Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Schaffhausen
Band: 18 (1943)

Artikel: Zur Klassifizierung der Mittelwerte
Autor: Habicht, Conrad
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-584933

8.

ZUR KLASSIFIZIERUNG DER MITTELWERTE

Von

CONRAD HABICHT

Der Complex der nach ihrer Grösse geordneten reellen Zahlen $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \dots \leqq x_n$ vom Index n (Anzahl dieser Zahlen oder Elemente) sei gegeben. Ist f_n eine reelle Funktion der x_ν und sind $f_n - x_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots n$) die sämtlichen Differenzen von f_n gegenüber den Elementen, so heisse f_n ein Mittelwert des Complexes, wenn nicht alle $f_n - x_\nu$ dasselbe Vorzeichen besitzen. Dabei kann es vorkommen, dass f_n mit einem (oder mehreren) Elementen x_ν übereinstimmt. Nur bei den Randwerten x_1 und x_n soll dies ausgeschlossen werden, solange nicht alle x_ν einander gleich sind. In diesem Falle stimmt auch f_n mit allen Werten x_ν überein. Inzidenz von f_n mit einem Randwerte verlangt also die Gleichheit aller x_ν unter sich und mit f_n (Koinzidenz).

Ein so definierter Mittelwert eines Complexes ist eine Funktion (im allgemeinsten Sinne) seiner Elemente und kann als solche angegeben werden durch explizite oder implizite Aufstellung eines Bildungsgesetzes (Form), wie dies z. B. der Fall ist bei den klassischen Mittelwertsformen des einfachen und allgemeinen (oder gewogenen) arithmetischen Mittels, des geometrischen Mittels, des harmonischen Mittels, der Potenzmittel, den Mitteln von SEELIGER[1]), von PIZZETTI[2]) und andern.

Aber nicht immer ist dieses Bildungsgesetz von Anfang an bekannt. Man steht dann vor der Aufgabe, ein solches auf Grund der Forderung gewisser funktionaler Eigenschaften zu finden. Nun kann

[1]) H. SEELIGER: «Bemerkung über das arithmetische Mittel». Astr. Nachr. CXXXII, 1893.

[2]) P. PIZZETTI: «I fondamenti mathematici per la critica dei risultati sperimentali», in: Atti della Regia Università di Genova, 1892.

es sich ereignen, dass eine gewisse Eigenschaft mehreren Klassen von Mitteln gemeinsam ist. Wird z. B. von einem Mittel die Eigenschaft der Homogenität erster Ordnung verlangt, also

a) $$f_n(tx_1, tx_2, \dots tx_n) = t f_n(x_1, x_2, \dots x_n)$$

so genügen die erwähnten klassischen Mittel, die Potenzmittel, die von SEELIGER, PIZZETTI und unzählige andere dieser Forderung, so dass auf Grund dieser einen Forderung eine Scheidung der erwähnten Mittelformen nicht möglich ist.

Soll anderseits ein Mittel die Eigenschaft besitzen

b) $$f_n(x_1+h, x_2+h, \dots x_n+h) = f_n(x_1, x_2, \dots x_n) + h \quad \text{(Translation)}$$

so entsprechen dem z. B. das einfache und das gewogene arithmetische Mittel, die PIZZETTIschen Mittel mit der impliziten Definition:

$$(f_n - x_1)^{2k+1} + (f_n - x_2)^{2k+1} + \dots (f_n - x_n)^{2k+1} = 0 \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

sowie jedes aus einem allgemeinen Ansatz:

$$F(f_n - x_1, f_n - x_2, \dots f_n - x_n) = 0$$

sich ergebende Mittel. Man ersieht daraus, dass z. B. das einfache und das gewogene arithmetische Mittel, aber ebenso auch die PIZZETTIschen Mittel den Forderungen a) und b) genügen. Es müssten also zur Trennung dieser Klassen noch weitere Forderungen gestellt und erfüllt werden.

