Über ein Kurveninterval aus der Theorie der Planimeter

Über ein Kurvenintegral aus der Theorie der Planimeter

von ERWIN KREYSZIG, Universität Karlsruhe

Anlässlich der wohlgelungenen 147. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft vom 29. September bis 1. Oktober 1967 in Schaffhausen wurde ich auf eine Arbeit von Herrn Francis Dubois über Integrale mit gebrochenen Potenzen aufmerksam, die in Band XXVIII (Jahrgang 1963|67) der Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen erschienen ist.

Die nachstehenden Ausführungen wurden durch diese Arbeit angeregt und betreffen eine etwas einfachere Auswertung der genannten Integrale und deren Verallgemeinerung.

Herr Dubois betrachtet die Kurvenintegrale

$$(1) \qquad F_{1/2} = \int_C y^{1/2}\, dx \quad \text{und} \quad F_{3/2} = \int_C y^{3/2}\, dx,$$

die bei der Justierung gewisser Planimeter eine Rolle spielen. Integriert wird dabei von -r nach r längs des Halbkreises $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geqq 0$, in der oberen xy-Halbebene. Diese Integrale sind Sonderfälle des Integrals

$$(2) \qquad F_a = \int_C y^a\, dx \qquad (a \geqq 0)$$

mit C wie zuvor.

Insbesondere gilt also für die von Herrn Dubois [1] betrachteten Integrale

(5) $$F_{1/2} = r^{3/2} \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma(1,25)}{\Gamma(1,75)}$$

und

(6) $$F_{3/2} = r^{5/2} \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma(1,75)}{\Gamma(2,25)}$$

Wegen $\sqrt{\pi} = \Gamma(0{,}5) = 2\Gamma(1{,}5)$ ist dies identisch mit (19), (20) bzw. (39), (40) in [1].

Zahlenwerte von F_a gewinnt man aus (4) mit Hilfe einer Tafel der Gammafunktion (vgl. [2] oder [3]).

Für $a = 2n + 1$, $n = 0, 1, \ldots$, lässt sich F_a sogar elementar berechnen. Es ist nämlich gemäss (4)

$$F_{2n+1} = r^{2n+2} \sqrt{\pi} \, \Gamma\left(\frac{2n+3}{2} \right) / \Gamma(n+2).$$

Mit $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ folgt

$$\Gamma\left(\frac{2n+3}{2} \right) = \frac{(2n+1)\,(2n-1)\ldots 3 \cdot 1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}\,.$$

Wegen $\Gamma(n+2) = (n+1)\,!$ gilt also

(7) $$F_{2n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)\, \pi\, r^{2n+2} \,/\, 2^{n+1}\,(n+1)\,!\,.$$

Literatur

[1] F. Dubois, Beitrag zur Berechnung von Integralen mit gebrochenen Potenzen. Mitt. Naturforsch. Ges. Schaffhausen XXVIII (1963|67), 275—283

[2] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 3rd. ed., J. Wiley, New York, 1972

[3] Jahnke — Emde — Lösch, Tafeln höherer Funktionen, 7. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart, 1966

Um (2) auszuwerten, setzen wir $x = r \cos p$ und $y = r \sin p$. Dann wird $dx = -r \sin p \, dp$ auf C, und wir erhalten

$$F_a = -r^{a+1} \int_{\pi}^{0} \sin^{a+1} p \, dp = r^{a+1} \int_{0}^{\pi} \sin^{a+1} p \, dp.$$

Setzen wir weiterhin $p = q + \pi/2$, also $q = p - \pi/2$, so ergibt sich $\sin p = \cos q$ und

$$F_a = r^{a+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{a+1} q \, dq = 2r^{a+1} \int_{0}^{\pi/2} \cos^{a+1} q \, dq.$$

Das verbleibende Integral lässt sich mit Hilfe der Eulerschen Betafunktion B (s; t) auswerten (vgl. z. B. [2], Seite 830): Es ist

$$B(s; t) = \int_{0}^{1} u^{s-1} (1-u)^{t-1} \, du = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

und $B(s; t) = B(t; s)$. Setzen wir $u = \sin^2 q$, so folgt $1 - u = \cos^2 q$ und $du = 2 \sin u \cos u \, du$.

Demnach erhalten wir

$$B(s; t) = 2 \int_{0}^{\pi/2} \sin^{2s-1} q \cos^{2t-1} q \, dq.$$

Für $2s - 1 = b$ und $2t - 1 = 0$ ergibt sich speziell

$$(3) \qquad \int_{0}^{\pi/2} \sin^{b} q \, dq = (1/2) \, B(0{,}5; 0{,}5b + 0{,}5).$$

Mit $b = a + 1$ folgt hieraus

$$F_a = r^{a+1} B(0{,}5; 0{,}5a + 1)$$

oder wegen $\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi}$ auch

$$(4) \qquad F_a = r^{a+1} \frac{\Gamma(0{,}5)\Gamma(0{,}5a+1)}{\Gamma(0{,}5a+1{,}5)} = r^{a+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(0{,}5a+1)}{\Gamma(0{,}5a+1{,}5)}$$

Damit ist Integral (2) ausgewertet.