Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Schaffhausen

Band: 19 (1944)

Artikel: Die Schöpfungen Jakob und Alfred Amsler's auf dem Gebiete der

mathematischen Instrumente anhand der Ausstellung im Museum

Allerheiligen systematisch dargestellt

Autor: Dubois, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-584790

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II. Mathematik

5.

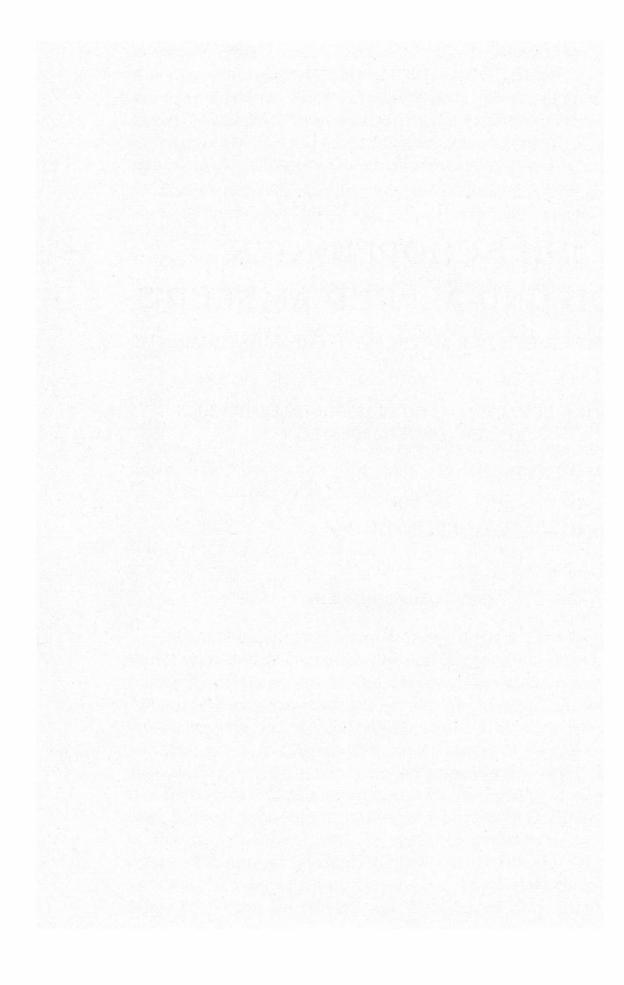
DIE SCHÖPFUNGEN JAKOB UND ALFRED AMSLER'S

AUF DEM GEBIETE DER MATHEMATISCHEN INSTRUMENTE

ANHAND DER AUSSTELLUNG IM MUSEUM ALLERHEILIGEN SYSTEMATISCH DARGESTELLT

VON FR. DUBOIS

(MIT 44 ABBILDUNGEN)



Einleitung

Die Schöpfungen Jakob Amsler's (1823—1911) und Alfred Amsler's (1857—1940) auf dem Gebiete der mathematischen Instrumente umfassen Instrumente für die verschiedensten Verzwendungszwecke; die Leistungen des Vaters und des Sohnes sind zum Teil scharf voneinander getrennt, zum Teil innig verzschmolzen. Man könnte versucht werden, die Konstruktionen der beiden Männer nacheinander in chronologischer Reihenfolge darzustellen; diese aber sachlich wie methodisch unbegründete Trennung, ein Produkt von zeitlichen Zufälligkeiten, verhindert die Klarlegung des Kernpunktes: des logischen Zusammenhanges zwischen den einzelnen Konstruktionen. Hier soll, in absichtzlichem Bruche mit der Tradition, versucht werden, die Jakob und Alfred Amsler'schen mathematischen Instrumente in systezmatischer Reihenfolge gemeinsam zu behandeln, so wie es die logische Uebersicht der Gedankengänge verlangt.

Es sollen also nachstehend die Amsler'schen mathematischen Instrumente in folgender Gruppierung zur Sprache kommen:

- I. Integrationsapparate,
- II. Derivationsapparate,
- III. Kurvimeter,
- IV. Hydraulische Apparate,
- V. Beschleunigungsmesser.

SYNOPTISCHE INHALTSÜBERSICI	ТН		
			Seite
Einleitung			211
I. INTEGRATIONSAPPARATE			
1. Rotationsflächenintegratoren			
a) Scheibenintegrator			214
— Metallabnützungsmaschine			215
- Durand=Amsler'sches Radialplanimeter			216
- Lugeon-Amsler'sches aerologisches Planimeter .			217
b) Kugelkalotten=Integrator			219
c) Kugelintegrator		21	9/220
2. Schraubenlinien=Integrator			221
3. Das Jakob Amsler'sche Polarplanimeter und seine Erwei			
a) Das übliche Polarplanimeter und Abarten			
— Mathematische Betrachtungen			224
— Einfaches Polarplanimeter			231
— Pantographisches Planimeter			232
— Lederplanimeter			233
— Scheibenpolarplanimeter			234
— Einfaches Linearplanimeter			235
— Scheiben=Linearplanimeter			236
b) Das Amsler'sche Momentenplanimeter			
— Mathematische Betrachtungen			236
- Jakob Amsler'sche Originalkonstruktion		23	7/238
- Variante von A. Amsler mit Kugelkalottenintegra			238
— Variante von A. Amsler mit Scheiben-Sinusinteg			239
c) Das stereographische Planimeter von A. Amsler .			241
4. Der integrierende Dampfmaschinen-Indikator			
— Uebliche Ausführung mit Scheibenintegrator .			247
- Konstruktion von A. Amsler mit Scheiben-Sinusi	ntegrato	r	247
- Konstruktion von J. Amsler mit Polarplanimete			248
II. DERIVATIONSAPPARATE			
기계에 보았어? 시간에 있어야 하고있다면 하게 하셨다면서 하는 것이 얼마를 하는 것이 모습니다.			040
Theoretische Erläuterungen	•	•	249
Der (nicht ausgeführte) J. und A. Amsler'sche Kegel=			050
Geschwindigkeitsmesser			250
Der J. und A. Amsler'sche Kugel=Geschwindigkeitsmess	er .	•	251
III. KURVIMETER			257
IV. HYDRAULISCHE APPARATE			
Der Rohrleitungswassermesser von A. Amsler			258
Der integrierende Pegel			265
V. BESCHLEUNIGUNGSMESSER			072
Der rotierende Beschleunigungsmesser von A. Amsler			267

I. INTEGRATIONS APPARATE¹⁾

Den Ausgangspunkt des Amsler'schen Schaffens überhaupt und den Anstoß zur Gründung der Maschinenfabrik Amsler bildet die Erfindung des Polarplanimeters 1852 durch Jakob Amsler. Es wäre indessen verfehlt, die Besprechung der Amslerschen Integrationsapparate mit dem Polarplanimeter zu beginnen. Denn vor der Erfindung des Polarplanimeters haben schon Integratoren existiert bezw. sind weitere solche während der Wirksamkeit von J. und A. Amsler entstanden, so vor allem der Scheibenintegrator (Gonella 1825²), Wetli 1849³), der Kegel= integrator (Oppikofer 1827 4), der Kugelkalottenintegrator (Coradi etwa 1880 5) und der Kugelintegrator (Hele Shaw 1886 6) einer= seits, und der Integrator von Abdank=Abakanowicz (18787) an= dererseits. Den ersteren liegt die Rotationsfläche, dem letzteren die Schraubenlinie zu Grunde. Nun haben sowohl Jakob wie Alfred Amsler für konstruktive Varianten des Polarplanimeters und seiner Abarten gewisse klassische Bestandteile der Rotations= flächenintegratoren quasi als Bausteine in ihre Konstruktion aufgenommen, bezw. selber die fremden Integratoren in selbstän-

²) Galle, Mathematische Instrumente, Leipzig, Teubner 1912, S. 51 und 81.

3) Galle, loc. cit., Seite 81.

Ein Originalplanimeter von Wetli befindet sich in der physikalischen Sammlung der Kantonsschule in Solothurn (Mitteilung von Prof. H. Stohler,

¹⁾ Integrationsapparate dienen zur Ausführung der Operation $\int F(y) \cdot dx$, wobei y selber eine Funktion der Urvariablen x sein kann. Ist die Funktion F(y) allgemeiner Natur, so heißen sie Integratoren oder Integraphen. Reduziert sich die Funktion F(y) auf y selbst, hat also das Integral die Bedeuztung der Fläche mit Ordinate y, so dienen die Integratoren vorwiegend zur Flächenausmessung; sie heißen dann kurzerhand Planimeter.

Deutsche Mathematiker Vereinigung, Katalog mathem. und mathem. physik. Modelle und Instrumente, Nachtrag München 1893, C. Wold & Sohn,

⁴⁾ H. Stohler, Basel, Referat an der Jahresversammlung des Vereins schweiz. Mathematiklehrer 1941 in Schaffhausen. Veröffentlicht im 69. Jahrebuch der Vereinigung schweiz. Gymnasiallehrer, Seite 115—117. Aarau, H. R. Sauerländer & Co. 1942.

5) Galle, loc. cit., Seiten 96—98.
6) Galle, loc. cit., Seiten 54 und 121.
7) Abdank=Abakanovicz, Les intégraphes, Paris, Gauthier=Villars 1886. Galle, loc. cit. Seiten 157—160.

Galle, loc. cit., Seiten 157-160.

diger konstruktiver Neugestaltung in andere Gebiete der Technik eingeführt. Die Uebersicht und das Verständnis werden also ersleichtert, wenn die Amsler'schen Integrationsapparate nach den ihnen zu Grunde liegenden mathematischen Gebilden durchsgenommen werden. Dadurch erhalten das Polarplanimeter und seine Weiterausbildungen ihren richtigen Platz in der Gesamtsentwicklung.

Dieser Weg ist nachstehend eingeschlagen worden.

1. Rotationsflächen:Integratoren.

Ausgangsprinzip aller Rotationsflächen=Integratoren ist die Eigenschaft, daß die Länge ds eines elementaren Kreisbogens gleich dem Produkt aus Radius R mal Zentriwinkel d φ ist. Wird also der Radius irgend einer Rotationsfläche durch eine geeignete konstruktive Maßnahme proportional dem Integrand y und der Drehwinkel d φ derselben proportional dem Variablenelement dx gemacht, so wird das angestrebte Integral $\int y \cdot dx = \text{prop.} \int R \cdot d\varphi$ in einem gewissen Maßstabe erhalten, als die totale Abwicklung einer auf der Rotationsfläche radial gesteuerten, zum Radius senkrecht stehenden Kurvimeterrolle, Integrierrolle genannt.

a) Scheibenintegrator.

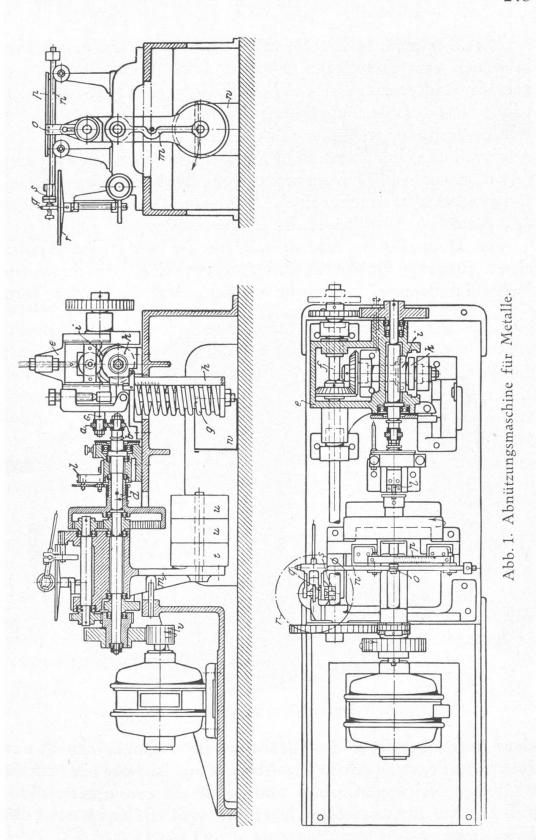
Unter vielen Anwendungen des Scheibenintegrators an Amslerschen Maschinen ist besonders diejenige von Alfred Amsler an seiner Abnützungsmaschine für Metalle (1917), Abb. 1, bes nützte 8) erwähnenswert. Bei dieser rollen 2 scheibenförmige Probestücke a, b gegensinnig mit verschiedenen Umdrehungsszahlen, also mit Schlupf, und unter einem bestimmten Anpressungsdruck (vorgespannte Feder g!) aufeinander ab. Die Absnutzbarkeit des Probematerials wird definiert durch den Geswichtsverlust in mgr. bezogen auf die verrichtete Abnützungssarbeit in kgm. Letztere, Integral des ProbescheibensAntriebssmomentes nach dem Drehwinkel = $\int M. d\varphi$, wird wie folgt ermittelt:

Die untere Probescheibe b wird über einen Jakob Amslerschen Zahndruckdynamometer mit Pendel m⁹) angetrieben. Durch den Pendelausschlag wird das Drehmoment über eine

⁸) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 66, Jahrgang 1922, Heft 15, Seite 377/378.

E. Siebel, Handbuch der Werkstoffprüfung, Berlin, Springer 1940, Bd. 1,

⁹⁾ Gramberg, Technische Messungen, 5. Auflage, Berlin, Springer 1923, Seiten 307/308.



Stange n auf die Integrierrolle q eines zum Drehwinkel der Proben proportional rotierenden Scheibenintegrators r überstragen, welcher die Reibungsarbeit direkt angibt. Photosgraphie im Museum.

Viel Verwendung hat der Scheibenintegrator auch gefunden in seiner vom Amerikaner Durand 1908 10) erdachten umgeskehrten Anordnung, bei welcher die Integrierscheibe mit aufsgespanntem polarem Funktionsdiagramm auf kreisrunder Papierscheibe feststeht, während die Integrierrolle mit radialer Führung von Hand um den Zentriwinkel dø herumgedreht wird (Auswertung von Diagrammen von Registrierapparaten mit rotierender Diagrammscheibe). Planimeter im Museum. (Konstruktive Ausführung der Firma Amsler.)

Am Durand'schen Radialplanimeter ist von Albert Amsler, einem jüngeren Bruder Alfred Amslers, eine bemerkenswerte Vervollkommnung angebracht worden, Abb. 2, in der Form

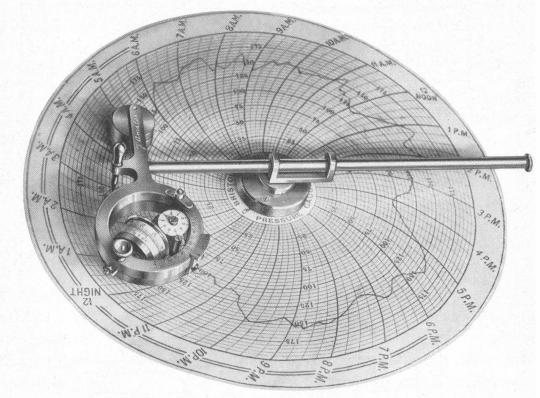


Abb. 2. Durand=Amsler=Radialplanimeter.

einer gegenüber ihrer Radialführung im Azimut verstellbaren Integrierrolle, wodurch in die Abwicklung letzterer ein beliebig wählbarer Neigungs-Cosinus und somit ein gewünschter Maßstab für die Rollenanzeige eingeführt wird. Planimeter im Museum.

Obgleich den Schöpfungen der Familie Amsler fremd, verz dient des Zusammenhanges wegen an dieser Stelle erwähnt zu

¹⁰) Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1911, Seiten 213/214, Albert Amsler: "Das Durand»Amsler'sche Radialplanimeter".

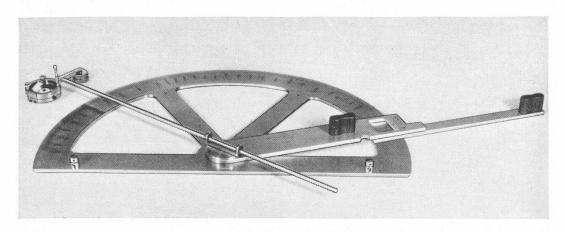


Abb. 3. Aerologischer Transporteur mit Radialplanimeter.

werden eine von der Maschinenfabrik Amsler in den letzten Jahren ausgeführte Anwendung des Radialplanimeters zur Integration der barometrischen Höhenformel, zwecks rascher Erzmittlung der Höhe von Sondierballonen aus radiotelegraphisch übermittelten periodischen Luftdruckz und Temperaturzeichen. Solche Sondierballone werden in der Meteorologie und Ballistik zur Erforschung des Zustandes (Barometerdruck, Temperatur) der Atmosphäre in Funktion der Höhe benutzt. Aus der Diffezrentialgleichung des Gleichgewichtes der Atmosphäre

$$- dp = dy \cdot \gamma$$

in Verbindung mit der Zustandsgleichung der Gase

$$\frac{p}{\gamma} = RT$$

(y = Höhe über Boden; p = Barometerdruck; $\gamma =$ spez. Gewicht der Luft; $T = 273^{\circ} + t =$ absolute Temperatur; R = Gaskonstante, für Luft = 29,27) folgt:

$$y = -R \int T \frac{\mathrm{d}p}{p} = -R \int T \cdot \mathrm{d} (\log p)$$

Die mechanische Auswertung dieser längst bekannten Integralformel vermittelst eines Transporteurs mit log p als Zentrizwinkel und T als RadiuszVektor (abs. 0zPunkt im Transporteurzentrum) und mit angebautem Radialplanimeter wurde im Jahre 1938 von Herrn Dr. J. Lugeon 11) von der eidg. meteorozlogischen Zentralanstalt in Zürich entwickelt und durch Oberstlt. Dr. Sänger in den Artillerienachrichtendienst der schweizerischen

J. Lugeon, Annalen der Schweiz. Meteorologischen Zentralanstalt
 1938. J. Lugeon, Bulletin Technique de la Suisse Romande, 23. 8. 1941.

Armee systematisch eingeführt. Abb. 3 stellt den logarithmischen Transporteur kombiniert mit dem Radialplanimeter, Ausführung Amsler, dar.