Dabei ist weiter zu beachten, dass die verschiedenen Mittelklassen überhaupt nicht für alle Indizes n unterscheidbar sind. So müssen für den Index 1, wie sich auf der einleitenden Definition ergibt, alle denkbaren Mittel zusammenfliessen. Für den Index 2 lautet das einfache arithmetische Mittel:

$$f_2\,(\text{arithm.}) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Das PIZZETTIsche Mittel (aus dem Ansatz):

$$(f_2 - x_1)^{2k+1} + (f_2 - x_2)^{2k+1} = 0$$

liefert:

$$f_2\,(\text{PIZZETTI}) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

also denselben Wert. Schon für $n = 3$ gehen aber die beiden Formen des arithmetischen und des PIZZETTIschen Mittels völlig auseinander. Die Klassifikation wird nun wesentlich erhellt, wenn ein neues Prinzip, das für alle Mittelwerte gewissermassen als «ratio intrinseca» gültig ist, Anwendung findet. Dies wird im folgenden kurz erläutert.

Die Inzidenz.

Nach den Ausführungen der Einleitung kann ein Mittelwert der Elemente $x_1 \dots x_n$ mit irgend einem der «innern» Elemente dem Werte nach übereinstimmen, unter der Bedingung $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ auch mit einem Randwerte. Daraus ergibt sich die Möglichkeit der Regression von n auf $n-1$, d. h. die Möglichkeit, aus irgend einem Mittelwert von n-Elementen einen neuen Mittelwert von $n-1$-Elementen abzuleiten. Sei x_ν irgend eines der Elemente und inzidiert $f_n = f_n(x_1, \dots x_\nu, \dots x_n)$ mit x_ν, dann bestehen zwei mögliche Fälle:

1. x_ν ist ein inneres Element des Complexes der n-Elemente; dann liegt es auch zwischen den Randwerten des Complexes $x_1, \dots x_{\nu-1}, x_{\nu+1} \dots x_n$ und ist damit ein Mittelwert f_{n-1} dieses nur noch aus $n-1$-Elementen bestehenden Complexes. Somit geht $f_n = x_\nu$ in einen neuen Mittelwert f_{n-1} über.

2. x_ν ist ein Randelement; dann verlangt $f_n = x_\nu$ auch die Gleichungen:

$$f_n = x_1, \; f_n = x_2, \; \dots \; f_n = x_{\nu-1}, \; f_n = x_{\nu+1}, \; \dots \; f_n = x_n,$$

d. h. f_n ist ein f_{n-1} dieser nun koinzidierenden $n-1$-Elemente.

In beiden Fällen ergibt sich, dass mit dem Ansatz:

$$f_n = x_\nu$$

f_n in einen Mittelwert f_{n-1}, der übrigen n—1-Elemente übergegangen ist. Dies bedeutet aber, dass bei der Regression durch Inzidenz die Unterscheidung : innerer Wert — Randwert nicht mehr a priori gemacht werden muss. Ist z. B. $f_3(x, y, z) = z$, so ist $z = f_2(x, y)$ ein Mittelwert von x und y, welches auch die Anordnung nach Grösse der Elemente sei. Deshalb wird im folgenden die Grössenfolge der x_ν im allgemeinen irrelevant. Das Prinzip der Inzidenz führt unmittelbar durch die Regression $n, n-1, \dots, 2, 1$ von jedem Mittelwerte f_n aus zur Aufstellung einer *Inzidenzklasse.* Dabei könnte auch eine Erweiterung des Prinzips benützt werden mit einem Ansatz:

$$f_n = f_n\,(x_1, x_2, \dots x_v, x_{v+1}, \dots x_{v+k-1}, \dots x_n) = x_v$$

mit der Voraussetzung $x_v = x_{v+1} = x_{v+2} = \dots x_{v+k-1}$. Dadurch wird man von f_n in einem Schritt zurückgeführt zu einem neuen f_{n-k} der übrigen n—k-Elemente $x_1, \dots x_{v-1}, x_{v+k} \dots x_n$.

Einige Beispiele für Regression durch Inzidenz.

Der Kürze wegen werden dabei zuweilen für n bestimmte Zahlen gewählt. Wie leicht zu sehen, berührt dies die Allgemeingültigkeit der Resultate nicht.

