Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Schaffhausen
Band: 18 (1943)

Artikel: Planimeter für gebrochene Potenzen
Autor: Dubois, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-584932

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

III. Mathematik, Physik und Chemie

7.

PLANIMETER FÜR GEBROCHENE POTENZEN

von

FR. DUBOIS

(mit 15 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln)

Die nachstehend beschriebenen Planimeter sind vom Verfasser schon vor einigen Jahren in französischer und englischer Sprache beschrieben worden. (Génie Civil, 7. März 1936, und Engineering, 3. Januar und 17. Januar 1936.) Es fehlte jedoch bisher an einer ausführlichen deutschen Veröffentlichung. Diese kann an keiner geeigneteren Stelle erscheinen als in den «Mitteilungen» der Naturforschenden Gesellschaft Schaffhausen, welcher die beiden grossen Planimeterkonstrukteure, Prof. J. Amsler-Laffon und Dr. Alfred Amsler, immer so reges Interesse entgegengebracht haben.

Der anschliessende mathematische Anhang dagegen erscheint hier zum ersten Male.

Bekannt sind die sogenannten Momentenplanimeter oder Integratoren zur Auswertung von Integralen der Form

$$\int y^n \cdot dx$$

über eine geschlossene Kurve mit rechtwinkligen Koordinaten x, y. Bei denselben wird von der Eigenschaft Gebrauch gemacht, dass

$$y^n = l^n \cdot \sin^n \alpha \quad (l = \text{Fahrarmlänge})$$

durch die trigonometrischen sin- und cos-Funktionen des Winkels α und seines 1-, 2-, ... bis n-fachen ausdrückbar ist *). Das gewünschte Potenz-Integral kann deshalb durch ein Linear-Mehrfachplanimeter ermittelt werden, dessen verschiedene Integrierrollen

*) Mathematisch hängt diese Eigenschaft mit der Tatsache zusammen, dass die beiden Reihenentwicklungen

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^{n-1} \cdot i^{n-1}} \left[\sin n\alpha - \frac{n}{1} \sin (n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin (n-4)\alpha + \ldots \text{etc.} \right]$$

für n = ganzzahlig *ungerade*

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^{n-1} \cdot i^n} \left[\cos n\alpha - \frac{n}{1} \cos (n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)\alpha + \ldots \text{etc.} \right] + \text{Const.}$$

für n = ganzzahlig *gerade*.

von selber nach einer endlichen Gliederzahl abbrechen.

durch Zahnräder mit den Uebersetzungen 1 : 1, 1 : 2, ... usw. bis 1 : n, um das 1, 2 ... bis n-fache des Fahrarmwinkels α gegenüber der Ausgangsrichtung gedreht werden.

Diese Eigenschaft liegt den bekannten, von Prof. Dr. Amsler-Laffon erfundenen Integratoren zugrunde.

Der Exponent

$n = 1$ entspricht dem Flächeninhalt der Figur;

$n = 2$ entspricht dem statischen Moment der Figur in bezug auf die x-Axe;

$n = 3$ entspricht dem Trägheitsmoment der Figur in bezug auf die x-Axe;

$n = 4$ entspricht dem Moment vierter Ordnung der Figur in bezug auf die x-Axe.

Die entsprechende Aufgabe für gebrochene Potenzen hat in den letzten Jahrzehnten ebenfalls eine technische Wichtigkeit erlangt, vor allem die Auswertung von Integralen von der Form $\int y^{\frac{m}{2}}\,dx$, welche alle auf den Exponenten $\frac{1}{2}$ zurückgehen. Gemäss dem Ausflussgesetz der gasförmigen, $v = \sqrt{2g \cdot \frac{\Delta p}{\gamma}}$, bzw. tropfbaren Flüssigkeiten, $v = \sqrt{2gh}$ (v = Geschwindigkeit eines Stromfadens im Ausflussquerschnitt, g = Erdbeschleunigung, Δp = Druckgefälle in Druckeinheiten, γ = mittleres spezifisches Gewicht des Gases, h = Druckgefälle in m Flüssigkeitssäule), ist die sekundliche Durchflussmenge je nach Konfiguration des ganzen Flüssigkeitsstrahles proportional einer Funktion der Potenz $\frac{1}{2}$ des Druckgefälles. In den meisten technisch wichtigen Fällen (Leitung, Mündung, offenes Gerinne, offener Ueberfall von verschiedenen geometrischen Gestalten) ist diese Funktion eine einfache Potenz von $(\Delta p)^{\frac{1}{2}}$, also von der Form $(\Delta p)^{\frac{m}{2}}$, wo m ungerade = 1, 3, 5 etc. Die Kubatur des während einer endlichen Zeit durchflossenen Flüssigkeitsvolumens an Hand eines Diagrammes des Gefälles in Funktion der Zeit führt somit auf Integrale einer halbzahligen Potenz einer Ordinate nach einer linearen, bzw. bogenförmigen Abszisse.

Zur mechanischen Auswertung von Integralen der Form $\int y^{\frac{m}{2}}\,dx$ (m = 1, 3, 5 etc.) sind in letzter Zeit bei der Firma Amsler verschiedene Planimeter entwickelt worden, welche für die halbzah-

ligen Potenzen das Analogon der Amslerschen Integratoren für die ganzzahligen Potenzen darstellen *).

1. Einfaches Quadratwurzelplanimeter.

Dieses findet Verwendung bei der Auswertung von Diagrammen von Flüssigkeitsmessern, welche in Verbindung mit einem Drosselungsorgan in einem *geschlossenen* Flüssigkeitsstrom (Drosselscheibe, Düse, Venturirohr, Pitotrohr) arbeiten und deren sekundliche Durchflussmenge einfach proportional ist zur Quadratwurzel des Druckgefälles am Drosselungsorgan. Bei zeitlicher Registrierung des Druckgefälles in Cartesischen Koordinaten, x = Zeit, y = Druckgefälle, ist das während eines gegebenen Zeitintervalls durchflossene Flüssigkeitsquantum das Integral $\int \sqrt{y}\, dx$, welches durch Planimetrieren des ganzen Diagramms ermittelt werden soll.

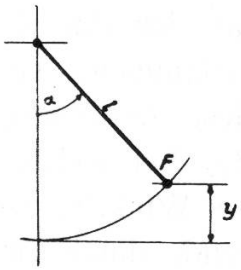

Abb. 1.

