Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Schaffhausen

Band: 18 (1943)

Artikel: Zur Klassifizierung der Mittelwerte

Autor: Habicht, Conrad

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-584933

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ZUR KLASSIFIZIERUNG DER MITTELWERTE

von Seitorefig, Pizzelli und stockhilge andere dieser Forde

Von

CONRAD HABICHT

Der Complex der nach ihrer Grösse geordneten reellen Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots \leq x_n$ vom Index n (Anzahl dieser Zahlen oder Elemente) sei gegeben. Ist f_n eine reelle Funktion der x_v und sind $f_n - x_v$ ($v = 1, 2, \ldots n$) die sämtlichen Differenzen von f_n gegenüber den Elementen, so heisse f_n ein Mittelwert des Complexes, wenn nicht alle $f_n - x_v$ dasselbe Vorzeichen besitzen. Dabei kann es vorkommen, dass f_n mit einem (oder mehreren) Elementen x_v übereinstimmt. Nur bei den Randwerten x_1 und x_n soll dies ausgeschlossen werden, solange nicht alle x_v einander gleich sind. In diesem Falle stimmt auch f_n mit allen Werten x_v überein. Inzidenz von f_n mit einem Randwerte verlangt also die Gleichheit aller x_v unter sich und mit f_n (Koinzidenz).

Ein so definierter Mittelwert eines Complexes ist eine Funktion (im allgemeinsten Sinne) seiner Elemente und kann als solche angegeben werden durch explizite oder implizite Aufstellung eines Bildungsgesetzes (Form), wie dies z. B. der Fall ist bei den klassischen Mittelwertsformen des einfachen und allgemeinen (oder gewogenen) arithmetischen Mittels, des geometrischen Mittels, des harmonischen Mittels, der Potenzmittel, den Mitteln von SEELIGER¹), von PIZZETTI²) und andern.

Aber nicht immer ist dieses Bildungsgesetz von Anfang an bekannt. Man steht dann vor der Aufgabe, ein solches auf Grund der Forderung gewisser funktionaler Eigenschaften zu finden. Nun kann

¹⁾ H. SEELIGER: «Bemerkung über das arithmetische Mittel». Astr. Nachr. CXXXII. 1893.

²⁾ P. PIZZETTI: «I fondamenti mathematici per la critica dei risultati sperimentali», in: Atti della Regia Università di Genova, 1892.

es sich ereignen, dass eine gewisse Eigenschaft mehreren Klassen von Mitteln gemeinsam ist. Wird z. B. von einem Mittel die Eigenschaft der Homogenität erster Ordnung verlangt, also

a)
$$f_n(tx_1, tx_2, ... tx_n) = t f_n(x_1, x_2, ... x_n)$$

so genügen die erwähnten klassischen Mittel, die Potenzmittel, die von SEELIGER, PIZZETTI und unzählige andere dieser Forderung, so dass auf Grund dieser einen Forderung eine Scheidung der erwähnten Mittelformen nicht möglich ist.

Soll anderseits ein Mittel die Eigenschaft besitzen

b)
$$f_n(x_1+h, x_2+h, ... x_n+h) = f_n(x_1, x_2, ... x_n) + h$$
 (Translation)

so entsprechen dem z. B. das einfache und das gewogene arithmetische Mittel, die PIZZETTI schen Mittel mit der impliziten Definition:

$$(f_n-x_1)^{2k+1}+(f_n-x_2)^{2k+1}+...(f_n-x_n)^{2k+1}=0$$
 (k ganzzahlig) sowie jedes aus einem allgemeinen Ansatz:

$$F(f_n-x_1, f_n-x_2, ... f_n-x_n)=0$$

sich ergebende Mittel. Man ersieht daraus, dass z. B. das einfache und das gewogene arithmetische Mittel, aber ebenso auch die PIZZETTIschen Mittel den Forderungen a) und b) genügen. Es müssten also zur Trennung dieser Klassen noch weitere Forderungen gestellt und erfüllt werden.