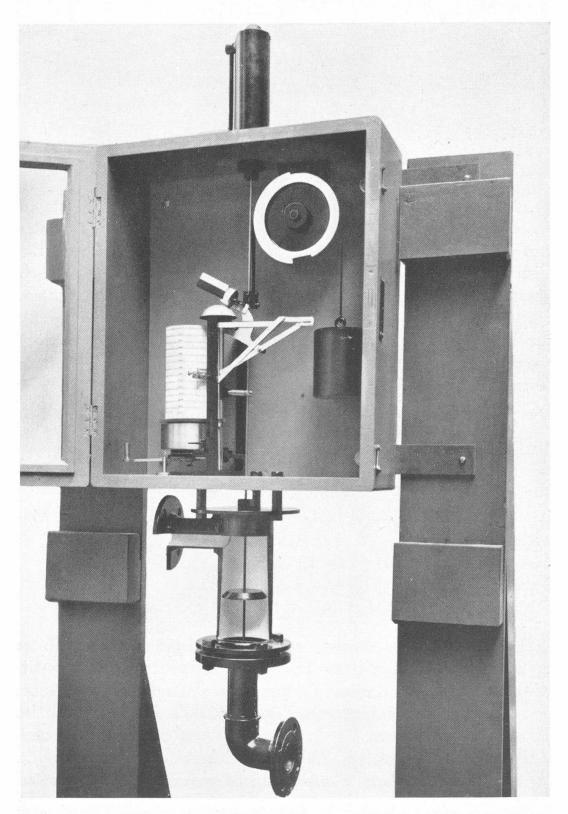


Abb. 4. Schwimmerdampfmesser mit Kugelkalottenintegrator.

b) Kugelkalotten=Integrator.

Abbildung 4 stellt eine interessante Anwendung dieses Integrators von Alfred Amsler an dem bekannten Schwimmergdampfmesser der Farbenfabriken vorm. F. R. Bayer & Co. in Leverkusen dar. 12)

In einem schwach konisch nach unten sich erweiternden Rohr bewegt sich eine Schwimmerscheibe, die über Führungsstange, Stahlband und Rolle durch ein Gegengewicht ausbalan= ciert ist. Der von oben her durch das Kegelrohr durchströmende Dampf senkt die Scheibe, bis der Ringspalt sich genügend erweitert hat, damit der Druckabfall im Drosselungsquerschnitt, m. a. W. der Ueberdruck auf der Schwimmerscheibe, das Gegengewicht gerade in Schwebe hält. Die Dampfströmung findet somit bei konstantem Druckgefälle p₁—p₂, d. h. konstanter Ge= schwindigkeit $w = \sqrt{2g\left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma_m}\right)}$, (g = Erdbeschleunigung, p_1 und p_2 = Dampfdrücke, γ_m = mittl. spez. Gewicht des Dampfes vor und nach Ringspalt) statt. Die sekundliche Durch= flußmenge Q kg/sec. = γ_m · Ringquerschnitt · w ist also proportional dem Spaltquerschnitt, d. h. dem Abstand der Schwimmerscheibe von dem Beginn der Meßdüse (Durchdrin= gung vom Kegel und von den Erzeugenden der Schwimmer> scheibe). Die mengenproportionale Höhenlage der Scheibe wird von oben nach unten auf einer durch Uhrwerk gedrehten Schreibtrommel registriert und mittels Kugelkalottenintegrators mit dem gleichen Antrieb nach der Zeit integriert, um das total durchflossene Dampfgewicht zu erhalten, ähnlich wie bei einer Gas= oder Wasseruhr. Der nach einem sinus a=Gesetz verlau= fende Abstand der Integrierrolle von der Kugelkalotten=Dreh= achse wird in eleganter Weise von der Führungsstange der Schwimmerscheibe vermittelst Ellipsenlenkers abgeleitet. Mo= dell im Museum.

c) Kugelintegrator.

Hervorgegangen aus dem Kugelkalotten-Integrator durch Schwenkung der Kalottendrehachse um den funktionsabhängigen Winkel α , Festhaltung der Integrierrolle (im Gegensatz zur Kugelkalotte mit fester Drehachse und α -bewegter Integrierrolle) und Antrieb der zur vollen Kugel ergänzten

¹²) Gramberg, Technische Messungen, 5. Auflage, Berlin, Springer 1923, Seiten 245—255.

Kugelkalotte durch Reibrolle entlang einem Größtkreis. Dadurch entsteht zwischen Integrand und erforder'icher Funktionssteuerung der Kugelachse eine $tg \alpha$ -Beziehung anstatt der einfachen sin α -Beziehung wie beim Kugel-kalottenintegrator. Siehe Fußnotiz 13).

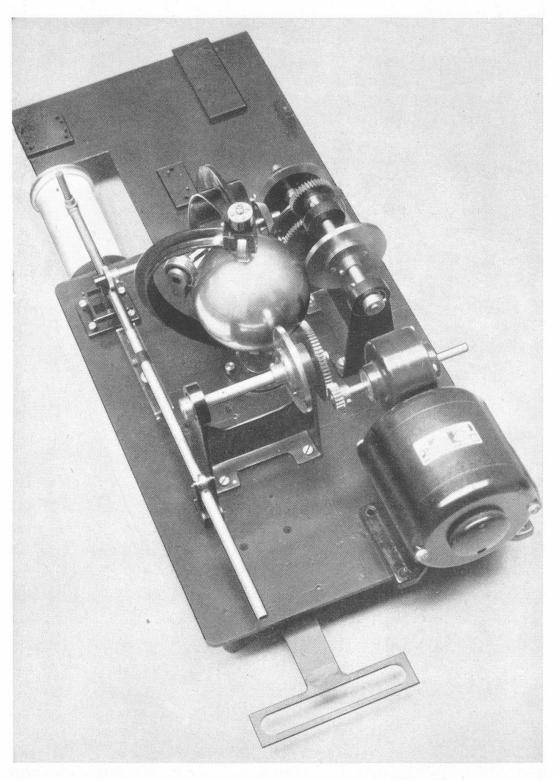


Abb. 5. Kugelintegrator.

221

Alfred Amsler war es, der als erster (etwa von 1912 an) einen ganz ergiebigen Gebrauch vom Kugelintegrator für techsnische Zwecke machte und zwar auf seinen Eisenbahndynamosmeterwagen, zur Ermittlung der Arbeit am Zughaken, sowie der für Rollwiderstandsbestimmungen von derselben abzuziehenden Arbeit der dynamischen Kräfte (Beschleunigungskraft und Erdschwerekomponente) über eine gegebene Fahrstrecke. 13)

Abb. 5 stellt einen Kugelintegrator nach der Konstruktion Alfred Amsler's in modernster Ausführung dar. Rechts vorn ist der dx=Antrieb durch Reibscheibe und Elektromotor. Unter der Apparatenplatte ist die Betätigung des Kugeläquatorial= rahmens mit den 2 Richtungsrollen nach dem Gesetz: Kon= stante · tg α = zu integrierende Funktion y vermittelst eines Tangentenmechanismus ersichtlich. Die Scheibe in der Mitte hinten ist die $J = \int tg \alpha \cdot dx = \int y \cdot dx$ abnehmende Integrier= rolle. Schließlich ist links die Registriervorrichtung für das ge= wonnene Integral mit zwischengeschaltetem Wendegetriebe zur Zerhackung der endlos steigenden Integralkurve in eine ge= brochene, die Breite des Registrierpapiers nicht überschreitende Zickzacklinie zu erkennen. 14) Photographie im Mu = seum.

2. Schraubenlinien=Integrator.

Diesem liegt die auf einem Zylinder konstanten Durchmessers aufgewickelte Schraubenlinie veränderlicher Steigung tg α zu Grunde. Dreht sich der Zylindergrundkreis um einen Bogen dx vorwärts, so steigt die Schraubenlinie in axialer Richtung um $dJ=tg\ \alpha\cdot dx$. Eine Integration $J=\int y\cdot dx$ ist also möglich, sobald man y=Konstante $tg\ \alpha$, $tg\ \alpha=1$

¹³) H. A. Gaudy, Schweizerische Bauzeitung 1914, No. 4, 5 und 6. Amsler & Co., Bulletin Technique de la Suisse Romande, 1924, No. 1, 3, 4 und 5

¹⁴) Es sei vollständigkeitshalber daran erinnert, daß, während bei allen übrigen Rotationsflächenintegratoren der Uebergang von einem Funktions» wert zum anderen durch ein Gleiten der Integrierrolle senkrecht zu ihrer Schneide auf der Fläche stattfindet, beim Kugelintegrator dagegen ein solcher Uebergang sich nur durch Abwicklung auf der Integrierrolle von Parallel» kreisen, welche durch den Berührungspunkt senkrecht zur geometrischen (d. h. gedachten) Momentandrehaxe der Kugel gelegt werden, vollzieht, also ohne Gleiten der Rollenkante auf der Kugeloberfläche. Die Uebergänge bei wechselnder Funktion vollziehen sich somit in Spirallinien auf der Kugeloberfläche, was erlaubt, die Kugel gegen Antrieb» und Integrierrolle stark anzupressen. Der Kugelintegrator ist daher in der Lage, an der Welle der Integrierrolle ein viel stärkeres Drehmoment auszuüben und eventuell weitere Operationen zu verrichten; darin liegt gerade die Ueberlegenheit des Kugelsintegrators gegenüber den übrigen Rotationsintegratoren, die knapp ims stande sind, die Integrierrolle samt ihrem Zähler anzutreiben.

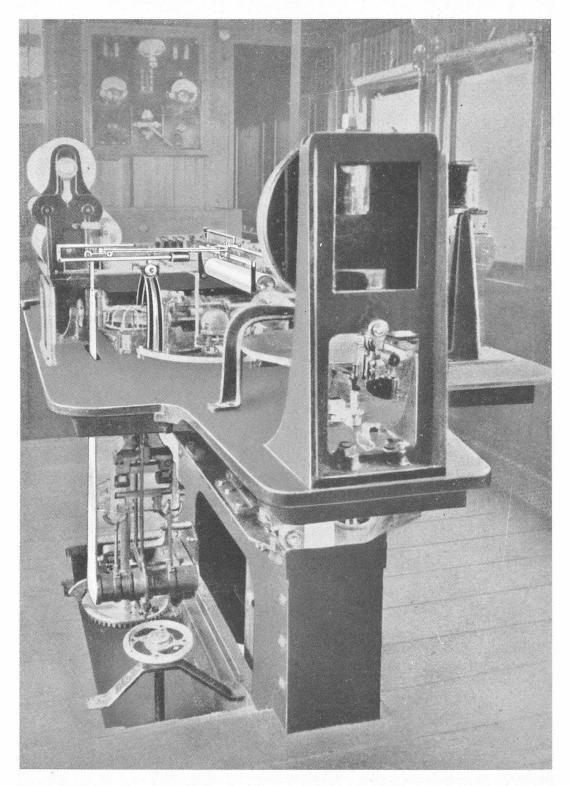


Abb. 6. Abdank-Abakanovicz-Schraubenlinienintegrator, Konstruktion A. Amsler, am Apparatentisch eines Dynamometerwagens (Italienische Staatsbahnen).

 $\frac{y}{\text{Konst.}}=\text{prop.}$ der zu integrierenden Funktion y macht. 15) Grundorgan des Integrators ist ein scharfkantiges, unter α geneigtes Schneidenrad, das

¹⁵⁾ Siehe Fußnotiz 7).

sich dank seiner Schärfe leicht in die Unterlage (Grundzylinder) eindrückt und dadurch das maßgebende Stück des veränderlichen Schraubenganges definiert.

Abb. 6 zeigt eine selbständige konstruktive Gestaltung des Abdank'schen Integrators durch Alfred Amsler, ebenfalls für Verwendung auf seinen Eisenbahndynamometerwagen, siehe 1c) ante. Die mittels Accelerometerpendels abgetastete Beschleunigungs= und Gefällskraft P wird durch Tangentenmechanismus in ein proportionales tg α umgewandelt. Das scharfkantige Schneidenrad ist in dem auf Schienen geradlinig geführten Integralwagen drehbar gelagert und erhält mittels Gelenkparallelogrammes eine jederzeit der Neigung a des Tangentenhebels parallele Richtung. Unter dem Schneidenrad dreht sich eine der Fahrstrecke dx proportional angetriebene, mit der Geradführung parallele Metallwalze, gegen welche die Radkante mit Druck angepreßt ist (Antrieb vom Eisenbahnrad aus unter dem Apparatentisch ersichtlich). Der Schraubungs= weg des Integralwagens auf der Walzenoberfläche in Führungsrichtung, $J = \int \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = \operatorname{prop.} \int P \cdot dx$ wird durch Stoß stange auf den mitbewegten Schreibstift übertragen und von diesem auf ablaufendem Papierband (im Hintergrund) als Integralkurve aufgezeichnet.

Die Abb. 6 bezieht sich auf den Dynamometerwagen der Italienischen Staatsbahnen (1906). 16)

3. Das Jakob Amsler'sche Polarplanimeter und seine Erweiterungen.

a) Das übliche Polarplanimeter und Abarten.

Alles Wünschenswerte über das Polarplanimeter und seine Erweiterungen als Momentenplanimeter ist enthalten in der inhaltsreichen, geschichtlich gewordenen Originalabhandlung Jakob Amsler's "Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheits» momente ebener Figuren", Schaffhausen 1856, Verlag A. Beck & Sohn. Außerdem ist das Polarplanimeter bis in die allerjüngste Zeit hinein Gegenstand zahlreicher Abhandlungen gewesen, welche sein Wesen unter allen möglichen mathematischen Gescichtspunkten darlegen.

¹⁶) Rivista Tecnica delle Ferrovie Italiane, Doppelnummer 15. 9. / 15. 10. 1923, Seiten 110—114.

Es ist nicht beabsichtigt, an dieser Stelle nochmals die Theorie des Polarplanimeters zur Sprache zu bringen, was eine bloße Wiederholung wäre. Dagegen soll versucht werden, in möglichst anschaulicher Weise und unter absichtlichem Verzicht auf die mathematische Strenge den Kernpunkt dieser Erfindung zur Geltung zu bringen. ¹⁷)

Den bisher genannten Integratoren-Systemen liegen carte sische Koordinaten zu Grunde. 18) Ihr Flächenelement ist das schmale Rechteck von Basis dx und Höhe y. Dem Polarplanimeter hingegen liegen Polarkoordinaten zu Grunde; sein Flächenelement ist das unendlich spitze Dreieck von Basis $r \cdot d \varphi$ und Seitenlänge r. In der Tat kann eine beliebig geformte Fläche, selbst eine auf cartesische Koordinaten x, y bezogene, als das über ihre Kontur genommene Linienintegral von aus irgend einem festen Pol (außerhalb oder innerhalb der

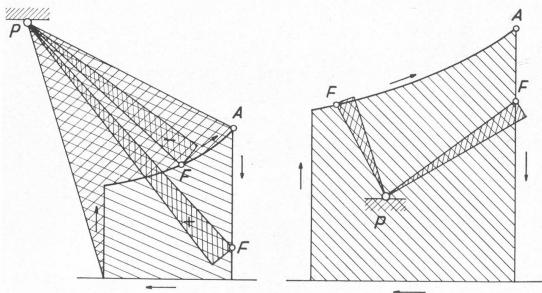


Abb. 7. Polarplanimeter, Prinzip der Flächenbestreichung, Pol außen.

Abb. 8. Polarplanimeter, Prinzip der Flächenbestreichung, Pol innen.

Fläche) ausgehenden Elementardreiecken aufgefaßt werden. (Abb. 7 und 8.) Für außenliegenden Pol fallen bei Rückkehr zum Ausgangspunkt eine Anzahl Elementardreiecke negativ aus (Abb. 7), für innenliegenden Pol sind sie sämtliche positiv (Abb. 8). Es kommt also unter allen Umständen immer die reine eingeschlossene Fläche heraus.

¹⁷⁾ Die nachfolgenden Darlegungen dürften zum Teil neuartig sein.
18) Vergl. z. B. Abb. 4 auf Seite 218 des Kugelkalottenintegrators am Bayer-Dampfmesser, bei welchem die Funktion y (sekundliche Dampfmenge) in orthogonalen Koordinaten direkt unterhalb des Integrators fortlaufend aufgezeichnet wird.

Bei den vorangehenden Planimetern ist das mathematische Gebilde, welches eine Integration ermöglicht, die Kreislinie, bezw. die Schraubenlinie; beim Amsler'schen Polarplanismeter ist es das ebene Dreieck. Dadurch ist seine ganze Mathematik bestimmt.

Materiell ist das Polarplanimeter durch nur 2 Seiten des Dreiecks, also durch einen Kniehebel, verwirklicht. Ein Ende des Kniehebels ist im festen Pol P drehbar eingehängt, das andere Ende trägt den Fahrstift F. Die mit ihrer Schneide auf der Unterlage ruhende Integrierrolle ist im Gelenk G senkrecht zum Fahrarm GF gelagert. 19) Die dritte Seite PF des Dreiecks ist eine rein geometrische, d. h. gedachte Linie; sie liefert die versänderliche Seitenlänge r des Elementardreieckes $\frac{1}{2} \cdot r \,\mathrm{d}\varphi \cdot r$.

Es sollen die Vorgänge zunächst rein geometrisch bestrachtet werden:

Der Kniehebel werde (Abb. 9) in zwei um d φ gegeneinander

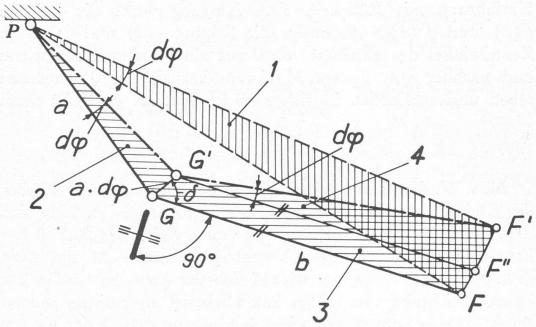


Abb. 9. Polarplanimeter, geometrische Begründung der Arbeitsweise.

geschwenkten Lagen gezeichnet; die während der Elementars Schwenkung dø bestrichenen Flächen sind durch Schraffur

¹⁹) In Wirklichkeit ist aus konstruktiven Gründen die Integrierrolle nicht mit dem Gelenk zusammenfallend, sondern seitlich in Fahrarmrichtung gegen ersteres verschoben. Dadurch entsteht prinzipiell nichts Neues, wosgegen die Darstellung komplizierter wird. Deshalb ist hier der Anschaulichskeit halber die Integrierrolle immer mit dem Gelenk zusammenfallend ansgenommen.

hervorgehoben. Außerdem werde das vom Fahrarm GF bestrichene ungleichmäßige Elementars Vierseit GG'F'F durch eine Parallele G'F" zu GF in ein kleines Parallelogramm GG'F"F und in ein kleines Dreieck F'G'F" zerlegt. Die verschiedenen, durch andere Schraffur gekennzeichneten Teilflächen seien mit Zahlen 1, 2, 3, 4 bezeichnet.