Bei Darstellung von y als $l\,(1 - \cos\alpha)$ durch einen von der Ordinatenrichtung aus ausschlagenden Fahrarm, ist die Zurückführung der Potenz $y^{\frac{1}{2}}$ (Abb. 1) auf die trigonometrischen Funktionen des Winkels $\frac{1}{2}\,\alpha$ durch die Beziehung

$$1 - \cos\alpha = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sqrt{1 - \cos\alpha} = \sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

gegeben und somit die mechanische Bildung des Integrals

$$\int \sqrt{y}\, dy = \int \sqrt{l\,(1 - \cos\alpha)}\, dx = \sqrt{2\,l}\cdot\int \sin\frac{\alpha}{2}\, dx, \quad \ldots \quad (2)$$

vermittels eines Linearplanimeters möglich, dessen Integrierrolle um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ gegenüber der Ausgangsrichtung gedreht wird.

*) Es verdient erwähnt zu werden, dass diese Eigenschaft und die sich daraus ergebende mechanische Konstruktion zum ersten Male von keinem anderen als Prof. J. Amsler-Laffon in seiner berühmten Originalabhandlung «Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren», Schaffhausen 1856, Verlag A. Beck & Sohn, angegeben wurde. Da wegen damals noch nicht bestehender Verwendung von Flüssigkeitsmessern in der Industrie Professor Amsler offenbar keine Veranlassung hatte, diesen Gedanken auch auszubauen wie bei seinen Integratoren, begnügte er sich mit einem kurzen Hinweis.

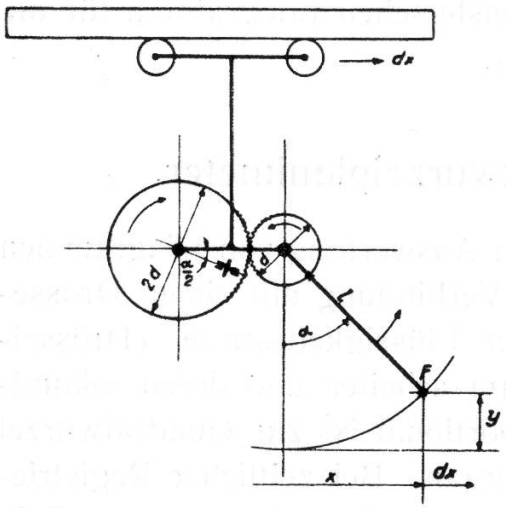

Abb. 2.

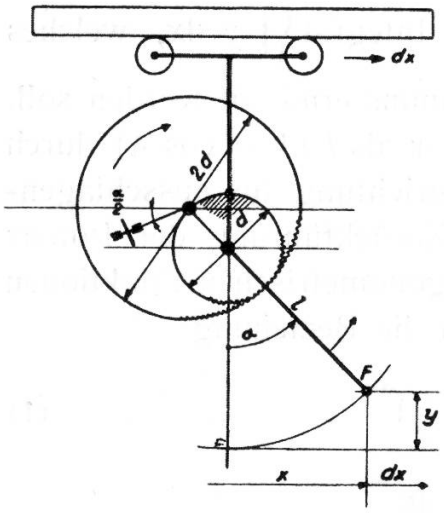

Abb. 3.

In sinngemässer Uebertragung der Konstruktion der Amslerschen Integratoren kann dafür ein Linearplanimeter verwendet werden, welches zwei, sich aussen verzahnende Zahnräder trägt. Das kleinere vom Durchmesser d wird vom Fahrarm um den Betrag α von der y-Richtung aus mitgenommen. Das grössere, mit dem Durchmesser $2d$, trägt die Integrierrolle, und wird um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ gegen die y-Richtung gedreht *) (Abb. 2).

Geeigneter für die materielle Verwirklichung hat sich eine für das Amslersche Planimeter gewählte Variante dieser Anordnung erwiesen (Abb. 3), bei welcher die Zweiteilung des Winkels, anstatt wie vorstehend, durch ein Planetenradsystem erreicht wird. Vom Fahrarm wird ein grosses, die Integrierrolle tragendes Planetenrad vom Durchmesser $2d$ mit Innenverzahnung mitgenommen, welches sich mit einem am Wagen feststehenden, mit dem Fahrarm konzentrischen, kleinen Zahnrad vom Durchmesser d verzahnt. Infolge dieser Anordnung wird die Integrierrolle durch Mitnahme durch den Fahrarm um den Winkel α im direkten Sinne, durch Planetarbewegung relativ um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ im rückläufigen Sinne, somit absolut um $\frac{\alpha}{2}$ gegen die der Ordinate parallele Ausgangsstellung gedreht (Abb. 3), wo-

*) Eine Anwendung dieses Prinzips ist bereits dem Amslerschen Quadratwurzelplanimeter vorausgegangen. Es ist dies das Adler-Ott-Quadratwurzelplanimeter (beschrieben in der Zeitschrift für Instrumentkunde, Juli 1932, Seiten 324—326), welches für die Halbierung des Winkels α statt Zahnrädern ein gleichseitiges Dreieck benutzt, eine Konstruktion, die übrigens nicht neu ist, sondern schon von Prof. J. Amsler-Laffon angewendet wurde, siehe die vorstehend zitierte Abhandlung vom Jahre 1856 von Prof. Amsler.