Dabei ist weiter zu beachten, dass die verschiedenen Mittelklassen überhaupt nicht für alle Indizes n unterscheidbar sind. So müssen für den Index 1, wie sich auf der einleitenden Definition ergibt, alle denkbaren Mittel zusammenfliessen. Für den Index 2 lautet das einfache arithmetische Mittel:

$$f_2 \text{ (arithm.)} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Das PIZZETTIsche Mittel (aus dem Ansatz):

$$(f_2-x_1)^{2k+1}+(f_2-x_2)^{2k+1}=0$$

liefert:

$$f_2 \text{ (PIZZETTI)} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

also denselben Wert. Schon für n=3 gehen aber die beiden Formen des arithmetischen und des PIZZETTIschen Mittels völlig auseinander. Die Klassifikation wird nun wesentlich erhellt, wenn ein neues Prinzip, das für alle Mittelwerte gewissermassen als «ratio intrinseca» gültig ist, Anwendung findet. Dies wird im folgenden kurz erläutert.

Die Inzidenz.

Nach den Ausführungen der Einleitung kann ein Mittelwert der Elemente $x_1 \dots x_n$ mit irgend einem der «innern» Elemente dem Werte nach übereinstimmen, unter der Bedingung $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ auch mit einem Randwerte. Daraus ergibt sich die Möglichkeit der Regression von n auf n-1, d. h. die Möglichkeit, aus irgend einem Mittelwert von n-Elementen einen neuen Mittelwert von n-1-Elementen abzuleiten. Sei x_v irgend eines der Elemente und inzidiert $f_n = f_n(x_1, \dots x_v, \dots x_n)$ mit x_v , dann bestehen zwei mögliche Fälle:

- 1. x_v ist ein inneres Element des Complexes der n-Elemente; dann liegt es auch zwischen den Randwerten des Complexes $x_1, \dots x_{v-1}, x_{v+1} \dots x_n$ und ist damit ein Mittelwert f_{n-1} dieses nur noch aus n-1-Elementen bestehenden Complexes. Somit geht $f_n = x_v$ in einen neuen Mittelwert f_{n-1} über.
- 2. x_v ist ein Randelement; dann verlangt $f_n = x_v$ auch die Gleichungen:

$$f_n = x_1$$
, $f_n = x_2$, ... $f_n = x_{\nu-1}$, $f_n = x_{\nu+1}$, ... $f_n = x_n$,

d. h. f_n ist ein f_{n-1} dieser nun koinzidierenden n-1-Elemente.

In beiden Fällen ergibt sich, dass mit dem Ansatz:

$$f_n = x_{\nu}$$

 f_n in einen Mittelwert f_{n-1} , der übrigen n—1-Elemente übergegangen ist. Dies bedeutet aber, dass bei der Regression durch Inzidenz die Unterscheidung: innerer Wert — Randwert nicht mehr a priori gemacht werden muss. Ist z. B. $f_3(x, y, z) = z$, so ist $z = f_2(x, y)$ ein Mittelwert von x und y, welches auch die Anordnung nach Grösse der Elemente sei. Deshalb wird im folgenden die Grössenfolge der x_y im allgemeinen irrelevant. Das Prinzip der Inzidenz führt unmittelbar durch die Regression n, n—1, ..., 2, 1 von jedem Mittel-

werte f_n aus zur Aufstellung einer *Inzidenzklasse*. Dabei könnte auch eine Erweiterung des Prinzips benützt werden mit einem Ansatz:

$$f_n = f_n (x_1, x_2, ... x_{\nu}, x_{\nu+1}, ... x_{\nu+k-1}, ... x_n) = x_{\nu}$$

mit der Voraussetzung $x_v = x_{v+1} = x_{v+2} = \dots x_{v+k-1}$. Dadurch wird man von f_n in einem Schritt zurückgeführt zu einem neuen f_{n-k} der übrigen n-k-Elemente $x_1, \dots x_{v-1}, x_{v+k} \dots x_n$.

Einige Beispiele für Regression durch Inzidenz.

Der Kürze wegen werden dabei zuweilen für *n* bestimmte Zahlen gewählt. Wie leicht zu sehen, berührt dies die Allgemeingültigkeit der Resultate nicht.

