a

$$\lim_{(s \rightarrow \infty)} \sigma^n \left\{ \int_{-\lambda}^{\lambda} y dl - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} dt \right\} = 0$$

De même, en vertu des hypothèses faites sur les valeurs moyennes gaussiennes des polynômes  $P_i(t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) et en vertu de la propriété 1, § 2 de ce chapitre

$$\lim_{(s \rightarrow \infty)} \frac{\sigma^{n-i}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P_i(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Enfin

$$\lim_{(s \rightarrow \infty)} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} E_n dt = 0,$$

comme on l'a vu dans le § 4 de ce chapitre.

Donc

$$\lim_{(s \rightarrow \infty)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^2} P_n(t) dt = 0$$

et, par conséquent,  $M [P_n (t) ] = 0$ , en vertu de la propriété 2), § 2 de ce chapitre, c. q. f. d.

Cette propriété des polynômes  $P_i(t)$  va certainement permettre d'approfondir l'étude des courbes binomiales et peut-être même de faire un rapprochement entre le développement envisagé dans ce chapitre et l'une des séries de M. Charlier.

---