Wegen des Prinzips der Kontinuität müssen die bei der Schwenkung d φ in Front vom Amsler'schen Dreieck PGF bestrichenen Flächen den hinter dem Dreieck verlassenen Flächen inhaltsgleich sein, also:

$$(1) = (2) + (3) + (4)$$

Ueber eine geschlossene Figurenkontur K integriert, gibt:

$$\int (1) = \int (2) + \int (3) + \int (4)$$

Liegt der Pol außerhalb der Flächenkontur, so werden bei Umfahrung mit Rückkehr zum Ausgangspunkt die Beiträge $\int (2)$ und $\int (4) = 0$, indem die Sektoren (2) und (4) ihren Zentriwinkel d φ zunächst von 0 auf ein Maximum anwachsen und nachher von diesem Maximum zurück auf 0 abnehmen sehen und schließlich in sich zurückfallen. Es verbleibt somit

$$\int (1) = \int (3).$$

M. a. W. die planimetrierte Fläche ist der Summe der Flächen der Elementarparallelogramme GG'F''F inhaltsgleich. Nun sind die Inhalte der Elementarparallelogramme gleich der Basis GF = Fahrarmlänge b mal der Elementarhöhe senkrecht zur Basis, d. h. mal der Strecke, um welche sich der Fahrarm parallel zur eigenen Richtung verschoben hat. Diese ist aber nichts anderes als die Strecke, um welche die Integrierrolle sich in der eigenen Ebene auf dem Papier abgerollt hat, da die Rolle zum Fahrarm senkrecht steht. 20) Es gilt also der Satz:

Der Inhalt der planimetrierten Gesamtfläche ist gleich dem Produkt aus Fahrarmlänge und Abrollweg der Integrierrolle,

 $^{^{20})}$ Die mit der Entstehung des Sektors F''G'F' verknüpfte Schwenkung der Integrierrolle vom Betrag d σ liefert keine Abwicklung der Rolle, da die Schwenkung senkrecht zur Rollenschneide erfolgt.

oder: gleich dem Produkt aus Fahrarmlänge und Summe der Projektionen des Gelenkweges GG' nach der Kante der Integrierrolle.

Mathematisch ausgedrückt:

$$(1) F = b \int a d\varphi \cdot \sin \delta$$

Diese Gleichung beherrscht die ganze Theorie des Polarsplanimeters und seiner Erweiterungen.

Liegt dagegen der Pol P im Innern der umfahrenen Fläche, so verschwinden jetzt bei Rückkehr zum Ausgangspunkt die Beiträge f (2) und f (4) nicht mehr, indem der Winkel d φ eine ganze Umdrehung 2 π vollzogen hat, die Sektoren PGG' und f''G'F' je zu einem ganzen Kreis geworden sind. Die Schlußgleichung lautet dann:

(1')
$$F = \int (2) + \int (4) + \int (3)$$
$$= \pi \cdot a^2 + \pi \cdot b^2 + b \int a \, d\varphi \cdot \sin \delta$$

Zur Meßrollenabwicklung kommt also in diesem Falle die Integrationskonstante π ($a^2 + b^2$) hinzu.

Der Umstand, daß das mathematische Urgebilde des Amslersschen Polarplanimeters das ebene Dreieck ist, legt nahe, dasselbe entsprechend der Natur des Dreiecks, d. h. trigonosmetrisch, zu behandeln.

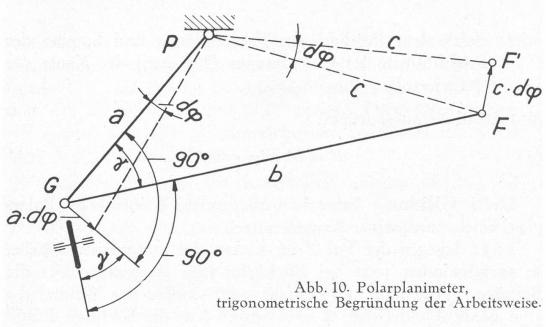
Seien (Abb. 10) a, b, c die Dreieckseiten, γ der c entgegensgesetzte Winkel a, b, so hat das bestrichene Polardreieck PFF den Inhalt: $dF = \frac{1}{2} \cdot c \ d\varphi \cdot c$. Also ist der Flächeninhalt der umfahrenen Fläche

$$F = \int_{\varphi} \frac{1}{2} c^2 \cdot \mathrm{d}\,\varphi$$

Nun wenden wir auf das Dreieck a, b, c den Cosinussatz der ebenen Trigonometrie für die Seite c an:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

In vorstehende Formel eingesetzt und zwischen den der Umsfahrung entsprechenden Grenzen φ_0 und φ_1 integriert gibt:



$$F = \int_{\varphi} \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma) d\varphi$$
$$= \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi - b \int_{\varphi} ad\varphi \cdot \cos \gamma$$

Bei Rückkehr zum Ausgangspunkt sind die beiden Grenzen φ_0 und φ_1 entweder einander gleich (Pol außerhalb der Figur, Abb. 7) oder φ_0 und $\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi$ (Pol innerhalb der Figur, Abb. 8). Das erste rechtsseitige Integral ist also je nachdem entzweder = 0, oder = $\frac{1}{2}$ ($a^2 + b^2$) $\cdot 2\pi = \pi (a^2 + b^2)$ und es gilt:

(2)
$$F = {0 \atop \text{oder } \pi \left(a^2 + b^2\right)} - b \int_{\emptyset} a d\varphi \cdot \cos \gamma$$

Man beachte (Abb. 10), daß der Betrag $ad\varphi \cdot \cos \gamma$ die in die Schneide der Integrierrolle fallende Komponente des Eles mentarweges GG' des Gelenkes ist. Uebrigens sind die Winkel γ und δ der Figuren 10 und 9 zueinander um 90° verschoben, also $-\cos \gamma = \sin \delta$, so daß die beiden einmal rein geos metrisch, einmal rein trigonometrisch gewonnenen Schlußsformeln (1), (1') und (2), (2') miteinander identisch sind.

Bei den beiden Darstellungsarten drängt sich von selber die merkwürdige Integrationskonstante π ($a^2 + b^2$) auf. Sie scheint also in der Wirkungsweise des Polarplanimeters eine eigentümzliche Rolle zu spielen. In der Tat stellt sie den Inhalt eines Kreises mit Radius $\sqrt{a^2 + b^2} = c_0$ dar und dieser Kreis hat eine besondere Bedeutung:

Es ist der Kreis, auf welchem der Fahrarm *GF* senkrecht zum Polarm *PG* steht, also auf welchem die Integrierrolle nach *P* gerichtet bleibt, und gar keine Abwicklung erfährt. Abb. 11. Dieser Kreis ist der natürliche "Nullkreis" des Planimeters, und es lohnt sich die Mühe, die Mathematik des Polarplanimeters noch auf eine dritte Art, im

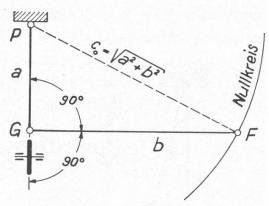


Abb. 11. Polarplanimeter, Entstehung des Nullkreises.

Lichte dieses Kreises zu betrachten, denn ganz abgesehen vom Interesse, bildet die dritte Betrachtungsweise, die sogen. Null=kreistheorie des Polarplanimeters, den naturgemäßen Ueber=gang vom Polarplanimeter zu seiner sehr wichtigen Abart, dem weiter unten angeführten Amsler'schen Linearplanimeter.

Der Nullkreis werde (Abb. 12) als krummlinige Abszissensachse angesehen, auf welche die zu planimetrierende Kontur K bezogen ist. Von den innerhalb des Nullkreises gelegenen Teilen der Elementardreiecke PFF werde nunmehr abgesehen. Elemenstarflächen sind nach Abzug der inneren Dreiecke $\frac{1}{2} \cdot c_0 \, \mathrm{d} \varphi \cdot c_0$ unendlich schmale Trapeze mit krummen Basen $AA'F_1'F_1$ (schräg schraffiert). Die Gesamtumfahrung der Flächenkontur ist äquisvalent mit der Resultierenden von Einzelumfahrungen der Elesmentartrapeze $AA'F_1'F_1$ im Sinne der Pfeile.

Zu einer flächenäquivalenten Einzelumfahrung gelangt man auf folgende Art: verzerrungslose Schwenkung d φ des rechtwinkligen Nullkreisdefinitionsdreieckes (a, b, c_0) längs des Nullkreisbogens F_0F_0 ; Verzerrung des Nullkreisdefinitionsdreieckes um den Winkel δ zum allgemeinen (stumpfen) Dreieck $(a, b, c > c_0)$, dabei Beschreibung des Kreisbogens F_0F_1 mit Radius b; verzerrungslose Zurückschwenkung des allgemeinen (stumpfen) Dreiecks auf konzentrischem Kreisbogen F_1F_1 ; Wiederentzerrung des allgemeinen Dreiecks zum Nulledreieckentlang dem Kreisbogen F_1F_0 .

Die neue Elementarfläche ist jetzt ein allseitig krummliniges Trapez; die Aequivalenz des neuen Trapezes $F_0F_0'F_1'F_1$ mit dem symmetrischen ersten Trapez $A_0A'F_1'F_1$ ergibt sich aus der Gleichheit je der beiden Basen und der Höhen, für beide $= c - c_0$.

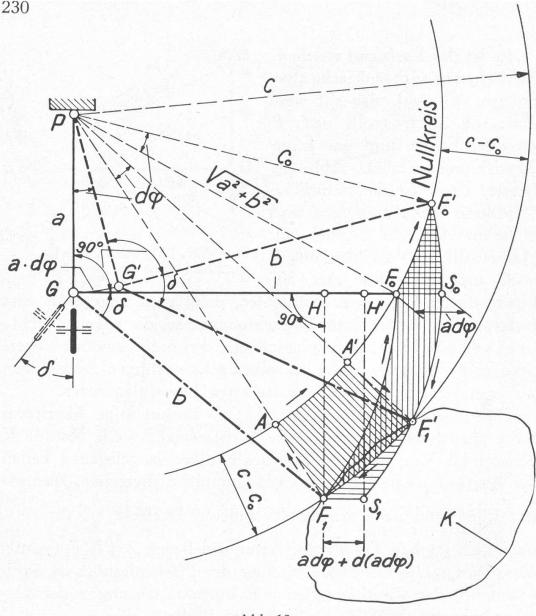


Abb. 12. Polarplanimeter, auf dem Nullkreis beruhende Begründung der Arbeitsweise.

Durch die Parallelen F_0S_0 und $F_1S_1//GF_0$ verwandle man schließlich das allseitig krummlinige zweite Trapez in das äquivalente dritte $F_0S_0S_1F_1$ mit zwei geraden Basen 21). Die mittlere Breite desselben $\frac{F_0S_0 + F_1S_1}{2}$ ist bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung $\cong HH' \cong GG' = \operatorname{ad} \varphi$. Der Inhalt der Elementarfläche über der krummen Abszissenaxe ist also $HH' \cdot F_1H = \operatorname{ad} \varphi \cdot b \sin \delta.$

 $^{^{21}}$) Die Aequivalenz der beiden letzten Trapeze folgt aus der Flächensgleichheit der kleinen, horizontal schraffierten Dreiecke F_0F_0 'S und F_1F_1 'S₁. Auf den strengen Beweis sei hier nicht eingegangen; die Gleichheit ist aber einleuchtend, sobald der < δ sehr klein wird, denn es sind dann die kleinen Dreiecke zwischen eng beieinanderliegenden Parallelkreisbogen und Sekanton gleicher Sekräge ein geschlassen. Sekanten gleicher Schräge eingeschlossen.

Auch diese dritte, rein planimetrische, auf den Nullkreis fußende Betrachtung führt also für die außenliegenden Flächenkonturen K auf den gleichen Ausdruck $b \int a d\varphi \cdot \sin \delta$ wie die Gleichungen (1) und (2) der geometrischen und der tri= gonometrischen Dreieck=Theorie 22). Sie bringt aber ein neues Dreieck, das Projektionsdreieck GF1H nach der Gelenkkreis= tangente zum Vorschein, welches die Funktion des Linear= planimeters und seiner Erweiterungen, der Momentenplanimeter, beherrscht.

Im Museum Allerheiligen sind ausgestellt:

Eines der ersten J. Amsler = Polarplanimeter mit ver= stellbarer Fahrarmlänge für verschiedene Figurenmaßstäbe, ent= sprechend einem wählbaren b in den Formeln (1), (1') und (2), (2') ante. 23) Abb. 13.

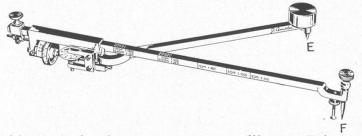


Abb. 13. Polarplanimeter mit verstellbarem Fahrarm.

Eines der ersten J. Amsler'schen, kleinen Polarplani= meter mit unveränderlicher Fahrarmlänge (nur 1 Maßstab). Abb. 14.

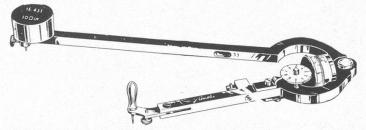


Abb. 14. Polarplanimeter mit unverstellbarem Fahrarm.

Eines der ersten J. Amsler = Polarplanimeter Auswertung von Dampfmaschinen=Indikator= diagrammen. Die 2 Stahlspitzen erlauben die Länge des Fahrarms b (Gleichungen (1) und (2)) auf die Diagrammlänge

des Vereins schweiz. Gymnasiallehrer, 1942, gegebenen.

23) Das älteste heute auf der Welt existierende J. Amsler'sche Polarsplanimeter befindet sich im Deutschen Museum in München.

²²) In dieser letzten Form ist die Funktionserklärung des Polarplanismeters eng verwandt mit der von Prof. H. Stohler, Basel, im 69. Jahrbuch

so einzustellen, daß die mittlere Diagrammhöhe direkt an der Rolle abgelesen werden kann. Abb. 15.

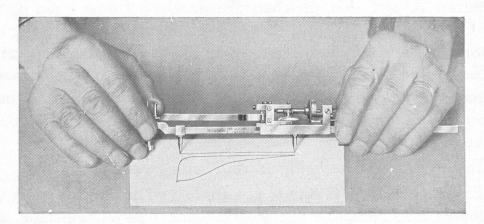


Abb. 15. Polarplanimeter mit Spitzen zur Auswertung von Dampfmaschinen-Indikatordiagrammen.

Die erste unmittelbarste Abart des Polarplanimeters ist eine solche, bei welcher der Fahrstift eine in ihrer Größe für die Auswertung ungeeignete Figur nicht selber umfährt, sondern die vermittelst Umzeichnungsmechanismus ins Große oder ins Kleine übersetzte Figur, nämlich:

Uebersetzung ins Große: Pantographisches Planimeter zur Aussmessung von sehr kleinen Flächen (z. B. in Katasterplänen) mit großer Genauigkeit; der Vergrößerungspanstograph betätigt das eigentliche Planimeter. Abb. 16. Photographie im Museum.

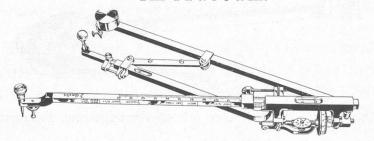


Abb. 16. Pantographenplanimeter.

Uebersetzung ins Kleine: Lederplanimeter zum Ausmessen von Tierhäuten, Fellen; Kombination vom Polarplanimeter mit Nürnberger Schere, welche als Verkleinerungspantograph das (einen Teil der Schere bildende) Planimeter betätigt. Abb. 17. Photographie im Museum.

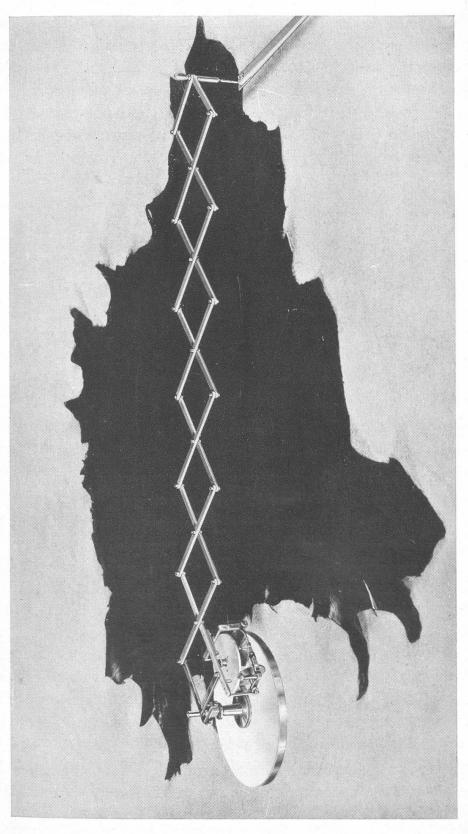


Abb. 17. Lederplanimeter.

Eine zweite Abart des Polarplanimeters nach einer andern Richtung hin ist diejenige, bei welcher, statt wie vorher die zu umfahrende Figur, jetzt der Abwicklungsweg der Integrierrolle vergrößert wird. Ein konisches Vollrad, dessen Rand beim Umfahren der Figur auf der Zeichnungsebene rollt, überträgt seine Rotation durch Zahnräder auf eine am Polarm drehbar angeordnete, papierüberzogene, waagrechte Scheibe. Die Integrierrolle, welche sich auf dieser Papierscheibe bewegt, ist am Ende eines im Gelenkpunkt senkrecht zum Fahrarm gerichteten Nebenarmes angebracht; ihre Ebene ist wie vorher nach dem

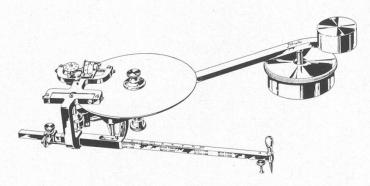


Abb. 18. Scheiben=Polarplanimeter.

Gelenkpunkt gerichtet (Abb. 18). Es ist also hier am Polarsplanimeter vom vorbekannten Wetlis-Gonella'schen Scheibensintegrator (Seite 213) Anwendung gemacht. Die Funktionsabhängigkeit des senkrechten Rollenabstandes vom Scheibenschehpunkt ist aber nicht einfach wie dort linear, sondern entspricht einem Sinusgesetz: die Konstruktion verwirklicht den sin δ der Formeln (1) und (1') auf Seite 227.

Oder anders ausgedrückt: Es kommt der Lehrsatz, daß der Inhalt der planimetrierten Gesamtfläche gleich dem Produkt aus Fahrarmlänge × Summe der Projektionen des Gelenkweges nach der Integrierrolle ist, wieder zur Geltung, indem die Integrierrolle nur in der eigenen Richtung, d.h. senkrecht zum Fahrarm, parallel verschoben ist und tatsächlich wieder die Komponenten der übersetzten Gelenkwege nach ihrer Schneide abtastet. ²⁴) Photographie im Museum.