1. Sei

$$f_3\,(x, y, z) = \frac{x+y+z}{3}$$

aus $$f_3\,(x, y, z) = z$$

folgt $$x+y+z = 3\,z, \qquad z = \frac{x+y}{2}$$

oder allgemein aus: $$f_n\,(x_1, \dots x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x_n$$

folgt $$z = f_{n-1}\,(x_1, \dots x_{n-1}) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$$

Die einfachen arithmetischen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

2. Sei

$$f_3\,(x, y, z) = \sqrt[3]{x\,y\,z} \qquad (x, y, z \text{ pos.})$$

aus $f_3\,(x, y, z) =$ folgt $x\,y\,z = z^3, \quad z = \sqrt{x\,y}$

für beliebigen Index n: aus

$$f_n\,(x_1 \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$$

folgt durch Inzidenz:

$$f_{n-1}\,(x_1 \dots x_{n-1}) = \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \dots x_{n-1}}$$

Die geometrischen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

3. Sei

$$\frac{1}{f_3(x, y, z)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \quad (x, y, z \text{ pos.})$$

aus $f_3 = z$ folgt

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); \quad \frac{3}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

und

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Ebenso für beliebiges n:

aus

$$\frac{1}{f_n} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$$

folgt durch Inzidenz:

$$\frac{1}{f_{n-1}} + \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}}\right)$$

Die harmonischen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

4. Sei

$$f_3(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} \quad (x, y, z \text{ pos.})$$

durch die Inzidenz

$$f_3(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} = z$$

folgt: $$x^2 + y^2 + z^2 = z\,(x + y) + z^2; \quad z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

Ebenso: aus

$$f_n = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

folgt durch Inzidenz

$$f_{n-1} = \frac{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}{x_1 + \dots + x_{n-1}}$$

Die SEELIGER-Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

5. Sei f_3 definiert durch:

$$(f_3-x)^{2k+1}+(f_3-y)^{2k+1}+(f_3-z)^{2k+1}=0$$

Inzidiert f_3 mit z, so bleibt

$$(f_2-x)^{2k+1}+(f_3-y)^{2k+1}=0,$$

wodurch f_3 zu einem f_2 wird. Ebenso aus:

$$(f_n-x_1)^{2k+1}+(f_n-x_2)^{2k+1}+\dots(f_n-x_{n-1})^{2k+1}+(f_n-x_n)^{2k+1}=0$$

folgt durch die Inzidenz $f_n = x_n$:

$$(f_{n-1}-x_1)^{2k+1}+(f_{n-1}-x_2)^{2k+1}+\dots(f_{n-1}-x_{n-1})^{2k+1}=0$$

Die PIZZETTIschen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

6. Sei ein Mittel f_n definiert durch:

$$F(f_n-x_\nu)=0$$

für alle ν von 1 bis n und inzidiert f_n mit x_n, so wird

$$F(f_n-x_\nu)=0$$

für alle ν von 1 bis n—1, wodurch f_n zu einem f_{n-1} wird. Die durch $F = 0$ definierten Mittel aller Indizes gehören also zu einer Inzidenzklasse.

7. Sei:

$$f_3(x,y,z)=\frac{ax+by+cz}{a+b+c};$$

aus $f_3=z$ folgt: $ax+by+cz=(a+b)\,z+cz,$

also $$z=\frac{ax+by}{a+b}$$

Allgemein folgt aus:

$$f_n(x_1\dots x_n)=\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu}$$

durch Inzidenz:

$$f_{n-1}(x_1\dots x_{n-1})=\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}a_\nu}$$

Die allgemeinen (gewogenen) arithmetischen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

Alle in diesen Beispielen vorkommenden Mittelwertsformenklassen erweisen sich als Inzidenzklassen.

Wenn für einen bestimmten Index ein Mittelwert gegeben ist, dessen Zugehörigkeit zu einer bestimmten Formenklasse nicht ersichtlich ist, weil keine Bildungsvorschrift für allgemeinen Index n vorliegt, so wird durch Inzidenz-Regression auch in solchen Fällen eine Klasse erzeugt, und damit erweist sich das Verfahren als *klassenbildendes* Prinzip. Ein Beispiel:

Sei:

$$f_3 = \frac{\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+z}{2};$$

f_3 ist (für alle pos. x, y, z) ein Mittelwert, dessen Zugehörigkeit zu einer bestimmten Klasse (für allgemeines n) nicht ersichtlich ist. Bildet man durch Inzidenz mit y, also

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+z=2y,$$

daraus

$$x^2+y^2+xz+yz = 2xy+2y^2$$

$$y^2-y(z-2x)-x^2-zx=0$$

so erweist sich $y = f_2(x, z)$ als Mittelwert von x und z für alle pos. x, z

$$y=\frac{z-2x+\sqrt{z^2+8x^2}}{2}$$

(Das neg. Vorzeichen der Quadratwurzel scheidet aus.)