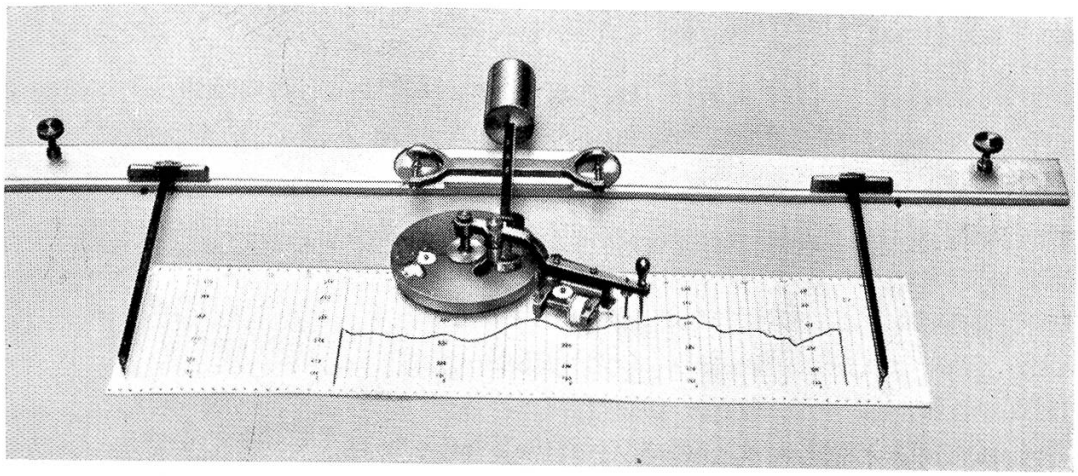

Abb. 4
Einfaches Quadratwurzelplanimeter

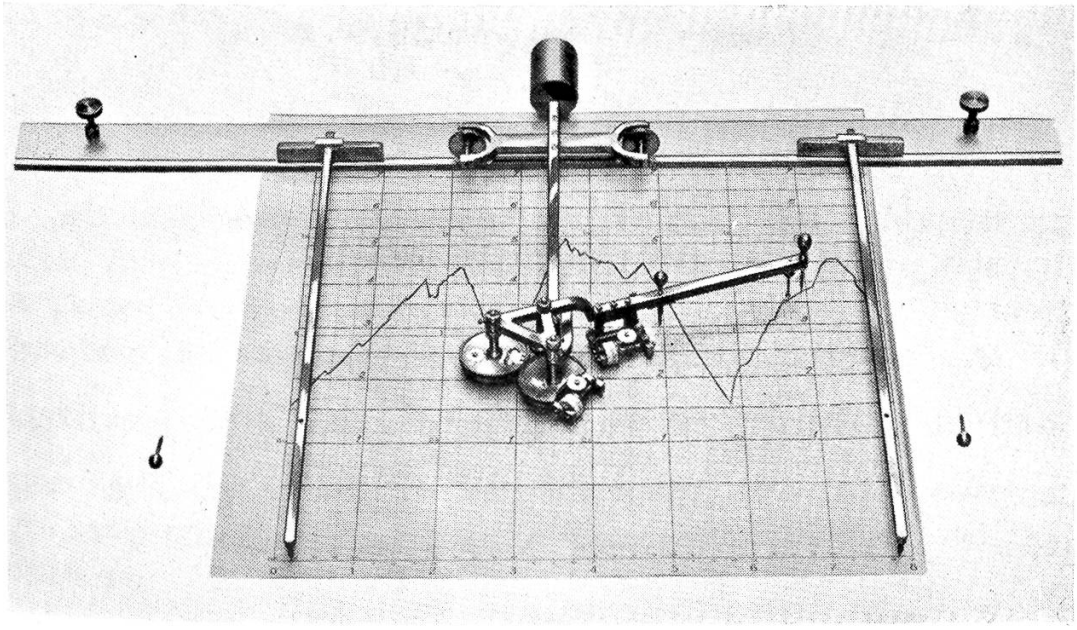

Abb. 13
Dreizweitelpotenz-Planimeter

durch die gewünschte Quadratwurzelintegration entsteht. Das ausgeführte Planimeter ist auf der Abb. 4, Tafel XVIII, ersichtlich.

In Wirklichkeit ist die mechanische Integration des Differentials $\sin\frac{\alpha}{2}dx$ nicht unmittelbar, sondern führt, wie im Falle des einfachen Flächenplanimeters, auf die Summe von 2 Integralen, wovon eines dem Problem fremd, bei der Rückkehr zur Ausgangslage zu Null wird, zurück.

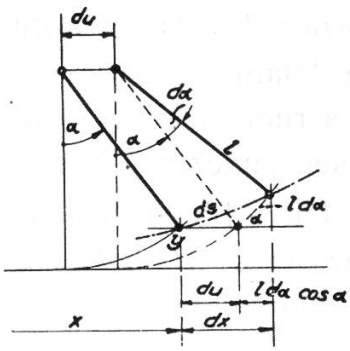

Abb. 5.

Wird nämlich (Abb. 5) während der Zurücklegung eines kurzen Bogens ds der Flächenkontur durch den Fahrstift die Lagenänderung des Fahrarms von der Lage (x, α) zur unendlich benachbarten Lage $(x+dx, \alpha+d\alpha)$ in ihre Komponenten zerlegt, so gilt offenbar

$$dx = du + l\,d\alpha \cdot \cos\alpha \quad . \quad . \quad (3)$$

Nach Substitution des vorstehenden vollständigen Wertes für das Differential dx in das Integral $\int\sqrt{y}\cdot dx$, erhält man den effektiven Ausdruck

$$\int\sqrt{y}\,dx = \int\sqrt{2l}\sin\frac{\alpha}{2}(du + l\,d\alpha\cdot\cos\alpha) =$$

$$= \sqrt{2l}\int\sin\frac{\alpha}{2}\cdot du + \sqrt{2l}\,l\int\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cdot d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wie leicht ersichtlich, nimmt bei Rückkehr des Fahrarmes zu seiner Ausgangslage nach Figurumfahrung das zweite Integral rechts den Wert $= 0$ oder $=$ Konst. an, je nachdem der Fahrarm keine oder eine volle 360°-Rotation zurückgelegt hat. Das erste Integral $\int\sin\frac{\alpha}{2}du$ hingegen ist eben durch die Abwicklung der Integrierrolle in der Ebene ihrer Schneide dargestellt. Das Planimeter gibt somit tatsächlich das gesuchte Quadratwurzelintegral der Ordinate an.

2. Radial-Quadratwurzelplanimeter.

Dasselbe mechanische Integrationsprinzip lässt sich auch auf ein radiales Quadratwurzel-Planimeter übertragen. Ein solches ist erforderlich zur Mittelwertbestimmung der Quadratwurzel der ra-

dialen Ordinaten eines polaren Diagrammes, soll also die Auswertung des polaren Integrals

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{y}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{r_0 - r} \cdot d\varphi$$

über den ganzen Kreisumfang erlauben. Derartige Diagramme kommen vor bei Flüssigkeitsmessern (Drosselscheiben, Venturimetern), deren dem Geschwindigkeitsquadrat proportionales Druckgefälle auf einem gleichmässig rotierenden runden Diagrammblatt registriert wird, wobei die radialen Ordinaten des runden Diagrammes von aussen nach innen oder innen nach aussen zunehmen können.

