

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Schaffhausen  
**Band:** 30 (1973-1976)

**Artikel:** Über ein Kurveninterval aus der Theorie der Planimeter  
**Autor:** Kreyszig, Erwin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-585464>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über ein Kurvenintegral aus der Theorie der Planimeter

von ERWIN KREYSZIG, Universität Karlsruhe

Anlässlich der wohlgelungenen 147. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft vom 29. September bis 1. Oktober 1967 in Schaffhausen wurde ich auf eine Arbeit von Herrn Francis Dubois über Integrale mit gebrochenen Potenzen aufmerksam, die in Band XXVIII (Jahrgang 1963|67) der Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen erschienen ist.

Die nachstehenden Ausführungen wurden durch diese Arbeit angeregt und betreffen eine etwas einfachere Auswertung der genannten Integrale und deren Verallgemeinerung.

Herr Dubois betrachtet die Kurvenintegrale

$$(1) \quad F_{1/2} = \int_C y^{1/2} \, dx \text{ und } F_{3/2} = \int_C y^{3/2} \, dx,$$

die bei der Justierung gewisser Planimeter eine Rolle spielen. Integriert wird dabei von  $-r$  nach  $r$  längs des Halbkreises  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $y > 0$ , in der oberen xy-Halbebene. Diese Integrale sind Sonderfälle des Integrals

$$(2) \quad F_a = \int_C y^a \, dx \quad (a > 0)$$

mit  $C$  wie zuvor.

Insbesondere gilt also für die von Herrn Dubois [1] betrachteten Integrale

$$(5) \quad F_{1/2} = r^{3/2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1, 25)}{\Gamma(1, 75)}$$

und

$$(6) \quad F_{3/2} = r^{5/2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1, 75)}{\Gamma(2, 25)}$$

Wegen  $\sqrt{\pi} = \Gamma(0,5) = 2\Gamma(1,5)$  ist dies identisch mit (19), (20) bzw. (39), (40) in [1].

Zahlenwerte von  $F_a$  gewinnt man aus (4) mit Hilfe einer Tafel der Gammafunktion (vgl. [2] oder [3]).

Für  $a = 2n + 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , lässt sich  $F_a$  sogar elementar berechnen. Es ist nämlich gemäss (4)

$$F_{2n+1} = r^{2n+2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) / \Gamma(n+2).$$

Mit  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  folgt

$$\Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \frac{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}.$$

Wegen  $\Gamma(n+2) = (n+1)!$  gilt also

$$(7) \quad F_{2n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) \pi r^{2n+2} / 2^{n+1} (n+1) ! .$$

### Literatur

- [1] F. Dubois, Beitrag zur Berechnung von Integralen mit gebrochenen Potenzen. Mitt. Naturforsch. Ges. Schaffhausen XXVIII (1963|67), 275—283
- [2] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 3rd. ed., J. Wiley, New York, 1972
- [3] Jahnke — Emde — Lösch, Tafeln höherer Funktionen, 7. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart, 1966

Um (2) auszuwerten, setzen wir  $x = r \cos p$  und  $y = r \sin p$ . Dann wird  $dx = -r \sin p \, dp$  auf C, und wir erhalten

$$F_a = -r^{a+1} \int_{\pi}^0 \sin^{a+1} p \, dp = r^{a+1} \int_0^{\pi} \sin^{a+1} p \, dp.$$

Setzen wir weiterhin  $p = q + \frac{\pi}{2}$ , also  $q = p - \frac{\pi}{2}$ , so ergibt sich  $\sin p = \cos q$  und

$$F_a = r^{a+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{a+1} q \, dq = 2r^{a+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{a+1} q \, dq.$$

Das verbleibende Integral lässt sich mit Hilfe der Euler-schen Betafunktion  $B(s; t)$  auswerten (vgl. z. B. [2], Seite 830): Es ist

$$B(s; t) = \int_0^1 u^{s-1} (1-u)^{t-1} \, du = \frac{\Gamma(s) \Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

und  $B(s; t) = B(t; s)$ . Setzen wir  $u = \sin^2 q$ , so folgt  $1-u = \cos^2 q$  und  $du = 2 \sin u \cos u \, du$ .

Demnach erhalten wir

$$B(s; t) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2s-1} q \cos^{2t-1} q \, dq.$$

Für  $2s-1 = b$  und  $2t-1 = 0$  ergibt sich speziell

$$(3) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^b q \, dq = (1/2) B(0,5; 0,5b + 0,5).$$

Mit  $b = a + 1$  folgt hieraus

$$F_a = r^{a+1} B(0,5; 0,5a + 1)$$

oder wegen  $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$  auch

$$(4) \quad F_a = r^{a+1} \frac{\Gamma(0,5) \Gamma(0,5a + 1)}{\Gamma(0,5a + 1,5)} = r^{a+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(0,5a + 1)}{\Gamma(0,5a + 1,5)}$$

Damit ist Integral (2) ausgewertet.