1. Sei

$$f_3(x, y, z) = \frac{x+y+z}{3}$$
aus
$$f_3(x, y, z) = z$$
folgt
$$x+y+z=3z, \quad z=\frac{x+y}{2}$$
oder allgemein aus:
$$f_n(x_1, ... x_n) = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} = x_n$$

folgt
$$z = f_{n-1}(x_1, ... x_{n-1}) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{n-1}$$

Die einfachen arithmetischen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

2. Sei

$$f_3(x, y, z) = \sqrt[3]{x y z} \qquad (x, y, z \text{ pos.})$$
aus
$$f_3(x, y, z) = \text{ folgt } x y z = z^3, \quad z = \sqrt{x y}$$

für beliebigen Index n: aus

$$f_n(x_1 \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$$

folgt durch Inzidenz:

$$f_{n-1}(x_1 \dots x_{n-1}) = \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \dots x_{n-1}}$$

Die geometrischen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

3. Sei

$$\frac{1}{f_3(x, y, z)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (x, y, z \text{ pos.})$$

aus $f_3 = z$ folgt

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right); \ \frac{3}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

Ebenso für beliebiges n:

aus

$$\frac{1}{f_n} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

folgt durch Inzidenz:

$$\frac{1}{f_{n-1}} + \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} \right)$$

Die harmonischen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

4. Sei

$$f_3(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} (x, y, z \text{ pos.})$$

durch die Inzidenz

$$f_3(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} = z$$

folgt:

$$x^2+y^2+z^2=z (x+y)+z^2; z=\frac{x^2+y^2}{x+y}$$

Ebenso: aus

$$f_n = \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

folgt durch Inzidenz

$$f_{n-1} = \frac{x_1^2 + ... + x_{n-1}^2}{x_1 + ... + x_{n-1}}$$

Die SEELIGER-Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

5. Sei f_3 definiert durch:

$$(f_3-x)^{2k+1}+(f_3-y)^{2k+1}+(f_3-z)^{2k+1}=0$$

Inzidiert f_3 mit z, so bleibt

$$(f_2-x)^{2k+1}+(f_3-y)^{2k+1}=0,$$

wodurch f3 zu einem f2 wird. Ebenso aus:

$$(f_n-x_1)^{2k+1}+(f_n-x_2)^{2k+1}+\dots(f_n-x_{n-1})^{2k+1}+(f_n-x_n)^{2k+1}=0$$
 folgt durch die Inzidenz $f_n=x_n$:

$$(f_{n-1}-x_1)^{2k+1}+(f_{n-1}-x_2)^{2k+1}+\dots(f_{n-1}-x_{n-1})^{2k+1}=0$$

Die PIZZETTIschen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

6. Sei ein Mittel f_n definiert durch:

$$F\left(f_{n}-x_{\nu}\right)=0$$

für alle ν von 1 bis n und inzidiert f_n mit x_n , so wird

$$F\left(f_{n}-x_{\nu}\right)=0$$

für alle ν von 1 bis n-1, wodurch f_n zu einem f_{n-1} wird. Die durch F=0 definierten Mittel aller Indizes gehören also zu einer Inzidenzklasse.

7. Sei:

aus

also

$$f_3(x, y, z) = \frac{ax + by + cz}{a + b + c};$$

$$f_3 = z \qquad \text{folgt:} \quad ax + by + cz = (a + b) z + cz,$$

$$z = \frac{ax + by}{a + b}$$

Allgemein folgt aus: $f_n(x_1 ... x_n) = \frac{\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} x_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^n a_{\nu}}$

durch Inzidenz:
$$f_{n-1} (x_1 ... x_{n-1}) = \frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu} x_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu}}$$

Die allgemeinen (gewogenen) arithmetischen Mittel aller Indizes bilden eine Inzidenzklasse.

Alle in diesen Beispielen vorkommenden Mittelwertsformenklassen erweisen sich als Inzidenzklassen.

Wenn für einen bestimmten Index ein Mittelwert gegeben ist, dessen Zugehörigkeit zu einer bestimmten Formenklasse nicht ersichtlich ist, weil keine Bildungsvorschrift für allgemeinen Index n vorliegt, so wird durch Inzidenz-Regression auch in solchen Fällen eine Klasse erzeugt, und damit erweist sich das Verfahren als klassenbildendes Prinzip. Ein Beispiel:

Sei:

$$f_3 = \frac{\frac{x^2 + y^2}{x + y} + z}{2};$$

 f_3 ist (für alle pos. x, y, z) ein Mittelwert, dessen Zugehörigkeit zu einer bestimmten Klasse (für allgemeines n) nicht ersichtlich ist. Bildet man durch Inzidenz mit y, also

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + z = 2y,$$

daraus

$$x^{2}+y^{2}+xz+yz = 2xy+2y^{2}$$
$$y^{2}-y(z-2x)-x^{2}-zx = 0$$

so erweist sich $y = f_2(x, z)$ als Mittelwert von x und z für alle pos. x, z

$$y = \frac{z - 2x + \sqrt{z^2 + 8x^2}}{2}$$

(Das neg. Vorzeichen der Quadratwurzel scheidet aus.)