Die dritte Abart des Polarplanimeters ist schließlich die, bei welcher die Polarmlänge $a=\infty$ gemacht, der Gelenkkreis

²⁴) Außer der Vergrößerung der Rollenablesung pro Flächeneinheit, wos durch eine größere Ablesegenauigkeit erzielt wird, hat die Verlegung des Gelenkweges auf eine rotierende Scheibe zur Folge, daß die Abwicklung der Integrierrolle vollkommen unabhängig vom Zustand und der Ebenheit der Zeichnungsfläche ist. Dies sind die 2 Vorteile des Polarplanimeters mit Scheibe gegenüber dem einfachen Instrument.

zum ∞

großen Kreis, d. h. zur Geraden = Abszissenaxe wird. Das Gelenk wird durch Wagen und Schiene der x

Axe entlang

geführt. Hier ist die Nullkreis

theorie des Polarplanimeters die nächstliegende. Denn in diesem Fall deckt sie sich mit der un

mittelbaren Funktionserklärung des Linearplanimeters, welche

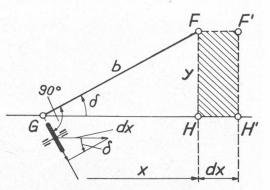


Abb. 19. Linearplanimeter, Begründung der Arbeitsweise.

höchst elementar ist. Ist nämlich $y = b \sin \delta$ die Ordinate, $F = \int y \cdot dx = \int b \sin \delta \cdot dx$ (Abb. 19) der Flächeninhalt der umfahrenen Kontur, so leuchtet es sofort ein, daß $dx \cdot \sin \delta$ die in die Richtung der Kante der Integrierrolle fallende Komposnente der Fahrarmtranslation dx, also $\int dx \cdot \sin \delta$ die Rollensabwicklung ist.

Abb. 20 stellt das gewöhnliche Linearplanimeter dar, speziell für langgestreckte Diagrammstreifen geeignet — Photographie im Museum, — Abb. 21 dasselbe Planimeter mit

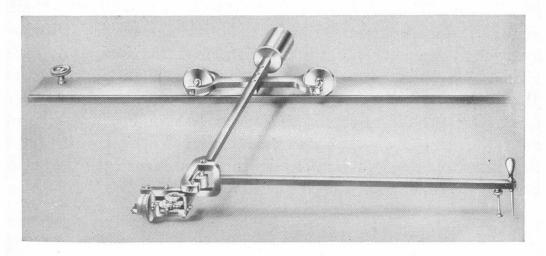


Abb. 20. Einfaches Linearplanimeter.

dx=angetriebener rotierender Scheibe (Scheibenlinearplanimeter), das Aequivalent des Scheibenpolarplanimeters. Photographie im Museum.

Das Linearplanimeter ist eine rein konstruktive Abart des Polarplanimeters, stellt also gegenüber diesem gedanklich nichts Neues dar, ist aber als Uebergangsglied zwischen dem Polarplanimeter und den nachfolgenden Momentenintegratoren von prinzipieller Bedeutung.

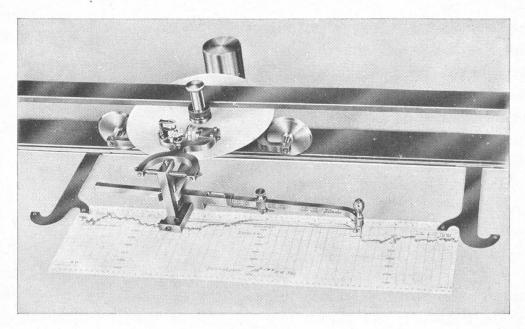


Abb. 21. Scheiben=Linearplanimeter.

b) Die Amsler'schen Momenten=Planimeter, eine Erweiterung des Linearplanimeters.

Unter 3a) ist darauf hingewiesen worden, daß das Polars planimeter einen trigonometrischen Hintergrund besitzt. Dank der fast unbegrenzten Transformationsfähigkeit der trigonometrischen Formeln für sin und cos von Summen und Vielsfachen von Winkeln erwächst daraus die Möglichkeit, welche Jakob Amsler sofort erkannt und angewandt hat, das Linearsplanimeter auf die mechanische Auswertung von Potenzintegralen zu erweitern. Der trigonometrische y=Ausdruck $y = b \sin \delta$ des Linearplanimeters im Verein mit den bekannten Formeln für die Potenzen der sinus=Funktion:

$$\sin^2 \delta = \frac{-\cos 2\delta + 1}{2}$$

$$\sin^3 \delta = \frac{-\sin 3\delta + 3\sin \delta}{4}$$

$$\sin^4 \delta = \frac{+\cos 4\delta - 4\cos 2\delta + 3}{8}$$

erlaubt die in der Technik wiederholt vorkommenden höheren Flächenmomente 25):

²⁵) Das Moment 4. Ordnung kommt vor: bei Aufgaben der Schiffsstabilität, siehe F. Redtenbacher, Der Maschinenbau, Mannheim, Friedr. Bassermann, Verlag, 1865, Bd. III, S. 145—148; bei Aufgaben der Dynamik des rotierenden Körpers und der Ballistik, so z. B. bei der konischen Pendes

Statisches Moment
$$M = \int \frac{1}{2} y^2 \cdot dx = \int \frac{b^2}{2} \sin^2 \delta \cdot dx$$

(4) Trägheitsmoment $J = \int \frac{1}{3} y^3 \cdot dx = \int \frac{b^3}{3} \sin^3 \delta \cdot dx$
Moment 4. Ordnung $P = \int \frac{1}{4} y^4 \cdot dx = \int \frac{b^4}{4} \sin^4 \delta \cdot dx$

mittels eines Linear Mehrfachplanimeters zu bestimmen, dessen verschiedene Integrierrollen durch Zahnräder mit den Uebers setzungen 1:1, 1:2, ... usw. bis 1:4, um das 1, 2, ... bis 4-fache des Fahrarmwinkels gegenüber der Ausgangsrichtung gedreht werden. Die Ablesungen an den Meßrollen sind entsprechend den in $1 \cdot \delta$, $2 \cdot \delta$... bis $4 \cdot \delta$ mehrgliedrigen trigonometrischen Formeln für $\sin^2 \delta$ etc. bis $\sin^4 \delta$ nach Koeffizient und Vorzeichen passend in mehrgliedrige Sammelausdrücke einzusetzen. Darin besteht der vielverbreitete Jakob Amsler'sche Momentensintegrator, dessen Theorie und Beschreibung so bekannt ist, daß sie hier übergangen wird. 26)

Abb. 22 stellt den Amsler'schen Integrator für Momente bis zur 2. Ordnung (Fläche und Statisches Moment) dar. Interessant

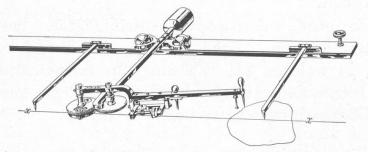


Abb. 22. Kleiner J. Amsler Integrator für Fläche und statisches Moment.

ist die Verzweifachung des Winkels δ durch ein Planetensgetriebe. Photographie im Museum.

Abb. 23 veranschaulicht den großen Amsler-Integrator für Momente bis zur 4. Ordnung mit Vervielfachung des Winkels δ bis zu 4:1 mittels Stirnräder mit örtlich fester Achse. (Instrument im Museum.) Beide Instrumente in neuzeitlicher Aus-

²⁶) Siehe z. B. Galle, Mathematische Instrumente, Seiten 118—121.

lung der Geschoße, siehe: Dubois, Bulletin Technique de la Suisse Romande, 27. Februar 1926, S. 53/55, Détermination du moment centrifuge d'une sur face au moyen de l'intégrateur; 23. Oktober 1926, S. 261/265, Détermination des moments d'inertie polaires d'un corps de révolution au moyen de l'intégrateur; Dubois, Schweizerische Monatsschrift für Offiziere aller Waffen, August 1943, Bestimmung der polaren Trägheitsmomente eines Geschosses mittels des Integrators.

führung entsprechend der Jakob Amsler'schen Originalkonstrukstion, nur in den Details von Alfred Amsler leicht verbessert.

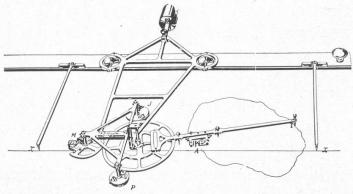


Abb. 23. Großer J. Amsler-Integrator für Momente bis zur 4. Ordnung.

Es ist der Vollständigkeit halber noch darauf hinzuweisen, daß Prof. Jakob Amsler in seiner berühmten Originalabhands lung vom Jahre 1856 die Verzweifachung, bezw. Verdreifachung des Winkels δ in Gleichungen (3) statt mit Zahnrädern mittels gleichseitiger Dreiecke (z. B. äußerer Spitzenwinkel = 2 × innerer Basiswinkel) angegeben hat. Diese Konstruktion ist in der Folge von andern Firmen als die Firma Amsler gelegentlich anges wendet worden.

Von dem großen Amsler-Momentenintegrator bestehen zwei hochinteressante, von Alfred Amsler stammende konstruktive Varianten, in welchen bei Wahrung des mathematischen Prinzips die Integration mittels der konstruktiven Elemente der Rotationsflächen-Integratoren versucht wurde.

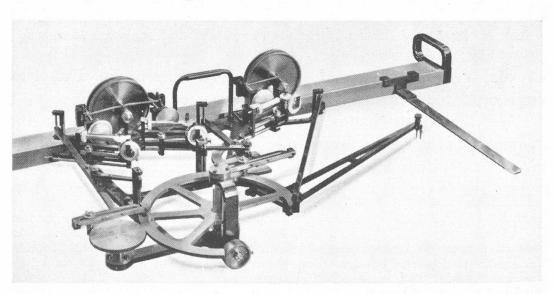


Abb. 24. A. Amsler-Integrator für Momente 1. bis 3. Ordnung mit Kugelkalotten-Integrationsvorrichtung.

Die eine im Jahre 1893 entstandene Variante ist in Abb. 24 ersichtlich. Sie macht Gebrauch von den Coradi'schen Kugel= kalotten-Integratoren. Das Instrument ist für die Momente bis zur 3. Ordnung, also Fläche, statisches Moment und Trägheits= moment, bestimmt. Für jede Ordnung n wird zunächst mittels Stirnräder der Winkel $n \delta$, $1 \cdot \delta$ am Fahrarm selbst, gebildet und für die 1. und 3. Ordnung sin $n \delta$, für die 2. Ordnung cos $n \delta$ mit Hilfe von Kurbelscheiben und Kurbelwarzen verwirklicht. Sin und cos werden mit Kurbelschleifen abgegriffen und durch Gelenkparallelogramme auf horizontale, um ihre Achse drehbare Integrierzylinder 27) übertragen, welche die senkrecht stehenden Kugelkalotten No. 1—3 entlang ihrem größten Horizontalkreise unter Federdruck berühren. Die Winkelabstände der Berührungspunkte von den Kalottendrehachsen sind somit für die 1. und 3. Ordnung arc sin (sin $n \delta$), für die 2. Ordnung arc sin (cos $n \delta$); die senkrechten Abstände der Berührungspunkte von den Kalottendrehachsen, m. a. W. die Rotationshalbmesser der Integrierzylinder=Mitnahme, sind sin $1 \cdot \delta$, sin $3 \cdot \delta$, bezw. cos $2 \cdot \delta$ proportional. Angetrieben sind die Kugelkalotten No. 1 (rechts), 2 (Mitte) und 3 (links) durch Ritzel, welche in den gezahnten Rand der Wagenlaufräder eingreifen, also proportional dx. Die Potenzintegration gemäß Gleichungen (3) und (4) ist also da= mit erreicht. Photographie im Museum.

Die andere, auf das Jahr 1892 zurückgehende Variante, Abb. 25, bezieht sich auf einen Momentenintegrator für rein ballistische Zwecke, also nur für die Momente 2. und 4. Ordnung. Die Potenzintegration gemäß Gleichungen (3) und (4) wird hier mittels Scheibenintegrators, also ähnlich wie beim einfachen Scheibenlinearplanimeter vollzogen. Die Winkel 2δ bezw. 4δ werden mittels Stirnräder 1:2, bezw. 1:4 gebildet, wovon das größere Ausgangsrad seine Bewegung δ mittels Gelenkparallelogrammes vom Fahrarm erhält. Die kleineren Zahnräder tragen die Integrierrollen für cos 2δ bezw. cos 4δ entsprechend der 1. und 3. der Gleichungen (3). In der Ausgangslage (δ = 0) des Fahrarms sind die Drehachsen der Integrierrollen nach dem Mittelpunkt der Drehscheibe, ihre Schneiden senkrecht zur Vergbindungslinie: Zentrum Drehscheibe - Zentrum Zahnräder 1:2

²⁷) Diese Zylinder stellen die Integrierrollen dar: sie sind nichts anderes als die beidseitig der Rollenebene über dieselbe hinaus verlängerte Rollens Mantelfläche, also eine rein konstruktive Maßnahme.

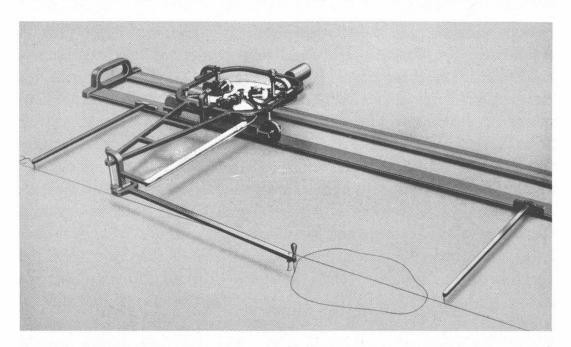


Abb. 25. A. Amsler-Integrator für Momente 2. und 4. Ordnung mit Sinus-Scheibenintegrationsvorrichtung.

und 1:4, gerichtet 28); dadurch entsteht die cos=Wirkung der 2. und 4. Gleichung (3). Die papierüberzogene Drehscheibe wird durch einen mit der Zahnung an der Kante des Führungslineals kämmenden Ritzel in Rotation versetzt. Photographie im Museum.

Die beiden zuletzt beschriebenen Integratoren von Alfred Amsler wurden nur ein einziges Mal ausgeführt. Sie stellen mathematisch beachtenswerte Konkurrenzlösungen zu der Oris ginalkonstruktion Jakob Amsler's dar, sind dafür aber auch verwickelter als diese. Das ist wohl der Grund dafür gewesen, daß Alfred Amsler diese Linie nicht weiter verfolgt und sich nur noch damit begnügt hat, die ursprüngliche Konstruktion seines Vaters zu verfeinern.

Die Parasitintegrale, welche in der ganzen Theorie des Polarplanimeters und seiner Abarten eine sekundare, aber für die exakte mathematische Bes handlung wichtige Rolle spielen, sind in diesem Aufsatz anschaulichkeitss halber unerwähnt geblieben. Siehe darüber u. a. Mitteilungen der Naturs forschenden Gesellschaft Schaffhausen, Jahrgang 1942/43, Dubois, Planis meter für gebrochene Potenzen, Seiten 263, 266 und 269.

²⁸) Die für die Integrierrollenabwicklung maßgebenden, senkrechten Abstände der Kanten der Integrierrollen vom Scheibenmittelpunkt sind $e_2=c\cos 2\delta-r$, resp. $e_4=c\cos 4\delta-r$, c= Abstände Mitte Drehsscheibe — Mitte Zahnräder 1:2, 1:4, r= Entfernung der Meßrollenkanten von Zahnrädermitten. Es entstehen also außer den nützlichen Integralen in cos $2\delta \cdot dx$ und cos $4\delta \cdot dx$ Parasitintegrale in $r \cdot dx$, welche bei Rücks kehr zum Anfangspunkt nach Konturumfahrung verschwinden.

Schließlich sei des mathematischen Zusammenhanges wegen an dieser Stelle auf die nach Angaben des Verfassers von der Firma Amsler ausgeführten Planimeter für gebrochene Potenzen hingewiesen. (Auswertung von Integralen $\int y^{\frac{n}{2}} \cdot dx = \int b^{\frac{n}{2}} \cdot \sin^{\frac{n}{2}} \delta \cdot dx$, n = ganzzahlig, vermittelst Linearplanimeters mit $1\frac{\delta}{2}$... bis $n\frac{\delta}{2}$ ausschlagenden Integrierrollen = Analogon des J. Amsler'schen Momentenplanimeters.) Siehe Mitteilungen der Naturforschens den Gesellschaft Schaffhausen, Jahrg. 1942/1943 (Fußnotiz 28).

c) Das stereographische Planimeter von Alfred Amsler.

Durchaus in der Linie der Erweiterungen des Polarplanimeters liegt das stereographische Planimeter von Alfred Amsler. Dieses in einem einzigen Exemplar konstruierte, hochinteressante Instrusment dient dazu, aus einer Erdkarte in stereographischer Prosjektion Länderflächen trotz der Kartenverzerrung in ihrer wahren Größe auf der Erdkugel zu planimetrieren.

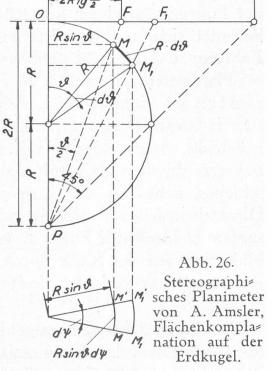
Bei der stereographischen Kartenprojektion werden die Punkte der nördlichen Halbkugel vom Südpol auf eine durch den Nordz pol gelegte Tangentialebene, die Punkte der südlichen Halbz

kugel vom Nordpol auf eine durch den Südpol gelegte Tansgentialebene konisch projiziert. Diese Projektionsart gewährt eine lokal winkeltreue Projektion, d. h. die elementaren Länderteile sind ihrer stereographischen Projektion ähnlich, das gegen verändert sich das Aehnslichkeitsverhältnis und mit ihm der Kartenmaßstab von Punkt zu Punkt 29).

Der Inhalt eines kleinen Flä= chenelementes auf der Kugel= oberfläche ist, Abb. 26,

$$ddF = R \sin \theta \ d\psi \cdot R d\theta$$

$$(R = \text{Erdradius}, \quad \theta = \text{vom}$$



²⁹) Im Gegensatz zu der ebenfalls viel verwendeten Lambert'schen Projektion, welche genau flächentreu, dafür aber nicht winkeltreu ist.

Nordpol aus gemessene geographische Breite, $\psi =$ geographische Länge) und somit der Inhalt eines ganzen Landes:

$$F = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \int_{0}^{\psi} R \sin \vartheta \, d\psi \cdot R d\vartheta = R^2 \cos \vartheta_0 \int_{\varphi} d\psi - R^2 \int_{\varphi} \cos \vartheta \, d\psi$$

Bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt nach Beschreibung der ganzen Landeskontur, ohne Umfahrung des Pols, ist $\int\limits_{\emptyset} \mathrm{d}\psi = 0$ und daher:

$$(5) \qquad F = -R^2 \int_{\phi} \cos \theta \, d\psi$$

Um die nach $\cos\vartheta\,\mathrm{d}\psi$ verlaufenden wahren Flächenelemente zu planimetrieren, muß also das Spezialplanimeter aus den nach 2 R tg $\frac{\vartheta}{2}$ verlaufenden Radiusvektoren der stereographischen Karte den Breitenwinkel ϑ zurückkonstruieren.