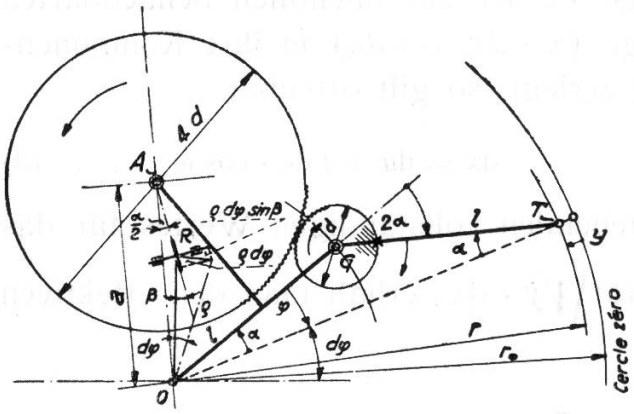

Abb. 6.

Die Abb. 6 stellt ein derartiges Radial-Quadratwurzelplanimeter für von aussen nach innen steigende Kreisdiagramme dar. Mit einem im Diagrammzentrum 0 drehbaren gleichschenkeligen Kniehebel, dessen freies äusseres Ende den Fahrstift F trägt, wird die zu radizierende radiale Ordinate $y = r_0 - r$ als

$$y = 2\,l\,(1 - \cos\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

dargestellt, so dass

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r_0 - r} \cdot d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\,l} \sin\frac{\alpha}{2} \cdot d\varphi \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

ist, wobei α die Neigung der Kniehebelseiten gegen den Radiusvektor bedeutet.

An dem im Diagrammzentrum eingehängten Kniehebelarm ist eine runde Scheibe drehbar gelagert, welche die Integrierrolle mit radial gerichteter Ebene trägt, derart, dass die Ebene der Integrierrolle um eine mit besagtem Kniehebelarm fest verbundene, d. h. in konstantem Abstand vom Diagrammzentrum verbleibende vertikale Axe rotieren kann. Am äussern Kniehebelarm (Fahrarm) ist, konzentrisch mit dem Kniegelenk, ein Zahnrad mit dem Durchmesser d

angebracht. Ein grösseres Zahnrad mit dem Durchmesser $4d$ ist an der Tragscheibe der Integrierrolle befestigt, bzw. bildet einen Teil derselben. Durch diese beiden sich aussen miteinander verzahnenden Zahnräder wird der Integrierrolle gegenüber dem Kniehebelarm (Polarm) eine Winkeldrehung $\frac{\alpha}{2}$ erteilt, die sich daraus ergibt, dass der äussere Spitzenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks doppelt so gross ist wie der Basiswinkel und somit nach Vierteilung zu $\frac{\alpha}{2}$ an der Integrierrolle führt.

Die Ausgangslage der Integrierrolle, entsprechend der Strecklage von Polarm und Fahrarm ($r_0 - r = 0$, $\alpha = 0$), ist radial gegen das Diagrammzentrum gerichtet. Die Folge davon ist, dass die Abwicklung der Integrierrolle proportional dem Integral

$$\int_0^{2\pi} a \sin \frac{\alpha}{2} \cdot d\varphi = \text{proport.} \int_0^{2\pi} \sqrt{r_0 - r} \cdot d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wird, wobei in den Planimeterkonstanten der unveränderliche Abstand a des Rollenmittelpunktes vom Diagrammzentrum enthalten ist (Abb. 6).

Für von innen nach aussen zunehmende Kreisdiagramme wird der Fahrarm, anstatt mit der Fahrspitze F' der Diagrammkurve entlang geführt zu werden, von einer radialen, durch das Diagrammzentrum hindurchgeführten geraden Stange angetrieben, deren über das Zentrum hinausragendes freies Ende F die Diagrammlinie umfährt. Dadurch wird erreicht, dass der Endpunkt F' des Fahrarmes immer nach dem zentral gerichteten Radiusvektor von aussen nach innen um eine Strecke verschoben wird, gleich der von innen nach aussen steigenden radialen Ordinate, so dass die obige Konstruktion auch für die letztere Diagrammart anwendbar wird (Abb. 7).

Schliesslich ist eine Verbindung der Ausführungen für nach innen steigende und für nach aussen steigende Diagramme möglich, bei welcher die Fahrspitze F, anstatt fest entweder am Ende des Fahrarmes oder am freien Ende der radialen Führungsstange zu sein, der Länge dieser Stange entlang beidseitig vom Diagrammzentrum nach Belieben feststellbar ist (F_1, F_2, F_3, F_4, Abb. 8), so dass man mit dem gleichen Instrument ebenso von aussen nach innen wie von innen nach aussen steigende Diagramme, von innert gewissen Grenzen beliebigem Nullkreisdurchmesser auswerten kann.

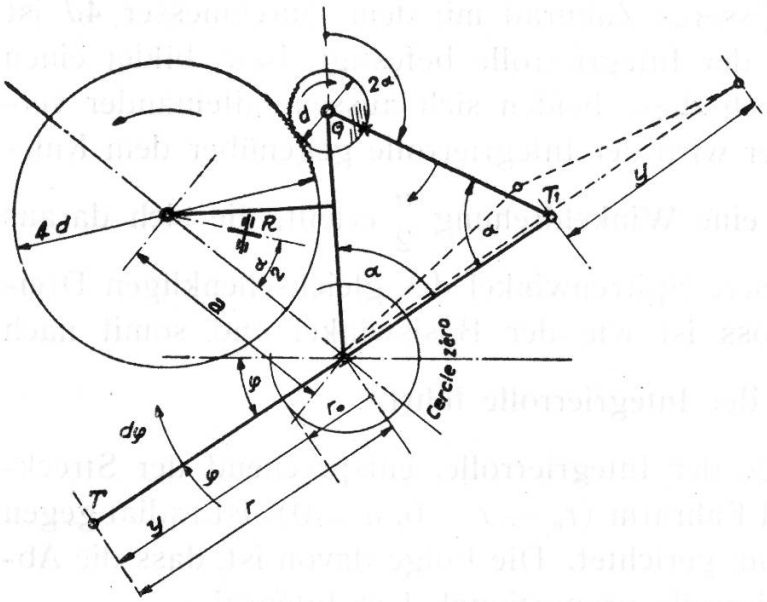

Abb. 7.