Inzidenz mit z würde ergeben:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + z$$

$$\frac{z}{2} = z; f_2(x, y) = z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

Die Inzidenzklasse ist verzweigt. (Siehe pag. 287.)

Dazu noch einige Bemerkungen allgemeiner Art:

Es gibt viele Mittelwerte mit einer Eigenschaft, die ich Transitivität nennen möchte. Sei

$$X_n$$
 ein Mittelwert von $x_1 \dots x_{\nu} \dots x_n$ und Y_n ein Mittelwert von $y_1 \dots y_{\nu} \dots y_n$

von der Art, dass $y_1 = \varphi(x_1)$, ... $y_v = \varphi(x_v)$... $y_n = \varphi(x_n)$ $Y_n = \varphi(X_n)$ zur Folge hat (Transitivität bezüglich φ). Durch Inzidenz von X_n mit x_n wird aus X_n ein $X_{n-1}(x_1 \dots x_{n-1})$. Da aber Inzidenz von X_n mit x_n auch Inzidenz von $Y_n (= \varphi(X_n))$ mit $y_n (= \varphi(x_n))$ bedeutet, so wird aus Y_n ein $Y_{n-1}(y_1 \dots y_{n-1})$, d.h. die Transitivität bezügl. φ überträgt sich auf die ganze Inzidenzklasse.

Wird z. B. die Abbildung durch a) (Homogenität erster Ordnung) vermittelt, so sind, wie schon erwähnt, die klassischen Mittel, die Potenzmittel, die von SEELIGER, von PIZZETTI usw. transitiv $f(tx_v) = tf(x_v)$.

Beim allgemeinen arithmetischen Mittel z. B. wird aus

$$X_3 = \frac{ax + by + cz}{a + b + c}$$

durch Einsetzen von tx, ty, tz

offer the contract of
$$Y_3 = tX_3$$
,

und diese Eigenschaft gilt für die ganze Inzidenzklasse der allgemeinen arithmetischen Mittel. Aehnliches gilt für die andern oben genannten Beispiele.

Ebenso wenn die Abbildung durch b) vermittelt wird (Translation).

$$f_n(x_v+h)=f_n(x_v)+h$$

(für alle ν von 1 bis n) gilt somit auch für die ganze Inzidenzklasse eines solchen f_n , wofür, wie oben, das allgemeine arithmetische Mittel als Beispiel dienen kann.

Inzidenz

bei symmetrischen und parasymmetrischen Mitteln.

Ein Mittelwert der Elemente $x_1 \dots x_v \dots x_n$ heisse symmetrisch, wenn $f_n = f_n (x_1 \dots x_v \dots x_n)$ bei jeder Permutation der Elemente unverändert bleibt. Ein Mittelwert der Elemente $x_1 \dots x_v \dots x_n$, der zugleich eine Funktion der Parameter $a_1 \dots a_v \dots a_n$ ist, heisse parasymmetrisch, wenn jedem Elemente x_v ein Parameter a_v derart zugeordnet ist, dass jede Permutation der x_v dieselbe Permutation der a_v bedingt und dabei

$$f_n = f_n \begin{pmatrix} x_1, \dots x_{\nu} \dots x_n \\ a_1, \dots a_{\nu} \dots a_n \end{pmatrix}$$

unverändert bleibt.