Das stereographische Planimeter von Alfred Amsler (Abb. 27) besteht aus einer im Zentrum O der Halbkugelkarte (Fußpunkt des zur Projektionsebene senkrechten Erddurchmessers) drehbar eingehängten radialen Führung. In dieser Führung gleitet der stets nach dem Kartenzentrum gerichtete Fahrarm OF. Hinter der Führung, in einem konstruktiv bedingten Abstand OE = a. befindet sich, mit der Führung ein Ganzes bildend, eine zur Führung senkrechte, ausziehbare Grundschiene ES, deren Länge = Planimeterbasis auf 2 R im Maßstab des Karten= zentrums eingestellt ist. Am unteren Endpunkt S desselben ist mit Scharnier eine geradlinige, drehbare Direktrixschiene DS angelenkt, deren äußerer Teil sich in einer orientierbaren, vom Fahrarm durch Zapfen mitgenommenen, kleinen Hülse frei verschieben kann. In der Ausgangslage des Planimeters würden Direktrixschiene DS und Grundschiene ES sich decken (Hülsenzapfen D ideell mit Punkt E zusammenfallend). Das ganze Ges bilde liegt auf der Karte durch Rollen, deren Achsen nach dem Kartenzentrum gerichtet sind; auf diesen kann es sich um O drehen.

Der zum Scharnier ausgebildete untere Endpunkt der Diz rektrixschiene trägt einen mit dem Scharnier konzentrischen Zahnsektor, welcher sich mit einem kleineren, die Integrierrolle tragenden Zahnrad mit Uebersetzung 1:2 ins Schnelle verzahnt.

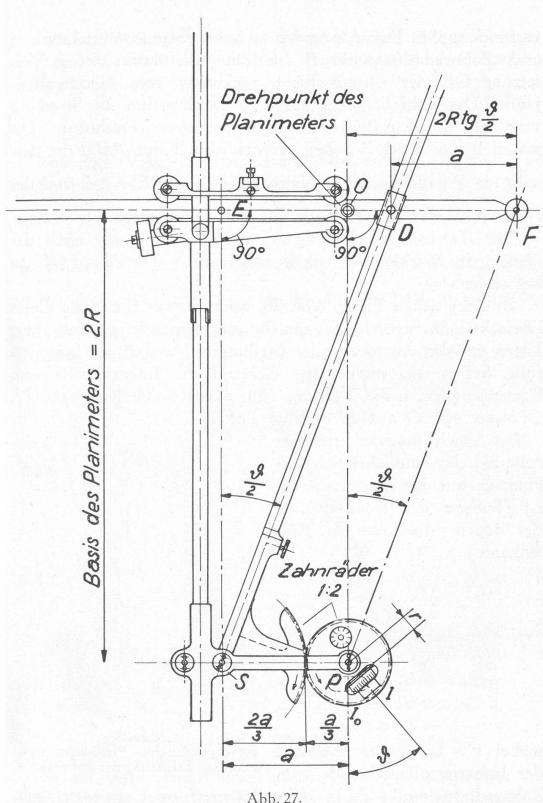


Abb. 27. Stereographisches Planimeter von A. Amsler, Skizze und Bezeichnungen.

Die Integrierrolle hat cos=Stellung (wie die Rollen 2. und 4. Ord= nung des großen Momentenintegrators), d. h. ihre Achse geht durch das Zentrum P ihres Zahnrades hindurch und in der Ausgangslage ist die Rollenschneide parallel zu der Zentren= verbindung SP. Der Abstand a zwischen Segmentmittelpunkt S und Zahnradmittelpunkt P bestimmt die konstruktive S setzung S der Grundschiene rückwärts vom Kartenmittelpunkt. Der Fahrstift F ist auf dem Fahrarm um die S strecke av or der Direktrixhülse S nach auswärts verschoben. Die materiell nur durch S Seiten verwirklichte S seiten S besten S halb ein Parallelogramm, folglich S S S S und der

Drehwinkel der Integrierrolle von der Anfangslage aus $= \vartheta$.

Für die weitere Ueberlegung brauchen wir nur noch das ideelle, in Wirklichkeit nicht existierende Dreieck *POF* zu betrachten.

In einer neuen Figur, Abb. 28, zeichnen wir nochmals dieses Dreieck allein für sich, in 2 um d ψ gegeneinander geschwenkten Lagen mit den entsprechenden Stellungen I und I' der Integriers rolle. Sei ϱ der momentane Abstand der Integrierrolle vom Kartenzentrum, u die Neigung von ϱ gegen die Rollenaxe PI, OH das von O auf PI gefällte Lot.

Die Abwicklung der Integrier> rolle bei einer endlichen Schwen> kung ψ um das Kartenzentrum ist (Summe der Komponenten der Bögen ϱ d ψ nach der Rol> lenkante)

$$A = \int_{\mathcal{O}} \varrho \, d\psi \cdot \cos u$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiseck OHI folgt

$$\varrho \cos u = HI$$

$$= HP + PI$$

$$= 2R \cos \vartheta + r$$

Abb. 28.

wobei r = konstanter Abstand Stereographisches Planimeter von der Integrierrollenschneide vom A. Amsler, Erklärung der Arbeitsweise. Zahnradmittelpunkt P. In obige Integralformel eingesetzt, gibt

$$A = \int_{\emptyset} (2R\cos\theta + r) \,d\psi$$
$$= 2R \int_{\emptyset} \cos\theta \,d\psi + r \int_{\emptyset} d\psi$$

Bei Rückkehr zum Anfangspunkt nach geschlossener Umfahsrung einer Landeskontur fällt das Parasitintegral $\int\limits_{\varphi} d\psi$ heraus und es bleibt:

(6)
$$A = 2R \int_{\varphi} \cos \theta \, d\psi$$

Aus dem Vergleich der beiden Gleichungen (5) und (6) folgt schließlich (abgesehen vom Vorzeichen)

$$(7) F = \frac{R}{2} \cdot A$$

Mit andern Worten: die Abwicklung der Integrierrolle multi» pliziert mit dem Beiwert $\frac{R}{2}$ ergibt, im Maßstab des Karten» zentrums ausgedrückt, die wahre krumme Oberfläche des um» fahrenen Landes.

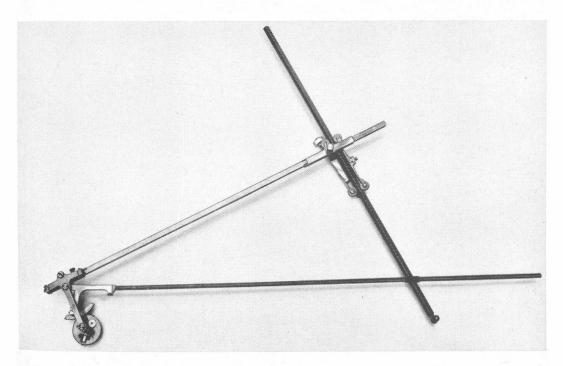


Abb. 29. Stereographisches Planimeter von A. Amsler.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Länge 2R, auf welche die Basis des Planimeters einzustellen ist, nichts anderes ist als der Radius eines Halbkugelkreises auf der Weltkarte. Siehe Abb. 26.

Das einzige ausgeführte Exemplar des stereographischen Planimeters von Alfred Amsler, Abb. 29, vielleicht sogar das einzige dieser Art auf der Welt, wurde nicht verkauft und fand

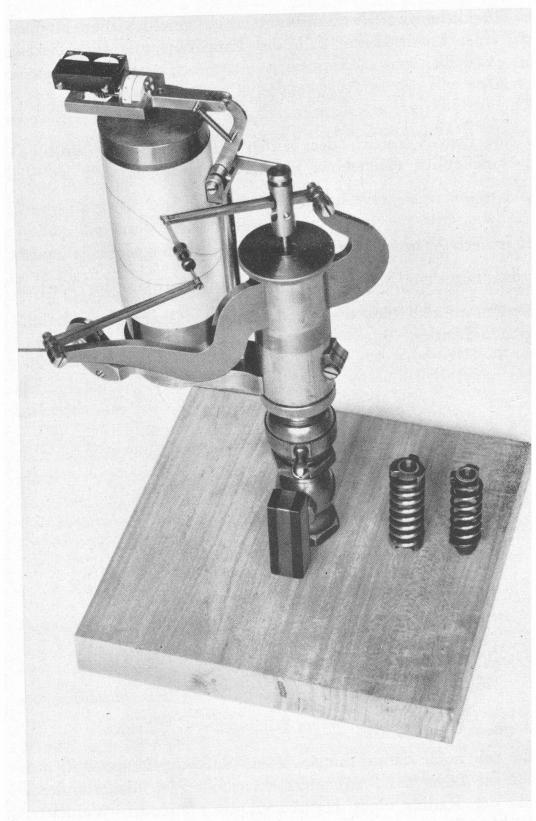


Abb. 30. Integrierender Dampfmaschinen-Indikator mit einfachem Scheibenintegrator.

sich beim Sammeln von Ausstellungsobjekten für das technologische Museum in der Dachkammer der Fabrik Amsler auf dem Ebnat vor. Es hat seinen würdigen Ruheplatz im Museum Allerheiligen gefunden.

4. Der integrierende Dampfmaschinen=Indikator.

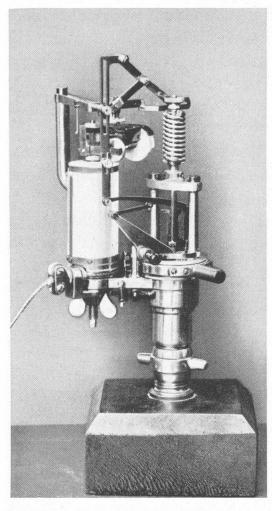
Als Abschluß des Kapitels über die Amsler'schen Integrationsapparate soll noch der integrierende Dampfmaschinens Indikator zur Sprache kommen.

Die Anbringung einer fortlaufenden Integriervorrichtung am Watt'schen Dampfmaschinen»Indikator ist eine altbekannte Sache, die auf alle Fälle aus der Zeit vor Jakob Amsler stammt. Es bestehen aber verschiedene Konstruktionen aus dem Hause Amsler, bei welchen für dieselbe Aufgabe verschiedene nicht» Amsler'sche und Amsler'sche Integrationsprinzipien zur Anwens dung kamen und deshalb interessant sind.

Abb. 30 stellt eine Ausführung an einem alten Indikator von Crosby mit Lemniskoïden Gradführung des Schreibstiftes dar; hier liegt der einfachste Scheibenintegrator von Wetli Gonella zu Grunde. Die Bewegung des Indikatorkolbens wird vom obersten Punkt der Kolbenstange abgenommen und mittels Winkelhebels proportional auf die entlang einem Radius der Indikatortrommel bewegte Integrierrolle (mit angebautem Zähler) übertragen. Die Stirnfläche der vom Dampfmaschinen Kreuz kopf aus durch Schnurlauf hin und hergedrehten Papiertrommel ist zur Integratorscheibe ausgebildet. Apparatim Museum.

Abb. 31 zeigt eine Konstruktion von Alfred Amsler aus dem Jahre 1914 an einem modernen Indikator von Rosenkranz. Hier wird wieder vom Scheibenintegrator Gebrauch gemacht, aber nicht mehr in der Wetli-Gonella'schen Form mit radial geführter Integrierrolle, sondern in der J. Amsler'schen Form mit nach einem Sinus-Gesetz über der Trommelstirnfläche geschwenkter Integrierrolle, genau wie beim Amsler'schen Scheibenpolar- und Scheibenlinearplanimeter, Abb. 18 und 21 ante.

Die dampfdruckproportionale Bewegung wird bei dieser Ausführung vom Schreibstift selbst abgenommen und mittels Ellipsenlenkers in einen verhältnisgleichen sin δ umgewandelt. Der Winkel wird mittels konischer Zahnräder 1:1 schließlich auf den Integrierrolle und Zählwerk tragenden Rahmen überstragen, welcher im Azimut um $\delta = \arcsin (Kte \times Dampfdruck)$





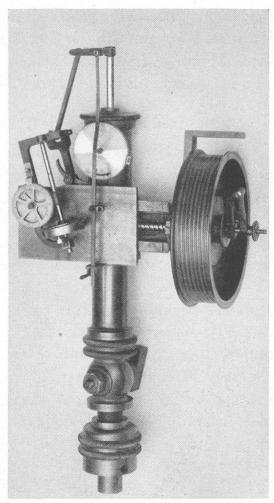


Abb. 32. Integrierender Dampfmaschinen«Indi» kator, Konstruktion von J. Amsler mit polarplanimeterähnlichem Integrator.

über der Trommelstirn gedreht wird. Die Nullage der Integriers rolle ist nach der Trommelachse hin gerichtet. Diese mit vershältnismäßig wenig Massenbewegung des Zählwerks verbundene, angulare Schwingung der Integrierrolle hat die in dynamischer Hinsicht nicht ganz einwandfreie Ableitung der Integratorsbewegung vom Schreibstift aus erträglich gemacht. Photos graphie im Museum.

Als letztes Glied des Gedankenganges veranschaulicht Abb. 32 einen von Jakob Amsler etwa 1885 in allen Teilen konstruierten Dampfmaschinen-Indikator mit Integriervorrichtung nach Polarplanimeter-Prinzip. Hinten ist der Indikatorzylinder mit innen-liegender Meßfeder, rechts der Schnurtrommelantrieb vom Dampfmaschinenkreuzkopf her. Statt der klassischen Registrier-

trommel wird eine rechteckige Platte mit aufgespanntem Papiers blatt durch Schraubenspindel von der Schnurtrommel in einer horizontalen Schlittenführung geradlinig hins und hergeschoben. Der Schreibstift wird direkt, d. h. ohne Amplifikation, vom oberen Endpunkt der Kolbenstange durch einen vertikalen Schreibarm auf und ab bewegt.

Ebenfalls vom oberen Endpunkt der Kolbenstange erfolgt der Antrieb des Polarplanimeters mit hinter der Registrierplatte befindlichem Pol, während das Kolbenstangenende den Fahrstift darstellt. Die Integrierrolle drückt gegen die bewegte Registrierplatte. Erwähnenswert ist die Merkwürdigkeit, daß hier die Integrierrolle nicht am eigentlichen Fahrarm, sondern am Polarm angebracht ist, was nur dem Umstand, daß Fahrarm und Polarm gleich lang sind und der ideelle Fahrstift auf einer festen, durch den Pol hindurchgehenden Geraden geführt wird, zu verdanken ist. Der Berührungspunkt der Integrierrolle mit der Registrierplatte fällt sogar genau mit dem Pol zusammen, so daß eine Bewegung des Dampfkolbens ohne gleichzeitige Hin und Herschwingung der Registrierplatte keine Abwicklung der Integrierrolle zur Folge hat. Das Instrument verhält sich als Integrimeter, d. h. zeigt jederzeit ohne Rückkehr zum Ausgangspunkt den wahren Wert des Integrals Apparat im Museum.

II. DERIVATIONSAPPARATE

Für die mechanische Bildung des Differentialquotienten besteht ein technisches Bedürfnis, vor allem für die Derivation nach der Zeit, in der Form von Geschwindigkeitsmessern (Geschwindigkeit = $\frac{d(Weg)}{d(Zeit)}$) oder Durchflußmengenmessern

(sekundliche Durchflußmenge =
$$\frac{d \text{ (totale Menge)}}{d \text{ (Zeit)}}$$
).

Differentialquotient $D=\frac{\mathrm{d}\,(}{\mathrm{d}x}$ und Integral $J=\int y\cdot\mathrm{d}x$ stehen in einem Umkehrungsverhältnis: es ist nämlich $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x}=y$. Damit ist die Möglichkeit gegeben, bei umgekehrter Anwendung eines Integrators den Differentialquotienten einer Funktion mechanisch zu ermitteln.

Das Arbeitsschema ist folgendes:

Beim Integrator geht man einerseits mit dem Differential dx andererseits mit der Funktion y in das Instrument hinein, kombiniert diese auf multiplikativem Wege und erhält als Ausgang an der Integrierrolle das Integral als Summe von Differentialen dJ.

Beim Derivator, umgekehrt, wird das Instrument auf einer Seite nach wie vor nach dx angetrieben; man geht an der (bisherigen Integrier=) Rolle mit einem dJ hinein und erhält aus der sich zwangsläufig daraus er= gebenden Stellung des Funktionsmechanismus den gesuchten Differential= quotienten y; denn diese Stellung muß eine solche sein, daß das Instrument, als Integrator rückwärts wirkend, jederzeit dem aufgedrückten dJ nach= kommt, und das ist nur dann der Fall, wenn $y = \frac{dJ}{dx}$ ist.

Dafür eignen sich allerdings nur die Rotationsflächen-Integratoren.

Schon vor oder während der Zeit Jakob Amsler's haben Geschwindigkeitsmesser als Umkehrung des einfachen Wetlis Gonella'schen Scheibenintegrators bestanden 30). Bei diesen wird die große Drehscheibe zeitlich konstant angetrieben. Die (bissherige Integriers) Rolle erhält von einer Welle einen Antrieb proportional der zu differenzierenden Bewegung (Weg). Sie sitzt aber nicht fest auf ihrer Welle, sondern in der Art einer Mutter auf einem auf der Welle geschnittenen Schraubensgewinde. Sie nimmt infolgedessen selbsttätig einen solchen radialen Abstand von Scheibenmitte ein, bei welchem die Rollenwälzung auf der Drehscheibe pro Zeitelement dt gleich ist dem ihr durch die Antriebswelle erteilten Peripherialweg; wäre dies nicht der Fall, so würde sich die fremd angetriebene Rolle als Schraubenmutter auf ihrem Gewinde hereins oder herausschrauben, bis Gleichgewicht herrscht. 31) 32)

Dieser Mechanismus scheint Jakob und Alfred Amsler beschäftigt zu haben, denn es liegt ein (vielleicht in Zusammensarbeit beider entstandener) nie ausgeführter Entwurf Alfred Amsler's aus dem Jahre 1901 von einem Kegelderivator vor

³⁰⁾ Die älteste dem Verfasser bekannte derartige Mitteilung, die wohl nicht die erste sein dürfte, befindet sich in "Stahl und Eisen", 4. Jahrgang, No. 10, Oktober 1884, S. 614—615: Suvreker, "Ueber eine neue Methode zur direkten Messung von Geschwindigkeiten".

³¹⁾ Genaueres siehe Galle, Mathematische Instrumente, Seiten 59-61.

³²) Der differenzierende Scheiben-Geschwindigkeitsmesser wird bis in die Gegenwart in zeitgemäßer Ausführung hin und wieder verwendet. Siehe z. B. eine Anwendung in Verbindung mit einer großen Gasuhr zur Registrierung der sekundlichen Gasentnahme in einem Gaswerk: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 6. Jan. 1940, S. 2—10: W. Wunsch, "Fortschrift in der Technik der Gasfernversorgung", Abb. 10, S. 10.