Inzidenz mit z würde ergeben:

$$\frac{\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+z}{2}=z; \qquad f_2(x,y)=z=\frac{x^2+y^2}{x+y}$$

Die Inzidenzklasse ist verzweigt. (Siehe pag. 287.)

Dazu noch einige Bemerkungen allgemeiner Art:

Es gibt viele Mittelwerte mit einer Eigenschaft, die ich *Transitivität* nennen möchte. Sei

$$X_n \text{ ein Mittelwert von } x_1 \dots x_\nu \dots x_n \text{ und}$$
$$Y_n \text{ ein Mittelwert von } y_1 \dots y_\nu \dots y_n$$

von der Art, dass $y_1 = \varphi(x_1), \dots y_\nu = \varphi(x_\nu) \dots y_n = \varphi(x_n)$ $Y_n = \varphi(X_n)$ zur Folge hat (Transitivität bezüglich φ). Durch Inzidenz von X_n mit x_n wird aus X_n ein $X_{n-1}(x_1 \dots x_{n-1})$. Da aber Inzidenz von X_n mit x_n auch Inzidenz von $Y_n\,(= \varphi(X_n))$ mit $y_n\,(= \varphi(x_n))$ bedeutet, so wird aus Y_n ein $Y_{n-1}(y_1 \dots y_{n-1})$, d. h. die Transitivität bezügl. φ überträgt sich auf die ganze Inzidenzklasse.

Wird z. B. die Abbildung durch a) (Homogenität erster Ordnung) vermittelt, so sind, wie schon erwähnt, die klassischen Mittel, die Potenzmittel, die von SEELIGER, von PIZZETTI usw. transitiv $f(tx_\nu) = tf(x_\nu)$.

Beim allgemeinen arithmetischen Mittel z. B. wird aus

$$X_3 = \frac{ax + by + cz}{a + b + c}$$

durch Einsetzen von tx, ty, tz

$$Y_3 = tX_3,$$

und diese Eigenschaft gilt für die ganze Inzidenzklasse der allgemeinen arithmetischen Mittel. Aehnliches gilt für die andern oben genannten Beispiele.

Ebenso wenn die Abbildung durch b) vermittelt wird (Translation).

$$f_n(x_\nu + h) = f_n(x_\nu) + h$$

(für alle ν von 1 bis n) gilt somit auch für die ganze Inzidenzklasse eines solchen f_n, wofür, wie oben, das allgemeine arithmetische Mittel als Beispiel dienen kann.

Inzidenz
bei symmetrischen und parasymmetrischen Mitteln.

Ein Mittelwert der Elemente $x_1 \dots x_\nu \dots x_n$ heisse *symmetrisch,* wenn $f_n = f_n(x_1 \dots x_\nu \dots x_n)$ bei jeder Permutation der Elemente unverändert bleibt. Ein Mittelwert der Elemente $x_1 \dots x_\nu \dots x_n$, der zugleich eine Funktion der Parameter $a_1 \dots a_\nu \dots a_n$ ist, heisse *parasymmetrisch,* wenn jedem Elemente x_ν ein Parameter a_ν derart zugeordnet ist, dass jede Permutation der x_ν dieselbe Permutation der a_ν bedingt und dabei

$$f_n = f_n \begin{pmatrix} x_1, \dots x_\nu \dots x_n \\ a_1, \dots a_\nu \dots a_n \end{pmatrix}$$

unverändert bleibt.

Ist ein Mittel weder symmetrisch noch parasymmetrisch, so verzweigt sich seine Inzidenzklasse. Sei nämlich $f_3(x, y, z)$ ein solches Mittel und führen wir eine Bezeichnungsweise ein, die der in der Differentialrechnung üblichen nachgebildet ist, indem wir das durch Inzidenz von $f_3(x, y, z)$ mit z entstehende Mittel von x und y mit $f_z(x, y)$ bezeichnen, so werden sich $f_x(y, z)$, $f_y(x, z)$ und $f_z(x, y)$ in ihrem *Aufbau unterscheiden,* weil im Aufbau von $f_3(x, y, z)$ x, y und z eine verschiedene Rolle spielen. Ebenso bei beliebigem n[3]).