Ist ein Mittel weder symmetrisch noch parasymmetrisch, so verzweigt sich seine Inzidenzklasse. Sei nämlich f_3 (x, y, z) ein solches Mittel und führen wir eine Bezeichnungsweise ein, die der in der Differentialrechnung üblichen nachgebildet ist, indem wir das durch Inzidenz von f_3 (x, y, z) mit z entstehende Mittel von x und y mit f_z (x, y) bezeichnen, so werden sich f_x (y, z), f_y (x, z) und f_z (x, y) in ihrem Aufbau unterscheiden, weil im Aufbau von f_3 (x, y, z) x, y und z eine verschiedene Rolle spielen. Ebenso bei beliebigem n^3).

Ist dagegen $f_3(x, y, z)$ ein symmetrisches Mittel und bilden wir $f_z(x, y)$ durch Inzidierung mit dem dritten Elemente z, setzen darauf: $f_3(x, y, z) = f_3(x, z, y)$ und bilden daraus $f_y(x, z)$ durch Inzidierung mit dem dritten Elemente y, so ist in beiden Fällen Inzidierung mit dem dritten Elemente vorgenommen. $f_z(x, y)$ und $f_y(x, z)$ können sich also in ihrem Bau nicht unterscheiden. Ebenso bei beliebigem n.

Ferner folgt aus

$$f_3(x, y, z) = z$$
 (Inzidenz)
 $z = f_2(x, y)$

und aus

$$f_3(y, x, z) = z$$
$$z = f_2(y, x)$$

³⁾ Vgl. Beispiel pag. 285.

Da aber z in beiden Fällen denselben Wert hat, so folgt:

$$f_2(x,y) = f_2(y,x)$$

Ebenso für beliebiges n.

Somit ergeben sich die Sätze:

Die Inzidenzklasse eines jeden symmetrischen Mittels ist unverzweigt.

Aus jedem symmetrischen Mittel f_n $(x_1, ... x_n)$ ergibt sich durch Inzidenz ein ebenfalls symmetrisches Mittel f_{n-1} $(x_1, ... x_{n-1})$.

Ist

$$f_3\begin{pmatrix} x, y, z \\ a, b, c \end{pmatrix}$$

ein parasymmetrisches Mittel, bleibt also bei allen Permutationen der $\begin{pmatrix} x_{\nu} \\ a_{\nu} \end{pmatrix}$ unverändert, und bilden wir $f_z(x, y)$ durch Inzidierung mit dem *dritten* Elemente z, setzen darauf:

$$f_3\begin{pmatrix} x, y, z \\ a, b, c \end{pmatrix} = f_3\begin{pmatrix} x, z, y \\ a, c, b \end{pmatrix}$$

und bilden daraus $f_y(x, z)$ durch Inzidierung mit dem dritten Elemente y, so ist in beiden Fällen Inzidierung mit dem dritten Elemente vorgenommen. $f_z(x, y)$ und $f_y(x, z)$ können sich also in ihrem allgemeinen Bau nicht unterscheiden. Ebenso bei beliebigem n.

Es folgt durch Inzidenz:

$$f_3\begin{pmatrix} x, y, z \\ a, b, c \end{pmatrix} = z$$

$$z = f_2\begin{pmatrix} x, y \\ a, b \end{pmatrix}$$

$$f_3\begin{pmatrix} y, x, z \\ b, a, c \end{pmatrix} = z$$

$$z = f_2\begin{pmatrix} y, x \\ b, a \end{pmatrix}$$

und aus

Da aber z in beiden Fällen denselben Wert hat, so folgt:

$$f_2\begin{pmatrix} x, y \\ a, b \end{pmatrix} = f_2\begin{pmatrix} y, x \\ b, a \end{pmatrix}$$

Ebenso für beliebiges n.

Es ergibt sich:

Die Inzidenzklasse eines jeden parasymmetrischen Mittels ist in bezug auf den allgemeinen Bau unverzweigt.

Aus jedem parasymmetrischen Mittel

$$f_n\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_n \\ a_1, a_2, \dots a_n \end{pmatrix}$$

ergibt sich durch Inzidenz ein ebenfalls parasymmetrisches Mittel

$$f_{n-1}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots x_{n-1} \\ a_1, a_2, \dots a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Aus diesen kurzen Ausführungen geht hervor, wie ein einfaches Prinzip — eben das der Inzidenz — zur Klassifikation der Mittelwerte beitragen kann. Die Uebertragung auf das complexe Gebiet liegt dabei nahe.

(Manuskript am 1. Mai 1943 eingegangen.)