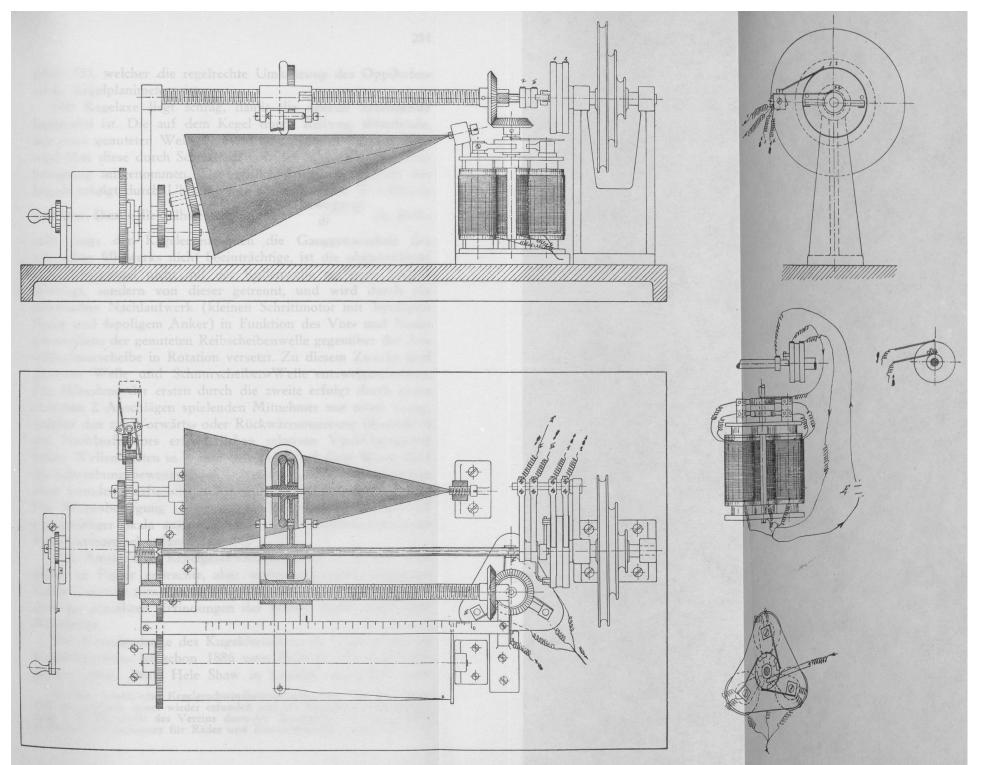


Abb. 33. Kegelderivator (Geschwindigkeitsmesser) von J. (?) und A. Amsler.

(Abb. 33), welcher die regelrechte Umkehrung des Oppikoferschen Kegelplanimeters ist.

Die Kegelaxe liegt schräg, damit die oberste Erzeugende horizontal ist. Die auf dem Kegel durch Reibung ablaufende, mit einer genuteten Welle verbundene Integral»Differentialrolle wird über diese durch Schnurlauf von der zu messenden Dreh» bewegung mitgenommen. Der zeitlich konstante Antrieb des Kegels erfolgt durch Uhrwerk mit Foucault'schem Windflügel» regulator. Damit die Selbsteinstellung = $\frac{d \, (\text{Bewegung})}{\text{d}t} \, \text{der Reib}$

rolle längs der Kegelerzeugenden die Ganggenauigkeit des schwachen Uhrwerks nicht beeinträchtige, ist die obenerwähnte Schraubenspindel nicht mit der Rollenwelle zu einer Einheit vereinigt, sondern von dieser getrennt, und wird durch ein elektrisches Nachlaufwerk (kleinen Schrittmotor mit 3-poligem Stator und 4=poligem Anker) in Funktion des Vor= und Nach= eilenwollens der genuteten Reibscheibenwelle gegenüber der Antriebschnurscheibe in Rotation versetzt. Zu diesem Zwecke sind genutete Welle und Schnurscheiben-Welle entzweigeschnitten. Die Mitnahme der ersten durch die zweite erfolgt durch einen zwischen 2 Anschlägen spielenden Mitnehmer mit totem Gang, welcher den zur Vorwärts= oder Rückwärtssteuerung (Kontakt!) des Nachlaufmotors erforderlichen relativen Verdrehungsweg beider Wellenhälften in + und — zuläßt. Auf diese Weise wird die Schraubungsbewegung des Differentialquotientenwagens von einer fremden Kraftquelle statt vom Zeitantrieb hervorgebracht. Die Wagenbewegung = gemessene Geschwindigkeit wird auf gleichmäßiger Skala angezeigt, bezw. auf uhrwerkangetriebener Registriertrommel aufgezeichnet. 33)

Der Amsler'sche Kegelgeschwindigkeitsmesser ist die zwar später zu Papier gebrachte, aber womöglich schon vorher ersdachte Vorstufe zum Amsler'schen Kugelgeschwindigkeitsmesser, eine der genialsten Erfindungen der beiden Amsler und ihrer Mitarbeiter.

Der Grundgedanke des Kugelderivators als Umkehrung des Kugelintegrators ist schon 1886 vom Erfinder des Kugelintegrators selbst, Prof. Hele Shaw in London, angegeben wors

³³) Der Amsler'sche Kegelgeschwindigkeitsmesser wird seit dem Jahre 1901 von anderen immer wieder erfunden und als Neuigkeit veröffentlicht. Siehe z. B. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 14. August 1937, H. Freese, "Schlupfmesser für Räder und Kettenfahrzeuge", spez. Abb. 2—6.

den ³⁴), aber scheinbar nicht von diesem weiterverwertet; seine konstruktive Gestaltung zum brauchbaren Geschwindigkeits» messer war das Werk der beiden Amsler.

Kehren wir zur Abbildung des Kugelintegrators in Amslerscher Ausführung, Abb. 5 auf Seite 220, zurück, so steht vorn im Bild die zeitlich angetriebene dt-Rolle, in der Mitte die Kugel mit durch tg α-Mechanismus funktionseingestelltem Aequatorialsrahmen, hinten die Integrier ($\int dJ$)-Rolle. Die sinngemäße Um-kehrung des Apparates im Lichte der auf Seite 250 angestellten Betrachtung ergibt sofort:

Bei konstantem Zeitantrieb der dt-Rolle (vorn) und Einführung der zu differenzierenden Bewegung s in die (ehemalige Integrier-) Rolle (hinten), nimmt die Kugel eine solche

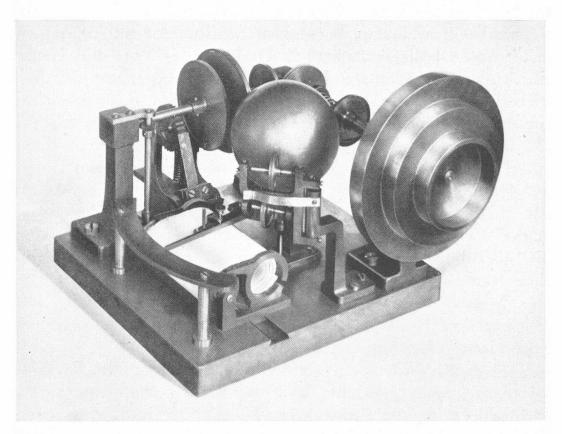


Abb. 34. Kugelderivator (Geschwindigkeitsmesser) von J. Amsler, Erstlingsausführung.

Bewegung an, daß ihre Momentandrehaxe die der funktionellen Bedingung tg $\alpha=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ entsprechende augenblickliche Neigung α erhält.

³⁴⁾ Galle, Mathematische Instrumente, Seiten 54 und 62.

Aufgabe der Amsler'schen Konstruktion war es, diesen Winkel abzutasten und passend weiterzuverwerten. In der Erst lingsausführung Jakob Amsler's (1892), Abb. 34, welche sich in Natura im Museum Allerheiligen befindet, ist, noch in engster Anlehnung an den Integrator der Abb. 5, hinten der konstante Zeit (dt)=Antrieb, rechts der Weg (ds)= Antrieb durch abgestufte Riemenscheibe ersichtlich. Die beiden entsprechenden Rollen mit horizontaler Achse sind deutlich hinter der Kugel erkennbar. Die Kugel wird am Platz gehalten durch eine Andruckrolle (vorn, auf der Höhe des horizontalen Kugel-Größtkreises), welche zudem durch Federdruck die Kugel stark gegen die dt= und ds=Rolle anpreßt und für kräftige Mit= nahme sorgt. Die Abtastung des maßgebenden Winkels α er= folgt vermittelst 2 unter 45 o diametral entgegengesetzten, kleiz neren Tasterrollen, welche in einem um den vertikalen Kugel= durchmesser drehbaren Rahmen gelagert sind. Die Tasterrollen suchen sich stets in diejenige Aequatorialebene zu stellen, welche zur momentanen Drehachse der Kugel senkrecht steht. (In Abb. 34 ist eine der Tasterrollen in halber Höhe unterhalb der Kugelmitte sichtbar.)

Beim Erstlingsapparat begnügte sich J. Amsler damit, den Azimut des Tasterrahmens, also den Winkel α selbst, durch Zeiger und Schreibstift direkt auf Zifferblatt und zeitlich bes wegter Registriertrommel (im Bilde links vorn) anzuzeigen, bezw. aufzuzeichnen, was für das Zifferblatt eine nach tg α verlaufende Bezifferung mit ungleich weit abstehenden Teilstrichen, für das Diagramm einen ungleichmäßigen GeschwinsdigkeitssMaßstab zur Folge hatte. Konstruktiv interessant ist, nebenbei, die Erzeugung des zeitlich konstanten dtsAntriebs, welcher von dem variablen, dafür aber genug kräftigen ssAnstrieb durch Friktionsgetriebe mit veränderlichem Schlupf und selbsteinstellender, friktionsregulierender Nacheilschraubenmutter erfolgte 35). Absolutes Vergleichsorgan (Sollgeschwindigkeit) für den Friktionsregulator war die bekannte Hipp'sche Vibrationssfeder mit Einfallrad.

Weiter kam Jakob Amsler nicht. Immerhin wurde sein Kugel= geschwindigkeitsmesser in dieser Form auf einer Anzahl Amsler=

³⁵) Beim Nacheilen zieht die Mutter die Friktion mehr an, beim Vorseilen lockert sie sie.

schen Eisenbahndynamometerwagen während der Jahre 1901 bis 1910 verwendet.

Seinem Sohne Alfred und einem von dessen Mitarbeitern 36) war es, etwa 1912, beschieden, den noch nicht ganz vollständigen J. Amsler'schen Kugelgeschwindigkeitsmesser durch Verwirklichung der genau gleichmäßigen Geschwindigkeitsskala zur Vollkommenheit zu bringen. Diese kamen auf den Gedanken, den abgetasteten Winkel α in den mit diesem nach tg α ver= laufenden Differentialquotienten vermittelst Zahnräder mit lokal veränderlichem Eingriffsradius umzuwandeln. So entstand der Amsler'sche Geschwindigkeitsmesser in seiner heutigen Form, mit Umsetzung von α in tg α vermittelst geraden Zahn= zylinders und mit diesem kämmender krummer Zahnstange von Polargleichung $r = \frac{\text{Konstante}}{\cos^2 \alpha}$, α von der aufsteigenden Verti>kalen aus gemessen. Die krumme Zahnstange besitzt in $\alpha = 0$ eine horizontale Tangente, in $\alpha = 35^{\circ}15'$ einen Wendepunkt und in $\alpha = 90^{\circ}$ eine ∞ ferne, horizontale Tangente, hat also eine flache S=Form. 37)

In seiner modernsten Ausführung sieht der Kugelderivator, wie auf einer großen Anzahl von neuzeitlichen Amsler Dynamo meterwagen als Geschwindigkeits und PS-Messer in Gebrauch, nach Abb. 35 aus. Zu beachten ist der Uebergang von der liegenden Anordnung der Abb. 34 zur stehenden Anordnung (dt= und ds=Rolle je unter 45 ° zum Horizont mit Axen in einer vertikalen Ebene durch Kugelmittelpunkt), sowie der elegante Zeitantrieb durch Elektromotor und regulierte Friktionskupp= lung mit schlupfsteuerndem Zentrifugalpendel. Betreffend die

³⁷) Der Krümmungsradius (in Polarkoordinaten)
$$R = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\alpha^2}}$$

springt plötzlich von $+\infty$ zu $-\infty$, d.h. es findet eine Inflexion statt für

$$r^{2} + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha}\right)^{2} - r\frac{\mathrm{d}^{2}r}{\mathrm{d}\alpha^{2}} = 0, \text{ d. h. mit:}$$

$$r = C \cdot \frac{1}{\cos^{2}\alpha}; \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = C \cdot \frac{2\sin\alpha}{\cos^{3}\alpha}; \qquad \frac{\mathrm{d}^{2}r}{\mathrm{d}\alpha^{2}} = C \cdot \frac{2\cos^{2}\alpha\left(1 + 2\sin^{2}\alpha\right)}{\cos^{6}\alpha}$$

für (ausgerechnet)

$$\frac{3\sin^2\alpha - 1}{\cos^6\alpha} = 0;$$
 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774;$ $\alpha = 35^015'$

³⁶) M. Blanz, gegenwärtiger Betriebsleiter der Firma Amsler.

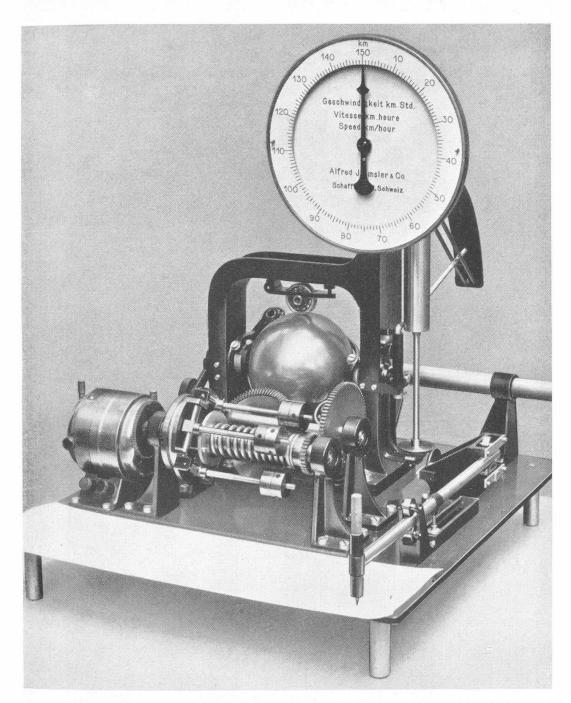


Abb. 35. Kugelderivator (Geschwindigkeitsmesser) von J. Amsler, durch A. Amsler und Mitarbeiter vervollkommnete, endgültige Ausführung.

eingehendere Theorie dieses Geschwindigkeitsmessers sei auf die bekannten Dynamometerwagenbeschreibungen verwiesen 38).

Abb. 36 zeigt den Apparatentisch eines modernen Amslerschen Eisenbahndynamometerwagens mit 2 Kugelintegratoren (für Arbeit am Zughaken, bezw. Arbeit der Beschleunigungssund Gefällskraft) und 2 Kugelderivatoren (für die Geschwins

³⁸) Schweizerische Bauzeitung 1914 und Bulletin Technique de la Suisse Romande 1924, siehe Fußnotiz ¹³), Seite 221.

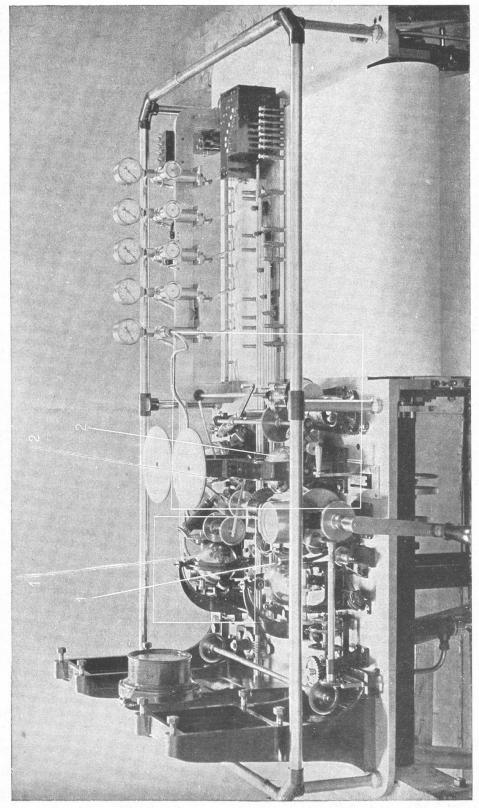


Abb. 36. Apparatentisch eines Amsler'schen Dynamometerwagens mit 2 Kugelintegratoren (1) und 2 Kugelderivatoren (2).

digkeit = $\frac{d \text{ (Weg)}}{d \text{ (Zeit)}}$ und Leistung in PS am Zughaken $\frac{d \text{ (Arbeit)}}{d \text{ (Zeit)}}$) mit Registrierung dieser 4 Funktionen auf ablaufendem Diagrammstreifen.

III. KURVIMETER

Kurvimeter in der handelsüblichen Form sind längst beskannte, sehr primitive Instrumente. Es besteht aber eine interess

sante Spezialkonstruktion von Alfred Amsler zur gesnauen Längenmessung von sehr kleinen Kurven, wie Schriftzügen, anatomischen Schnitten oder Hirnwinsdungen (u. a. von kleinen Tieren, wie Mäusen etc. in naturgetreuen Abbildungen, oder von größeren Säugestieren auf ungenügend großen photographischen Aufnahmen).

Das Instrument, Abb. 37, ist eine Kombination der Kurvimeterrolle mit einem Vergrößerungspantogra= phen. Die kleinen Schrift= züge etc. werden unter Lupe F beobachtet, wäh= rend die in R befindliche Kurvimeterrolle die pan= tographisch vergrößerte Aehnlichkeitsfigur zum Ur= bild umfährt. Dabei war die Aufgabe zu lösen, daß die Kurvimeterrolle jeder= zeit den für das Auge nicht sichtbaren, vergrößer= ten Kurvenzug in tangen= tialer Richtung beschreibt. Die Aufgabe wurde be= wältigt vermittelst einer zwischen Lupenfassung F und Tragscheibe Q der Kurvimeterrolle den Pan=

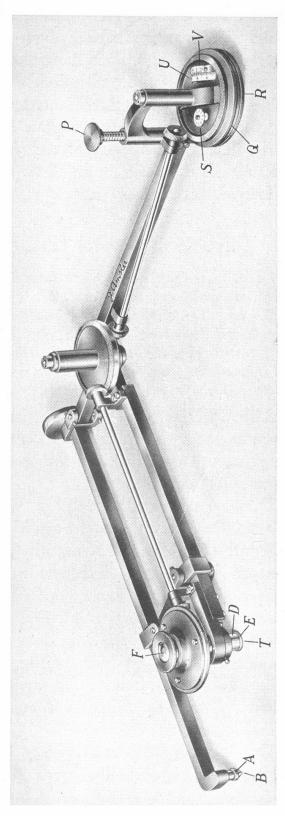


Abb. 37. Kurvimeter.

tographengliedern entlang angeordneten Gleichlaufvorrichtung, welche die von Hand eingestellte tangentiale Berührung des Lupenfadenkreuzes mit dem Originalkurvenzug, unbeeinflußt von der Deformation des Pantographen, parallel auf den Aziz mut der Kurvimeterrolle überträgt.