Ist dagegen $f_3(x, y, z)$ ein symmetrisches Mittel und bilden wir $f_z(x, y)$ durch Inzidierung mit dem dritten Elemente z, setzen darauf: $f_3(x, y, z) = f_3(x, z, y)$ und bilden daraus $f_y(x, z)$ durch Inzidierung mit dem *dritten* Elemente y, so ist in beiden Fällen Inzidierung mit dem *dritten* Elemente vorgenommen. $f_z(x, y)$ und $f_y(x, z)$ können sich also in ihrem Bau nicht unterscheiden. Ebenso bei beliebigem n.

Ferner folgt aus

$$f_3(x, y, z) = z \quad \text{(Inzidenz)}$$

$$z = f_2(x, y)$$

und aus

$$f_3(y, x, z) = z$$

$$z = f_2(y, x)$$

[3]) Vgl. Beispiel pag. 285.

Da aber z in beiden Fällen denselben Wert hat, so folgt:

$$f_2(x, y) = f_2(y, x)$$

Ebenso für beliebiges n.

Somit ergeben sich die Sätze:

Die Inzidenzklasse eines jeden symmetrischen Mittels ist unverzweigt.

Aus jedem symmetrischen Mittel $f_n(x_1, \dots x_n)$ ergibt sich durch Inzidenz ein ebenfalls symmetrisches Mittel $f_{n-1}(x_1, \dots x_{n-1})$.

Ist

$$f_3\begin{pmatrix} x, y, z \\ a, b, c \end{pmatrix}$$

ein parasymmetrisches Mittel, bleibt also bei allen Permutationen der $\begin{pmatrix} x_\nu \\ a_\nu \end{pmatrix}$ unverändert, und bilden wir $f_z(x, y)$ durch Inzidierung mit dem *dritten* Elemente z, setzen darauf:

$$f_3\begin{pmatrix} x, y, z \\ a, b, c \end{pmatrix} = f_3\begin{pmatrix} x, z, y \\ a, c, b \end{pmatrix}$$

und bilden daraus $f_y(x, z)$ durch Inzidierung mit dem *dritten* Elemente y, so ist in beiden Fällen Inzidierung mit dem *dritten* Elemente vorgenommen. $f_z(x, y)$ und $f_y(x, z)$ können sich also in ihrem allgemeinen Bau nicht unterscheiden. Ebenso bei beliebigem n.

Es folgt durch Inzidenz:

$$f_3\begin{pmatrix} x, y, z \\ a, b, c \end{pmatrix} = z$$

$$z = f_2\begin{pmatrix} x, y \\ a, b \end{pmatrix}$$

und aus

$$f_3\begin{pmatrix} y, x, z \\ b, a, c \end{pmatrix} = z$$

$$z = f_2\begin{pmatrix} y, x \\ b, a \end{pmatrix}$$

Da aber z in beiden Fällen denselben Wert hat, so folgt:

$$f_2\begin{pmatrix}x, y\\ a, b\end{pmatrix} = f_2\begin{pmatrix}y, x\\ b, a\end{pmatrix}$$

Ebenso für beliebiges n.

Es ergibt sich:

Die Inzidenzklasse eines jeden parasymmetrischen Mittels ist in bezug auf den allgemeinen Bau unverzweigt.

Aus jedem parasymmetrischen Mittel

$$f_n\begin{pmatrix}x_1, x_2, \dots x_n\\ a_1, a_2, \dots a_n\end{pmatrix}$$

ergibt sich durch Inzidenz ein ebenfalls parasymmetrisches Mittel

$$f_{n-1}\begin{pmatrix}x_1, x_2, \dots x_{n-1}\\ a_1, a_2, \dots a_{n-1}\end{pmatrix}$$

Aus diesen kurzen Ausführungen geht hervor, wie ein einfaches Prinzip — eben das der Inzidenz — zur Klassifikation der Mittelwerte beitragen kann. Die Uebertragung auf das complexe Gebiet liegt dabei nahe.

(Manuskript am 1. Mai 1943 eingegangen.)