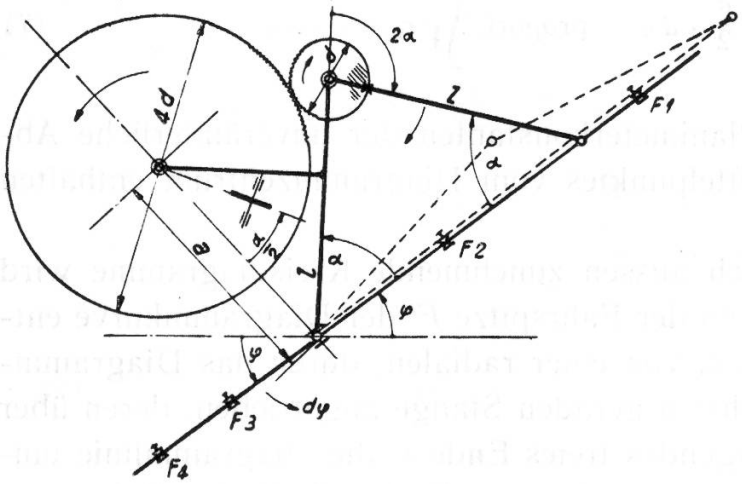

Abb. 8.

Die Grenzen des Ausmasses der mit einem Instrument auswertbaren Diagramme sind durch die dem Instrument zugrunde gelegte Kniehebel-Armlänge bestimmt.

Diese Universalanordnung des Radial-Quadratwurzelplanimeters ist für die Ausführung gewählt worden. Abb. 9 stellt die Auswertung eines Diagrammes mit Nullkreis aussen, Abb. 10 mit Nullkreis innen dar (Tafel XIX).

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei darauf hingewiesen, dass das Quadratwurzel-Integral des Radiusvektors wieder als Summe von zwei Teilintegralen erscheint. Dies ist die Folge davon, dass der Uebergang des Fahrstiftes vom Punkt (φ, r) der Flächenumrandung zum unendlich benachbarten Punkt $(\varphi + d\varphi, r + dr)$ die Resultante von 2 Einzelbewegungen darstellt, von denen die eine eine reine Drehung des ganzen Kniehebelsystems um den Winkel $d\varphi$ und die andere eine Verzerrung des Kniehebels vom Betrag $d\alpha$ ist.

Das eine der beiden Teilintegrale ist dem Problem fremd und verschwindet bei Rückkehr des Fahrstiftes zum Ausgangspunkt. Es gelten ähnliche Ableitungen wie die Gleichungen (3) und (4) auf Seite 263.