Bei den ersten Ausführungen von Alfred Amsler war die Rotationsübertragung von Fadenkreuz auf Schneide der Kurvis meterrolle vermittelst Stahlsaiten durchgeführt, etwa ähnlich der Parallelführung der Reißschiene der modernen Zeichenmaschinen. Bei 'den neueren Ausführungen vom Jahre 1924 an wurden durch einen Mitarbeiter Alfred Amsler's 39) die Saitenläufe in eleganter Weise durch Wellen und konische Zahnräder in Differentialanordnung ersetzt.

IV. HYDRAULISCHE APPARATE

Das Wesen der Flüssigkeitsmessung besteht darin, daß in einem Flüssig-keitsstrom durch eine künstliche Störung des Verlaufs der Stromfäden eine Druck- oder Gefällsabnahme herbeigeführt wird, welche mit der sekund-lichen Durchflußmenge in einem gesetzmäßigen Verhältnis steht. Aufgabe der Konstrukteure ist es, diese Gefällsabnahme durch einen Funktionsmechanismus in Durchflußmenge zu verwandeln und erforderlichenfalls letztere zeitlich zu integrieren.

Abb. 38, das Meß und Registrierwerk eines Rohrleitungs Wassermessers von Alfred Amsler veranschaulichend, stellt eines der glänzendsten Beispiele der materialisierten Mathematik auf diesem Gebiete dar.

Dieser für die Philadelphia Water Works, U. S. A., 1911 konstruierte Apparat besteht aus 2 Töpfen A und B, welche eine Roberval'sche Waage bilden, mit Gewichtspendel als Richtkrafts erzeuger. Die Töpfe sind teils mit Quecksilber und teils mit Wasser gefüllt und durch einen biegsamen Gummischlauch C miteinander kommunizierend. Die Töpfe A und B stehen durch andere Gummischläuche mit dem Anfangss bezw. dem engsten Querschnitt eines in der Leitung eingebauten VenturisRohrstückes in Verbindung. A ist an dem niederen (engster Querschnitt), B an dem höheren Wasserdruck (Anfangsquerschnitt) angeschlossen.

Das Wasser mit dem höheren Druck dringt in den Topf B und treibt das Quecksilber nach A, bis die Niveaudifferenz des

³⁹⁾ M. Blanz.

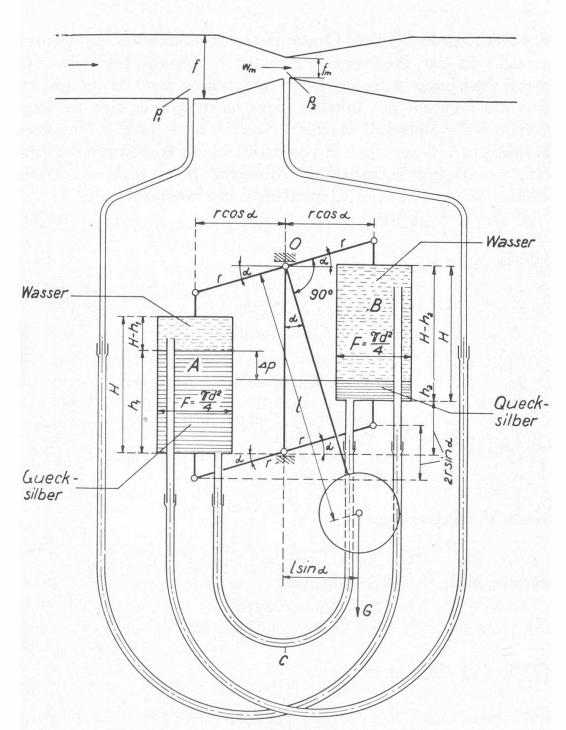


Abb. 38. Rohrleitungswassermesser von A. Amsler, Schema.

Quecksilbers in den beiden Töpfen gleich dem Druckgefälle Δp am Venturirohr ist, und es gilt, Ab. 38:

(1)
$$\Delta p = h_1 - h_2 - 2r\sin\alpha$$
. Δp in cm Hg-Säule.

Infolge des Ueberdruckes rechts steht das Quecksilber in A höher als in B, der Topf wird daher schwerer und die Waage neigt sich so weit nach links, bis das ausgelenkte Pendelgewicht G

das Uebergewicht des Quecksilbers ausgleicht. Das Gleichze gewicht an der Neigungswaage wird durch die folgende Mozmentengleichung ausgedrückt, in welcher zu berücksichtigen ist, daß das Gewicht des Inhaltes eines jeden Topfes sich aus dem Gewicht der Quecksilberschicht von Höhe h und der darüber befindlichen Wasserschicht von Höhe H—h zusammensetzt (die sich gegenseitig aufhebenden Momente links und rechts der Töpfe, Waagarme und Gummischläuche weggelassen):

$$\{[F\gamma_qh_1+F\gamma_w\cdot(H-h_1)]-[F\gamma_qh_2+F\gamma_w(H-h_2)]\}\cdot r\cos\alpha=Gl\sin\alpha$$
 Hierin bedeuten:

		spez. Gewicht des Quecksilbers	kg/cm ³
Yw	=	spez. Gewicht des Wassers	kg/cm ³
F	=	$\frac{\pi d^2}{4}$, der innere Querschnitt der Töpfe	cm^2
H	=	ganze Topfhöhe	cm
h_1	==	Höhe der Quecksilberschicht im Topf links	cm
	=	" " rechts	cm
r	=	Armlänge der Roberval'schen Waage	cm
1	=	Länge der Pendelstange	cm
G	=	Gewicht der Beschwerungsmasse des Pendel	s kg
		Ausschlagswinkel der Waage.	

Nach Vereinfachungen:

$$F(\gamma_q - \gamma_w) \cdot (h_1 - h_2) \cdot r \cos \alpha = Gl \sin \alpha,$$

daraus, nach (h1-h2) aufgelöst:

(2)
$$h_1 - h_2 = \frac{Gl}{(\gamma_q - \gamma_w)Fr} \operatorname{tg}\alpha$$

(2) in (1) eingesetzt:

(3)
$$\Delta p = \frac{Gl}{(\gamma_q - \gamma_w)Fr} \operatorname{tg} \alpha - 2r \sin \alpha$$

Bei der praktischen Ausführung des Wassermessers wurden den Instrumentendimensionen absichtlich nachstehende spezielle Zahlenwerte gegeben:

$$\gamma_q = 13,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$
 $\gamma_w = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$
 $r = 10,0 \text{ cm}$
 $l = 30,0 \text{ cm}$
 $F = \frac{\pi (9,5 \text{ cm})^2}{4} = 70,9 \text{ cm}^2$
 $G = 5,9 \text{ kg}.$

Mit diesen Werten nahm Gleichung (3), ausgerechnet, folgende zahlenmäßige Gestalt an:

(3)
$$\Delta p = 20 \operatorname{tg} \alpha - 20 \sin \alpha = 20 (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha) \quad \text{cm Hg-S\"{a}ule.}$$

In der besonderen Wahl der Dimensionen, welche die Uebersführung der Koeffizienten von tg α und sin α in Gleichung (3) in zwei gleiche Zahlenelemente zur Folge hatte, liegt zunächst einmal ein gelungener Kunstgriff Alfred Amsler's vor, denn wegen $\lim_{\alpha = 0} |\log \alpha| = \lim_{\alpha = 0} |\sin \alpha| = \alpha$ bleibt die Differenz tg $\alpha - \sin \alpha$ für verhältnismäßig große Winkel, bis ca. 15°, noch sehr klein. Um geringen Druckdifferenzen Δp im Vensturirohr das Gleichgewicht zu halten, sind also gemäß (3) schon recht erhebliche Neigungswinkel der Waage erforderlich. M. a. W. die Differentialdruckwaage ist äußerst empfindlich. Dies ist wieder ein Ausführungsbeispiel des bei Alfred Amsler beliebten, bei seinen Materialprüfmaschinen und Meßdosen wiederholt angewendeten Prinzips der hydraulischen Amplifikation sehr kleiner Größen. 40)

Die sekundliche Wasserdurchflußmenge im Venturirohr ist:

$$Q^{\text{ms/sec}} = f_m \cdot w_m = \frac{f_m}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_m}{f}\right)^2}} \cdot \sqrt{2g\frac{(p_1 - p_2)}{\gamma}} = \text{Konstante} \cdot \sqrt{\Delta p}$$

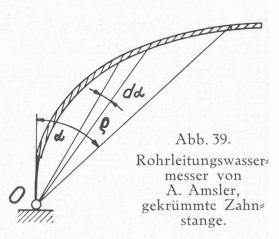
 $(f_m = \text{engster Querschnitt des Venturirohrs}, f = \text{voller Querschnitt der Rohrleitung}, <math>w_m = \text{Wassergeschwindigkeit im engsten Querschnitt}, g = \text{Erdbeschleunigung}, p_1 \text{ und } p_2 = \text{Wassersdrücke vor und im engsten Querschnitt}, } \gamma = \text{spez. Gewicht des Wassers}, d. h. mit (3):}$

(4)
$$Q^{\text{m}^3/\text{sec}} = \text{Konstante} \cdot \sqrt{\text{tg} \alpha - \sin \alpha}$$

Es handelt sich jetzt darum, aus dem allein greifbaren Neisgungswinkel α den Qsproportionalen Ausdruck $\sqrt{tg α - sin α}$ mechanisch zu verwirklichen, zwecks Anzeige und Registrierung der Durchflußmenge in einer genau linearen Skala mit gleichsmäßiger Teilung. Dazu bediente sich A. Amsler wieder der schon beim Kugelgeschwindigkeitsmesser angewendeten Zahnsräder mit lokal veränderlichem Eingriffsradius.

⁴⁰) Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen, Jahresbericht 1941, A. Uehlinger und F. Dubois: "Alfred Amsler, sein Leben sein Werk", S. XIX.

Mit der Drehachse O der Waage ist (Abb. 39) eine geskrümmte Zahnstange F starr verbunden, welche mit einer geszahnten, vertikalen Trommel E im Eingriff steht. Die Achse der Trommel und die Drehsachse des Zahnsegmentes schneis den sich unter 90°. Die Entfersnung des Zahnes des Segmentes,



welcher gerade mit der Zahnung der Trommel E sich kämmt, von der Achse O, sei ϱ . Für eine unendlich kleine Neigungs= zunahme d α der Waage dreht sich die Oberfläche der Trom= mel E um den Betrag ϱ d α , für den ganzen Winkel α also ins=

gesamt um $\int_{0}^{\alpha} \varrho \ d\alpha$. Die Bedingung, daß der Drehwinkel der

Trommel der sekundlichen Durchflußmenge Q proportional sei, verlangt also

$$\int_{0}^{\alpha} \varrho \, \mathrm{d}\alpha = \text{Konstante } \sqrt{\mathrm{tg} \, \alpha - \sin \alpha}$$

Daraus durch Derivation:

(α von der aufsteigenden Vertikalen aus gemessen)

(5)
$$\varrho = \text{Konstante} \cdot \frac{d}{d\alpha} (\sqrt{\text{tg}\alpha - \sin\alpha}) = \text{Konstante} \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \cos\alpha}{2\sqrt{\text{tg}\alpha - \sin\alpha}}$$

Dies ist die polare Gleichung der krummen Zahnstange, welche die Messung der sekundlichen Durchflußmenge in linearem Maßstab ermöglicht. An ihrem oberen Ende trägt die Zahntrommel E ein Zahnrädchen, welches eine mit Schreibstift versehene gerade Zahnstange der horizontalen Registriertrommel entlang verschiebt. Die Registriertrommel wird durch Uhrwerk in Funktion der Zeit angetrieben.

An der Zahnstange ist ferner ein Index angebracht, welcher die Größe der Schiebung und damit der sekundlichen Wassers menge an einer Skala anzeigt.

Bei der Durchflußmenge Q=0, $\alpha=0$, nimmt der Radiusvektor ϱ der krummen Zahnstange, Gleichung (5), den

Wert $\frac{0}{0}$ = unbestimmt an. Die Unbestimmtheit wird behoben durch Anwendung des Satzes über unbestimmte Werte:

(6)
$$\lim_{\alpha = 0} |\varrho| = \frac{\text{Konstante}}{2} \cdot \frac{\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right)}{\frac{d}{d\alpha} \left(\sqrt{\text{tg} \alpha - \sin \alpha} \right)} =$$

$$= \text{ausgerechnet} \frac{\text{Konstante}}{2} \cdot \frac{\left(\frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha} + \sin \alpha \right) \cdot 2 \sqrt{\text{tg} \alpha - \sin \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \cos \alpha}$$

Für $\alpha=0$ verschwinden Zähler und Nenner des obigen Quotienten beide wieder, wobei aber der Nenner mit α^2 , der Zähler mit $\alpha \cdot \sqrt{\alpha^3} = \alpha^{2^{1/2}}$ nach 0 geht, also rascher als der Nenner. Der wahre Wert des Quotienten und somit des Radiusvektors für $\alpha=0$ ist daher 0 und die Zahnstange geht (wenigstens theoretisch) durch den Drehpunkt der Waage hindurch. In Wirklichkeit muß wegen der hier sehr ungünstig werdenden Verzahnung ein kleines Stück der Zahnstange in der Nähe des Drehpunktes weggelassen werden. Das Instrument zeigt in der Nähe von 0 die Wassermenge nicht an.

Es interessiert noch die geometrische Form der Zahnstange. Dieselbe ist nicht ohne weiteres aus der komplizierten Polargleichung (5) ersichtlich. Am besten kommt man zum Ziel mittels Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen, nämlich:

$$\varrho = K^{te} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^{2} \alpha} - \cos \alpha}{2 \sqrt{tg\alpha - \sin \alpha}}$$

$$= \frac{K^{te}}{2} \cdot \frac{\left(1 + \alpha^{2} + \frac{2}{3} \alpha^{4} + \frac{17}{45} \alpha^{6} + \dots\right) - \left(1 - \frac{\alpha^{2}}{2} + \frac{\alpha^{4}}{24} - \frac{\alpha^{6}}{720} + \dots\right)}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{\alpha^{3}}{3} + \frac{2}{15} \alpha^{5} + \dots\right) - \left(\alpha - \frac{\alpha^{3}}{6} + \frac{\alpha^{5}}{120} + \dots\right)}}$$

$$\stackrel{(7)}{=} \frac{K^{te}}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} \alpha^{2} + \frac{5}{8} \alpha^{4} + \dots\right)}{\sqrt{\frac{1}{2} \alpha^{3} + \frac{1}{8} \alpha^{5} + \dots}} = \frac{K^{te}}{2} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \alpha^{\frac{1}{2}} + \dots\right)$$

$$\stackrel{(7)}{=} \frac{K^{te}}{2} \cdot \frac{(\frac{3}{2} \alpha^{2} + \frac{5}{8} \alpha^{4} + \dots)}{\sqrt{\frac{1}{2} \alpha^{3} + \frac{1}{8} \alpha^{5} + \dots}} = \frac{K^{te}}{2} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \alpha^{\frac{1}{2}} + \dots\right)$$

⁴¹) Gleichung (7) ergibt sich übrigens auch aus der vorstehenden Interspretation der Gleichung (6).

Geht man mit:

 $x = \rho \sin \alpha = \text{für } \alpha \text{ klein } \sim \rho \alpha;$ $y = \rho \cos \alpha = \text{für } \alpha \text{ klein } \sim \rho$

zu rechtwinkligen Koordinaten über, so ist

$$y \cong \frac{K^{te}}{2} \cdot \left(3 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots\right)$$

oder:

(8)
$$y^3 \cong \left(\frac{K^{\text{te}}}{2} \cdot 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 x + \dots$$

die angenäherte, cartesische Gleichung der krummen Zahnstange in der Nähe des Nullpunktes. Diese Gleichung stellt eine kubische Parabel mit horizontaler Axe dar.

In Gleichung (8) kommt ein zweiter glücklicher Vorzug zum Ausdruck, welchen A. Amsler bewußt oder unbewußt mit seiner Konstruktion erreicht hat. Die Benützung einer Neigungswaage

mit tg $\alpha = \sin \alpha$ Charakteristik als Differentialdruckmesser hat zur Folge, daß die krumme Zahnstange als kubische Parabel sich zunächst der vertikalen Aus= gangstangente eng anschmiegt und dann bei verhältnismäßig kleinen Winkeln \alpha ziemlich rasch in die mehr horizontale Richtung umbiegt, was für einen günstigen Eingriff der in ihrer Verlängerung alle durch den Nullpunkt 0 gerichteten Sektor= zähne mit der gezahnten Trom= mel vorteilhaft ist.

Hätte A. Amsler als Diffe= rentialdruckmesser irgend ein Gerät mit reiner $\sin \alpha = \text{oder}$ tg α = Charakteristik (ähnlich wie die im Museum Allerheiligen in Natura oder im Lichtbild aus= gestellten Pendelkraftmesser zu seinen hydraulischen Material= prüfmaschinen) gewählt, so hätte von A. Amsler, Ansicht von hinten.

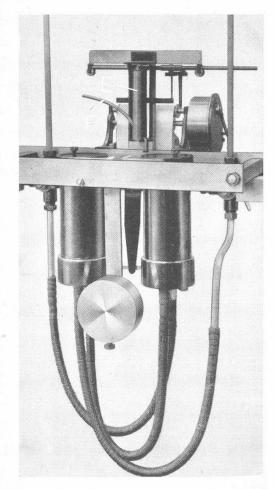


Abb. 40. Rohrleitungswassermesser

die Quadratwurzelausziehung mittels krummer Zahnstange und Zahntrommel gemäß Verzahnungsgesetz (Gleichung 5)

$$\varrho = \mathrm{K^{te}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} (\sqrt{\sin \alpha}) \ \mathrm{bezw.} \ \varrho = \mathrm{K^{te}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} (\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha})$$

zu der Zahnstangenform

$$\varrho = C \cdot \frac{\cos \alpha}{2\sqrt{\sin \alpha}} \text{ bezw. } C \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

geführt. Dies sind hyperbelähnliche Kurven mit einem unendelichen Ast in $\alpha=0$, also für die konstruktive Ausführung durchaus unbrauchbar. Der mathematische Kunstgriff der Ume wandlung der Druckdifferenz in eine α eFunktion (tg — sin), deren Verzahnungsgesetz in $\alpha=0$ eine Singularität der Gattung Null statt der Gattung ∞ wie die einfache sine oder tgeFunktion besitzt, war neben den oben erwähnten Vorteilen dieser Ane ordnung an sich schon eine ganz bemerkenswerte gedankliche Leistung.