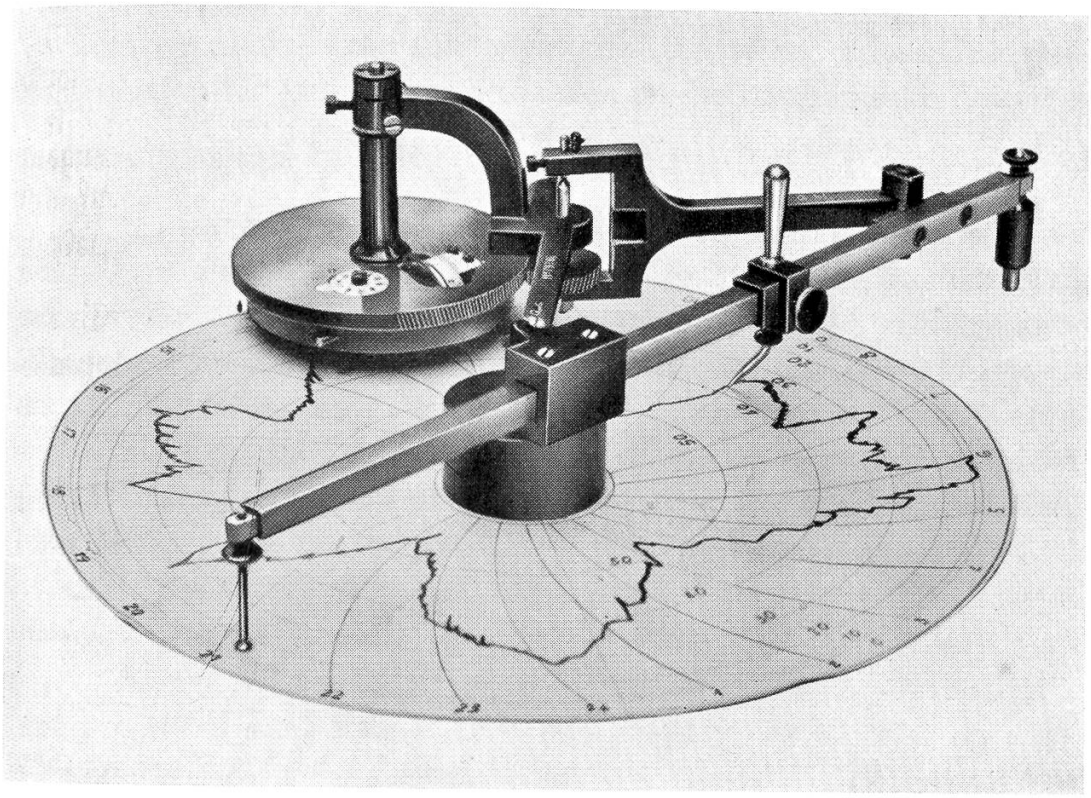

Abb. 9
Radialquadratwurzelplanimeter
Diagramm mit Nullkreis außen

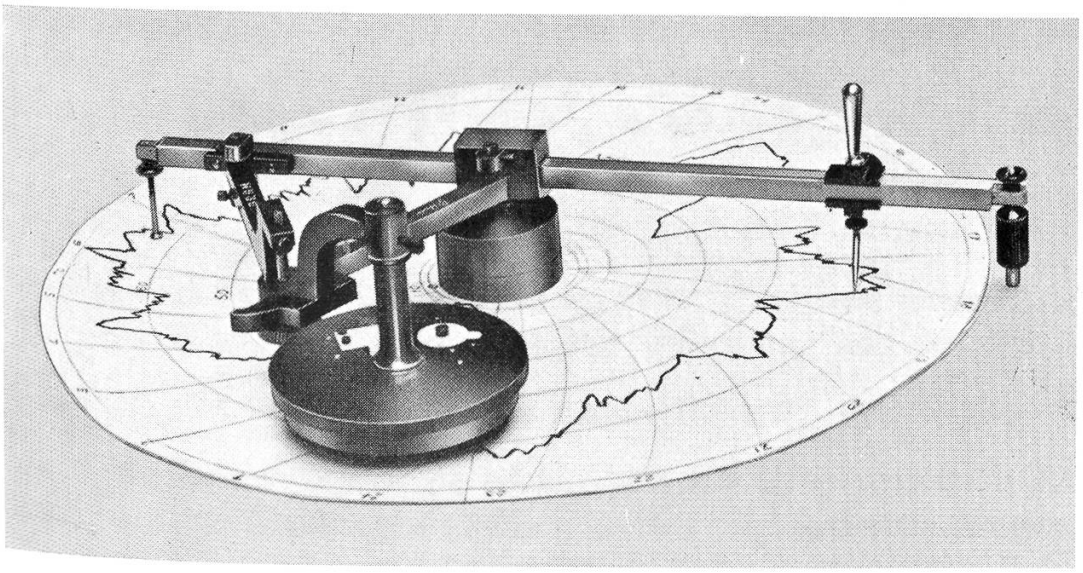

Abb. 10
Radialquadratwurzelplanimeter
Diagramm mit Nullkreis innen

3. Dreizweitelpotenz-Planimeter.

Eine ebenfalls technisch wichtige Anwendung dieses Integrationsprinzips für gebrochene Potenzen ist die mechanische Auswertung des Integrals $\int y^{\frac{3}{2}}\,dx$.

Dieses Integral kommt in Betracht bei der Ermittlung der während eines Zeitabschnittes über einem rechteckigen Messüberfall oder in einem offenen Gerinne konstanter Breite durchfliessenden Wassermenge durch Planimetrierung eines zeitlichen Diagrammes der Ueberfallhöhe, bzw. Wassertiefe im Gerinne. Bei nicht zu sehr veränderlichem Durchflusskoeffizient ist bekanntlich die sekundliche Durchflusmenge proportional der Potenz 3/2 der Ueberfallhöhe, bzw. Wassertiefe im Gerinne.

Bei Darstellung der Ordinate y wieder als $l\ (1-\cos\alpha)$, lässt sich das Integral

$$\int y^{\frac{3}{2}}\,dx = \int l^{\frac{3}{2}} \cdot (1-\cos\alpha)^{\frac{3}{2}} \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen:

$$1-\cos\alpha = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\sin^3\beta = \frac{-\sin 3\beta + 3\sin\beta}{4}$$

umformen in:

$$\int y^{\frac{3}{2}}\,dx = l^{\frac{3}{2}}\,\frac{2^{\frac{3}{2}}}{4}\left[-\int \sin\frac{3\alpha}{2}\,dx + 3\cdot\int \sin\frac{\alpha}{2}\,dx\right] \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Demnach kann das Integral $\int y^{\frac{3}{2}} \cdot dx$ durch ein Mehrfach-Linearplanimeter mit zwei Integrierrollen ausgewertet werden, dessen eine Rolle bei Winkelausschlag α von der y-Richtung aus des Fahrarmes um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und die andere Rolle um den Winkel $\frac{3\alpha}{2}$ gegen die der Abszisse x parallele Anfangsrichtung gedreht wird. Die Ermittlung des Integrals verlangt somit zwei Rollenablesungen, die in obige Formel passend einzusetzen sind.

Eine brauchbare Verwirklichung eines solchen Linearplanimeters besteht darin, dass zwei Integrierrollen von zwei Zahnrädern mit

Durchmessern $2\,d$, bzw. $\frac{2}{3}\,d$ getragen sind, welche gleichzeitig von einem, vom Fahrarm in dem Betrage α von der y-Richtung aus mitgenommenen Zahnrad vom Durchmesser d, um die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{3\,\alpha}{2}$ gegen die x-Richtung gedreht werden. Dabei kann die vom Rad mit Winkeldrehung $\frac{\alpha}{2}$ getragene Integrierrolle zugleich zur Auswertung des Quadratwurzelintegrals benutzt werden, so dass das Planimeter sich gleichzeitig zur Ermittlung der beiden Integrale

$$\int y^{\frac{3}{2}}\,dx \text{ und } \int \sqrt{y}\,\alpha\,dx$$

eignet (Abb. 11).

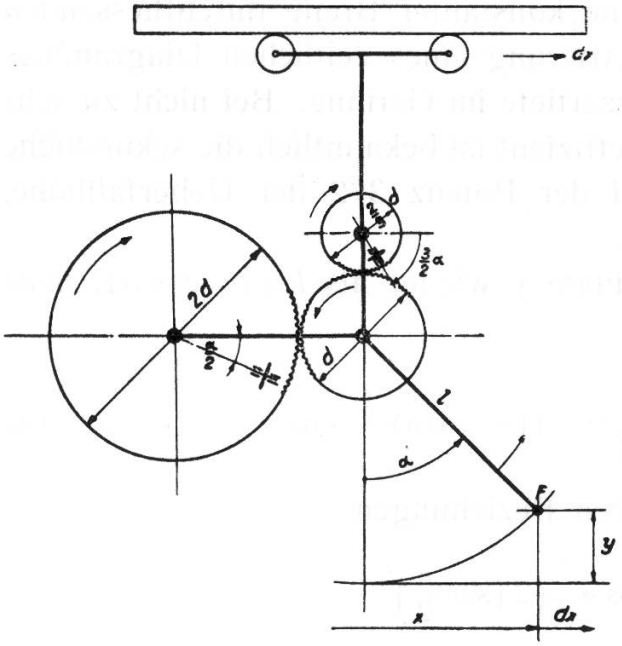

Abb. 11.

Für die konstruktive Gestaltung besser ausgeglichen in der Massenverteilung ist eine etwas abweichende Anordnung, bei welcher, ähnlich wie beim einfachen Quadratwurzel-Planimeter, die Winkelbewegung $\frac{3\,\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\alpha}{2}$ der Integrierrollen mit einem Planetenräder-System bewerkstelligt wird. Vom Fahrarm wird ein grosses, die eine Integrierrolle tragendes Planetenrad vom Durchmesser $2d$ mitgenommen, welches mit einem am Wagen feststehenden, mit dem Fahrarm konzentrischen kleinen Zentralrad von Durchmesser d sich aussen verzahnt, sowie ein zweites grosses,

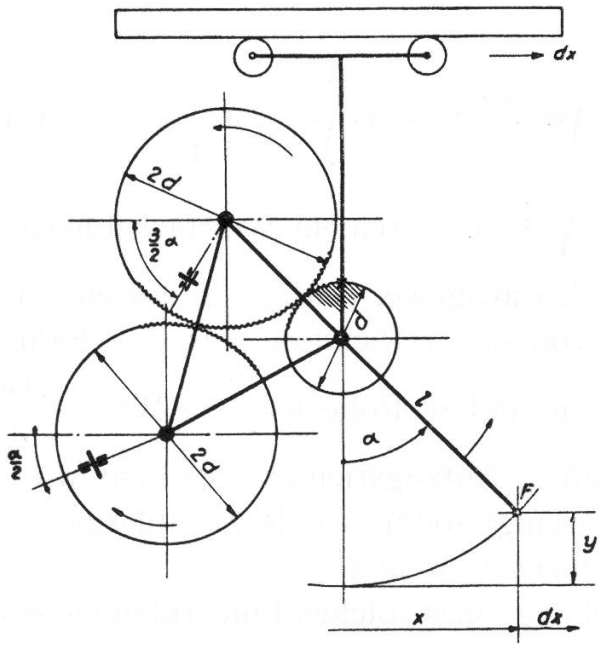

Abb. 12.

die andere Integrierrolle tragendes Zahnrad, ebenfalls von Durchmesser $2d$, mit dem ersten grossen Planetenrad sich aussen verzahnend. Dabei wird durch Planetarbewegung das erste grosse Planetenrad gegenüber dem es in dem Betrag α mitnehmendem Fahrarm relativ um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ im direkten Sinne, das zweite grosse Planetenrad relativ um denselben Winkel $\frac{\alpha}{2}$ im rückläufigen Sinne gedreht, so dass das erste grosse Planetenrad absolut um $\alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}$, das zweite grosse Planetenrad absolut um $\alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ gegenüber der x-Richtung gedreht wird, wie es erforderlich ist. Das Amslersche 3/2-Potenz-Planimeter ist nach diesem Grundsatz ausgeführt (Abb. 12).

Vollständigkeitshalber sei auch bei diesem Planimeter wieder auf die Entstehung des zweiten, an der Grenze verschwindenden Parasitenintegrals hingewiesen. (Aehnliche Gleichungen wie (3) und (4) ante.)

Die Abb. 13, Tafel XVIII, stellt das 3/2-Potenz-Planimeter im Gebrauch dar.

Es wäre, wenigstens theoretisch, möglich, nach demselben Grundsatz ein Planimeter für das 5/2-Potenzintegral

$$\int y^{\frac{5}{2}}\, dx = \int l^{\frac{5}{2}} (1 - \cos\alpha)^{\frac{5}{2}}\, dx$$

welches für den offenen Ueberfall mit Dreieckausschnitt in Betracht kommt, zu entwickeln. Es treten ähnliche Gleichungen wie (8) und (9) ante auf, nur werden die Formeln jetzt dreigliederig, und die Konstruktion würde ein Planimeter mit 3 Integrierrollen erfordern, ähnlich wie die grossen Amsler-Integratoren. Wir begnügen uns mit diesem Hinweis.

Anhang.

Formeln zum Justieren der Planimeter für gebrochene Potenzen.

Bei den üblichen Integratoren benutzt man zum Justieren während der Fabrikation, bzw. zur Genauigkeitskontrolle eines vorliegenden Instrumentes geometrisch einfache Figuren, meistens Rechteck, Quadrat und Kreis, deren statisches, bzw. Trägheitsmoment in bezug auf eine Tangente oder Symmetrieaxe formelmässig bekannt sind. Am häufigsten wird der Kreis benutzt, wegen seiner genauen mechanischen Aufzeichnung mittels des Zirkels.

Für die hier beschriebenen Halbpotenzen-Planimeter besteht ein gleiches Bedürfnis; ausser Rechteck und gleichseitigem rechtwinkligem Dreieck kommt der Halbkreis in Betracht, und zwar der Halbkreis mit positiven y-Werten, da negative y auf imaginäre Wurzelwerte führen. Da die auf den Halbkreis bezüglichen Halbpotenzen-Integrale nicht aus Funktionentabellen zu entnehmen sind, hat der Verfasser dieselben zum Gebrauch in der Firma Amsler entwickeln müssen. Die Ableitung, die für die Allgemeinheit von Interesse sein dürfte, sei hier mitgeteilt.

1. Einfaches Quadratwurzelplanimeter.

Für den positiven Halbkreis (Abb. 14) ist mit

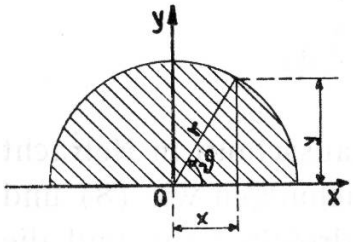

Abb. 14.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\,; \quad \frac{x}{r} = \xi$$

das Quadratwurzel-Integral

$$J = \int_{-r}^{+r} \sqrt{y}\, dx = r^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \int_0^1 \sqrt[4]{1 - \xi^2}\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Dieses nicht durch eine bekannte Funktion ausdrückbare Integral muss durch eine Reihe dargestellt werden. Durch binomische Entwicklung der vierten Wurzel und gliedweise Integration entsteht:

$$J = r^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \left[\xi - \frac{1}{4} \frac{1}{1!} \frac{\xi^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{4^2} \frac{1}{2!} \frac{\xi^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4^3} \frac{1}{3!} \frac{\xi^7}{7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4^4} \frac{1}{4!} \frac{\xi^9}{9} \ldots \text{etc.} \right]_0^1 \quad (11)$$

Da die Integralreihe langsam konvergiert, muss sie mit dem Restansatz benutzt werden.