Abb. 40 ist ein Lichtbild des Apparates. Eine Integriervorsrichtung nach der Zeit, die ohne weiteres möglich gewesen wäre, wurde nicht angebracht. Photographie im Museum.

**

Eine zweite, mathematisch einfachere Lösung von A. Amsler und späteren Mitarbeitern (etwa 1925—1930) des ähnlichen Problems für offene Wasserläufe hat in der Hydraulik eine weit größere Verbreitung gefunden. Es ist dies der sogenannte integrierende Pegel. Dieser dient dazu, die sekundliche Durchflußmenge im Ablauf= oder Zulaufkanal einer Wasser= turbinenanlage fortlaufend zu messen und nach der Zeit zu integrieren. Voraussetzung für die Anwendbarkeit des integrie= renden Pegels ist allerdings eine ein deutige Beziehung zwi= schen der Durchflußmenge und der Wasserhöhe vor einem im Turbinenkanal eingebauten Meßorgan. Als solches kommt in Betracht:

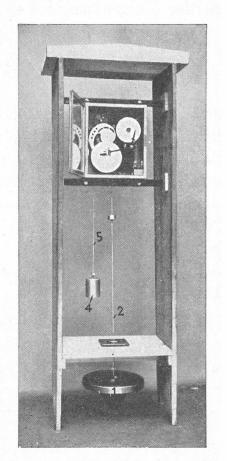
In Ablaufkanälen: offener Ueberfall ohne oder mit Seistenkontraktion, Venturisähnliche Einschnürung (sogen. Venturikanal).

In Zulaufkanälen: Vielfach der Kanal mit rechteckigem oder halbkreisrundem Querschnitt und Sohlengefälle selber, vermöge des na= türlichen Gefällsverlustes durch Wandreibung,

und zwar nur bei freier Nach= strömung hinter der Meßstelle (also ohne Rückstau oder Betrieb mit sogen. überflutetem Ueberfall).

Die von der sekundlichen Durch= flußmenge O eindeutig abhängige Wassertiefe h im Kanal vor der Meß= stelle wird durch einen Schwimmer erfaßt und mittels einer spiraligen Herzscheibe, die vom Schwimmerseil über Zahnräder in Rotation versetzt wird, in einen der Durchflußmenge proportionalen sin α umgeformt. Der Winkel α wird von einem sich gegen den Rand der Spirale lehnenden Fühlerhebel mit Kontaktrolle abgegriffen. Eine von diesem durch Winkelarm im Azimut um α ausgelenkte Plani= meterrolle drückt gegen eine dahinter befindliche, durch Uhrwerk angetriebene, vertikale Integrierscheibe; bei Abb. 41. Integrierender Pegel.

der Wassermenge = 0, α = 0, ist



die Schneide der Integrierrolle nach dem Mittelpunkt der Zeits scheibe gerichtet. Die Integration $\int Q dt$ findet also gemäß dem sinusabhängigen Scheibenintegrator statt, ähnlich wie beim Jakob Amsler'schen Scheibenpolars bezw. Scheibenlinearplanimeter. Die sekundliche Wassermenge kann gleichzeitig auf einer rotierenden Papierscheibe als Kreisdiagramm in Funktion der Zeit regis striert werden, mit (wegen der sin α=Abhängigkeit) nicht genau proportionalem Q=Maßstab.

In den meisten praktisch vorkommenden Fällen ist die Durchflußmenge dem Produkt aus der Potenz $\frac{3}{2}$ der Obers wasserhöhe h und einem hydraulischen Koeffizient u, selber Funktion von h, proportional. Z. B. beim einfachen rechteckigen Ueberfall:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \cdot h^{\frac{3}{2}}$$
 m³/sec,

worin h= Ueberfallhöhe m, b= Ueberfallbreite m, g= Erdbeschleunigung m/sec², $\mu=$ hydraul. Koeffizient nach Freese, Hegly, S. I. A. etc. 42) Die Form des Leitherzes ist daher, roh angenähert, eine semiskubische parabolische Spirale, $\varrho=c_1+c_2\varphi^{\frac{3}{2}}$ $c_1,\ c_2=$ Konstanten. In Wirklicheit wird nicht nur die Sinusbeziehung, sondern auch der h-abhängige hydraulische Koeffizient μ in die Form der Spirale mit einbezogen.

Betreffend Ausführlicheres über die Theorie des integrierens den Pegels sei auf die bezüglichen Publikationen der Firma Amsler verwiesen. 43)

Abb. 41 gibt eine Gesamtansicht des integrierenden Pegels. Unten, unterhalb des Betonhäuschens, ist der breitrandige Schwimmer ersichtlich. Im Instrumentenkasten sind links oben das spiralige Leitherz mit Winkelhebel und Tasterrolle, links unten die Integriervorrichtung und rechts oben die Schreibzvorrichtung erkennbar; letztere beide vom Winkelhebel betätigt. Photographie im Museum.

V. BESCHLEUNIGUNGSMESSER

Als letztes charakteristisches Beispiel der Amsler'schen mathes matischen Instrumente soll der rotierende Beschleunigungsmesser von Alfred Amsler angeführt werden.

Dieser Beschleunigungsmesser wurde 1910 im Dynamometer» wagen der ehemaligen Bayrischen Staatsbahnen, einem der schön»

⁴²⁾ Siehe: Des Ingenieurs Taschenbuch "Hütte"; statt, Forchheimer: "Hysdraulik", Leipzig, G. B. Teubner.

Normen für Wassermessungen vom Schweiz. Ingenieur- und Architektenverein, 1924.

⁴³) Schweizerische Technische Zeitschrift, No. 14/15, 12. April 1928, Seiten 184—187, "Integrierender Pegel der Firma Alfred J. Amsler & Co., Schaffhausen".

Journal of Scientific Instruments, Cambridge University Press, London, Vol. V, No. 10, Oktober 1928, "The Amsler Integrating Water Gauge". Génie Civil, Paris, 5. Mai 1928, "Limnigraphe intégrant".

Mémoires du Congrès International de Mécanique Générale, Liège, Imprimerie Georges Thone, 1930, Vol. III, pages 113—118, "Le principe et l'usage du limnigraphe intégrant".

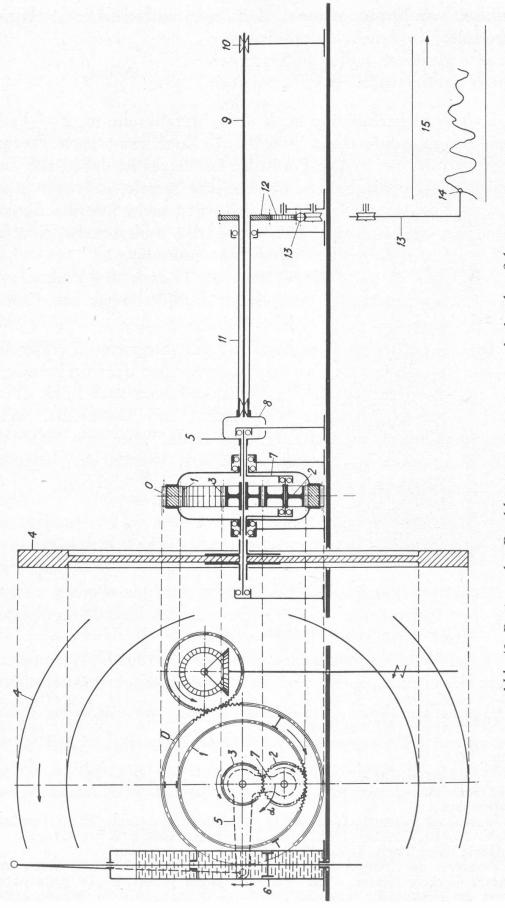


Abb. 42. Rotierender Beschleunigungsmesser von A. Amsler, Schema.

sten von A. Amsler ausgerüsteten Meßwagen, eingebaut. 44) Er dient zur Messung der augenblicklichen Beschleunigung bezw. Verzögerung des Zuges. Der Apparat ist im Prinzip ein Drehzmomentmesser, welcher mittels eines auf Torsion beanspruchten Federstabes das Drehmoment mißt, erforderlich um eine Schwungscheibe von bekanntem polarem Trägheitsmoment in ihrer Rotation zu beschleunigen bezw. zu verzögern.

Das Zahnrädergehäuse 0, Abb. 42, ist durch seinen gezahnten Kranz und eine Zahnräderübersetzung mit der Antriebswelle des Apparatentisches vom Wagenrad aus gekuppelt; es dreht sich also mit einer der Zuggeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ proportiosnalen Winkelgeschwindigkeit ω₁. Im Gehäuse 0 wird durch Innenverzahnung 1, Planetenrad 2 und Sonnenrad 3 die Gezschwindigkeitsänderung des Zuges auf die Schwungscheibe 4 übermittelt, welche auf der Achse des Sonnenrades 3 sitzt.

Das als Jakob Amsler'scher Zahndruckdynamometer ausgebildete Planetenrad 2 ist in der Waage 7 gelagert und übergträgt das Beschleunigungsg (bezw. Verzögerungsg) Moment der Schwungscheibe auf den Einspannkopf 8 und damit auf die darin eingespannte, an ihrem anderen Ende 10 festgehaltene Torsionsfeder 9, welche sich proportional zur Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$ des Zuges verdreht. Die Verdrehung der Torsionsfeder wird durch ihr Schutzrohr 11 und die Zahnräder 12 auf die Zahnstange 13 mit Schreibstift 14 übertragen. 15 ist der abglaufende Registrierstreifen.

Seien, Abb. 43, r_1 , r_2 , r_3 die wirksamen Radien, bezw. ω_1 , ω_2 , ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten in Bezug auf die Appasratenaxe vom inneren Zahnkranz 1, Waage des Planetenrades 2 und Sonnenrad 3. Da im Gleichgewichtszustand das Planetenrades 2 als reines Transportrad zwischen 1 und 3 wirkt, sind die Umfangsgeschwindigkeiten $v_1 = r_1 \omega_1$ und $v_3 = r_3 \omega_3$ auf der Peripherie von 1 und 3 einander gleich und mithin

$$\omega_3 = \frac{r_1}{r_3} \cdot \omega_1$$

⁴⁴) Ein kurzer Hinweis auf die Amsler-Apparatur im ehemal. Bayrischen Meßwagen mit Abbildung des Apparatentisches ist im Aufsatz von H. Nord-mann und W. Weber in Glaser's Annalen, Bd. 121, Heft 11, 1. Dez. 1937, "Meßwagen zur Untersuchung von Dampflokomotiven", auf S. 170—173, enthalten.

Das Beschleunigungsmoment der Schwungscheibe 4 ist:

(2)
$$M_3 = J_p \cdot \frac{d\omega_3}{dt} = \min(1): \quad J_p \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{d\omega_1}{dt},$$

wobei J_p = polares Trägheitsmoment der Schwungscheibe.

Diesem Beschleunigungsmoment hält, Abb. 43 a, das Moment des Tangentialdruckes T_3 am Planetenrad 2 das Gleichgewicht, also

(3)
$$T_{3} \cdot r_{3} = M_{3}$$
$$T_{3} = \frac{M_{3}}{r_{3}} = \operatorname{mit}(2) : \frac{J_{p}}{r_{3}} \cdot \frac{r_{1}}{r_{3}} \cdot \frac{d\omega_{1}}{dt}$$

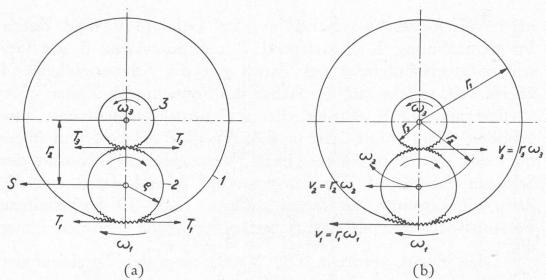


Abb. 43. Rotierender Beschleunigungsmesser; zur mathematischen Theorie.

Der Kraftausgleich am Gehänge des Planetenrades als Zahnsdruckdynamometer verlangt (S = Ablenkungskraft des Geshänges):

$$S = T_1 + T_3$$

und da T_1 und T_3 die einzigen, das Rad 2 mit Radius ϱ auf Drehung beeinflussenden Kräfte sind, also $T_1 \cdot \varrho = T_3 \cdot \varrho$, $T_1 = T_3$, schließlich

$$S = 2 \cdot T_3$$

d.h. wegen (3)

(4)
$$S = 2 \cdot \frac{J_p}{r_3} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{d\omega_1}{dt}$$

Zuletzt ist der Verdrehungswinkel α des Torsionsstabes proportional dem auf ihn durch Gehänge übertragenen Drehmoment $S \cdot r_2$ vom Zahndruckdynamometer, d. h. mit C als Torsionskonstante des Meßstabes

(5)
$$C \cdot \alpha = r_2 \cdot S = r_2 \cdot 2 \frac{J_p}{r_3} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{d\omega_1}{dt}$$

Erinnert man sich, daß die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Rädergehäuses proportional der Zugsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, also $\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}$ = proportional $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ ist, so ist die Gleichung (5) letzten

Endes gleichbedeutend mit:

Verdrehungswinkel des Torsionsstabes = proport. $\frac{d^2x}{dt^2}$

(6) = proport. Zugsbeschleunigungs, bezw. «Verzögerung.

Dies ist die verblüffend leichte Theorie dieses in seiner Originalität höchst einfachen Beschleunigungsmessers.

In Wirklichkeit sind die Vorgänge etwas weniger elementar, denn die Waage des Planetenrades 2 bleibt effektiv nicht in Ruhe, wie angenommen, sondern schlägt bei jeder Beschleunis gungsänderung des Zuges um den an sich nicht beträchtlichen Torsionswinkel α des Meßstabes aus. Dadurch kommt in den Bewegungszustand des Apparates eine weitere Komponente hinein, welche das Schlußresultat nicht unwesentlich entstellt.

Kehren wir zur Abb. 42 zurück, so besitzt die Waage des Planetenrades 2 bei einer endlichen Auslenkung α eine eigene Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$, das Zentrum von 2 eine Umsfangsgeschwindigkeit $v_2 = \omega_2 \cdot r_2$. Die Beziehung zwischen den effektiven EingriffssGeschwindigkeiten am Planetengetriebe ershält man auf die anschaulichste Art, indem man, Abb. 43 b, das Planetenrad 2 als Flaschenzug auffaßt, bei welchem Weg und Geschwindigkeit der Flaschenzugrolle algebraischer Mittelwert sind der Wege bezw. Geschwindigkeiten der beiden auflaufens den Seile, also:

$$v_2 = \frac{v_1 - v_3}{2}$$

$$r_2 \ \omega_2 = \frac{r_1 \omega_1 - r_3 \omega_3}{2}$$

woraus statt (1):

(1')
$$\omega_3 = \frac{r_1}{r_3} \omega_1 - 2 \frac{r_2}{r_3} \omega_2 = \frac{r_1}{r_3} \omega_1 - 2 \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

Mit (1') gehen nunmehr Gleichung (2) bis (5) über in:

$$(2') M_3 = J_p \cdot \left(\frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} - 2\frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

bezw.

$$(3')$$
 $T_3 =$

$$(4') S = \dots$$

(5')
$$C \cdot \alpha = r_2 \cdot 2 \frac{J_p}{r_3} \left(\frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} - 2 \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right)$$

oder, anders gruppiert:

(5"), (6')
$$4\frac{J_p}{r_3^2} r_2 \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{C}{r_2} \cdot \alpha = 2\frac{J_p}{r_3^2} \cdot r_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = \text{prop.} \frac{d^2x}{dt^2}$$

Die Gleichungen (5") und (6') unterscheiden sich also in Wirklichkeit von den vereinfachten Gleichungen (5) und (6) durch das Hinzutreten, linkerhands, eines Gliedes in $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, mit anderen Worten: der Beschleunigungsmesser ist effektiv ein schwingungsfähiges Gebilde mit Eigenschwingungsdauer

$$2\pi \sqrt{\frac{4J_p}{C} \cdot \frac{r_2^2}{r_3^2}}$$

und mit der zu messenden Zugsbeschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$ als Stözrungsfunktion. Das registrierte Diagramm wäre somit die Ueberzlagerung der wahren Zugsbeschleunigung und der Eigenschwinzgung des Apparates. Eine richtige Beschleunigungsanzeige ist daher nur möglich bei Unterdrückung der Eigenschwingung durch genügende Dämpfung des Instrumentes (= Hinzufügung eines weiteren Gliedes in $\frac{d\alpha}{dt}$ links in Gleichung (5") und (6')).

Diese Erkenntnis scheint A. Amsler erst nach Erfindung seines sinnreichen Accelerometers gekommen zu sein, denn die ersten Zeichnungen des Apparates enthalten noch keine Dämpfungsvorrichtung. Bei der endgültigen Ausführung wurde als Dämpfer eine von der Planetenradwaage 7 über Hebel 5 mitgenommene Oelbremse 6, Abb. 42, eingebaut.

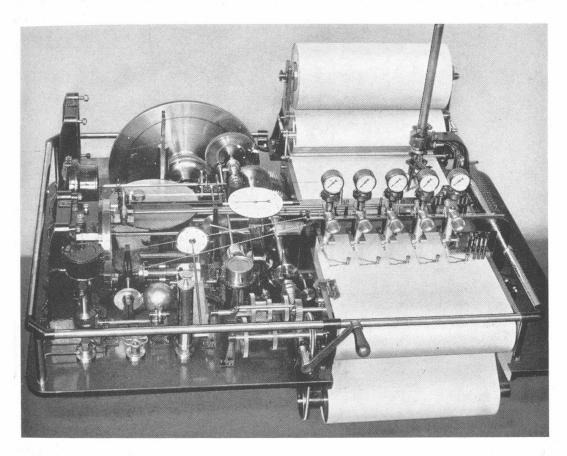


Abb. 44. Amsler Dynamometerwagen der Bayrischen Staatsbahnen mit A. Amsler schem rotierendem Beschleunigungsmesser.

Die Abb. 44 ist eine Aufnahme des Apparatentisches des ehemaligen Bayrischen Dynamometerwagens; in der Mitte hinten sind Antrieb, Planetenrädergehäuse und Schwungscheibe des Rotationsbeschleunigungsmessers ersichtlich, in Front davon, die Tischplatte etwa in ihrem Drittel durchquerend, der kalibrierte Torsionsstab, und links vom Planetenradgehäuse die Oelbremse mit vertikalem Zylinder. Photographie im Museum.

(Manuskript eingegangen: 4. Mai 1944)