Eine anschauliche, für numerische Rechnungen geeignete angenäherte Form des Restansatzes *) erhält man wie folgt:

*) Da die klassischen Restformen von Lagrange oder Cauchy einen abzuschätzenden Faktor ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ enthalten und daher für eine einigermassen genaue Restberechnung zu grob sind.

Aus dem Bildungsgesetz der Glieder

$$G_n = \frac{1\,(4-1)\,(2.4-1)\,\ldots\,([n-1]\,4-1)}{4^n}\,\frac{1}{n!}\,\frac{1^{2n+1}}{2n+1}$$

ergibt sich als Differenz aufeinanderfolgender Glieder:

$$\underset{\text{für } \Delta n = 1}{\Delta G_n} = G_{n+1} - G_n = G_n\left(\frac{G_{n+1}}{G_n} - 1\right) = -G_n\,\frac{18\,n + 13}{4\,(n+1)\,(2n+3)} =$$

$$= \text{für } n \text{ gross} \sim -G_n\,\frac{9}{4\,n}$$

Wird die endliche Differenz ΔG_n nunmehr als Differential dG_n und die Einheit $(n+1)-n$ ebenso als dn aufgefasst, so gilt annähernd für n gross:

$$\frac{dG_n}{dn} \cong -G_n\,\frac{9}{4\,n}$$

$$\frac{dG_n}{G_n} \cong \frac{-9}{4}\,\frac{dn}{n}$$

Integriert:

$$\text{Log. } G_n \cong \text{Log. } C^{te} \cdot -\frac{9}{4}\,\text{Log. } n$$

$$G_n \cong \frac{C^{te}}{n^{\frac{9}{4}}}$$

Die Integrationskonstante folgt aus der Gültigkeit dieser Näherungsformel für das k^{te} Glied, bei welchem die Reihe aufhört.

$$G_k \cong \frac{C^{te}}{k^{\frac{9}{4}}},$$

womit

$$G_n \cong G_k\,\frac{k^{\frac{9}{4}}}{n^{\frac{9}{4}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Wird die Reihe beim k^{ten} Gliede abgebrochen, so kann der Rest $R = \sum_{k+1}^{\infty} G_n$, Summe von um $dn = 1$ abstehenden Elementen, als Integral aufgefasst werden *)

$$R \cong \int_{k+1}^{\infty} G_n \cdot dn \cong \int_{k+1}^{\infty} G_k\,\frac{k^{\frac{9}{4}}}{n^{\frac{9}{4}}} \cdot dn \cong G_k \cdot k^{\frac{9}{4}} \left| \frac{n^{-\frac{9}{4}+1}}{-\frac{9}{4}+1} \right|_{k+1}^{\infty}$$

$$= G_k \cdot k^{\frac{9}{4}}\left(-O + \frac{4}{5}\,\frac{1}{(k+1)^{\frac{5}{4}}}\right) \xrightarrow[\text{für } k \text{ gross}]{} G_k \cdot \frac{4}{5}\,k \quad . \quad (13)$$

*) Werden nämlich die einzelnen Elemente der Summe als elementare Flächenstreifen mit der konst. Breite $dn = 1$ statt übereinander (Summe = Gesamtfläche) *neben*einander quasi wie Holzstäbchen gleicher Breite und veränderlicher Höhe gelegt, so erscheint sofort die Summe als Gesamtinhalt der dadurch bedeckten Fläche, also als Integral.

Mit dieser sehr einfachen Näherungsform für den Restansatz ergibt die numerische Rechnung, wenn die Reihe nur bis zum 8. Gliede ($k = 8$) geführt wird:

0tes Glied	$= 1$		$= 1$	
1tes »	$= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1!}\,\frac{1}{3}$		$=$	$-$ 0,083'333
2tes »	$= -\frac{1\cdot 3}{4^2}\,\frac{1}{2!}\,\frac{1}{5}$		$=$	$-$ 0,018'750
3tes »	$= -\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3}\,\frac{1}{3!}\,\frac{1}{7}$		$=$	$-$ 0,007'812
4tes »	$= \ldots\ldots\ldots\ldots$		$=$	$-$ 0,004'178
5tes »	$= \ldots\ldots\ldots\ldots$		$=$	$-$ 0,002'563
6tes »	$= \ldots\ldots\ldots\ldots$		$=$	$-$ 0,001'717
7tes »	$= \ldots\ldots\ldots\ldots$		$=$	$-$ 0,001'222
8tes »	$= -\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot 19\cdot 23\cdot 27}{4^8}\,\frac{1}{8!}\,\frac{1}{17}$		$=$	$-$ 0,000'909
Rest »	$= G_8 \cdot \frac{4}{5} \cdot 8 = -0{,}000'909 \cdot \frac{4}{5} \cdot 8$		$=$	$-$ 0,005'818
Summe	$= \int_0^1 \sqrt[4]{1-\xi^2} \cdot d\xi$		$= 1$	$-$ 0,126'302
			$=$	0,873'698

Somit gesuchtes Wurzelintegral

$$J = \int_{-1}^{+1} \sqrt{y}\, dx = r^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot 0{,}873'698 = \underline{1{,}747'396 \cdot r^{\frac{3}{2}}}.$$

* * *

Der Umstand, dass das gesuchte Wurzelintegral sich auf den Halbkreis bezieht, legt nahe, dasselbe in Polarkoordinaten auszudrücken. Man wird dabei auf trigonometrische Funktionen geführt, welche die Umwandlung in ein besser konvergierendes elliptisches Integral gestatten.

Setzen wir also in polarer Schreibweise (Abb. 14)

$$x = r \cos \vartheta \qquad dx = -r \sin \vartheta\, d\vartheta$$
$$y = r \sin \vartheta,$$

so wird

$$J = \int_{-r}^{+r} \sqrt{y}\, dx = 2 \cdot \int_0^{+r} \sqrt{y}\, dx = 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{r \sin \vartheta}\, (-r \sin \vartheta\, d\vartheta)$$

$$= 2 \cdot r^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin \vartheta}\, \sin \vartheta\, d\vartheta \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Zur Umwandlung in ein elliptisches Integral machen wir die Substitution:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\vartheta = \cos^2\varphi \begin{cases} \vartheta = 0\,;\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ \vartheta = \dfrac{\pi}{2};\ \varphi = 0 \end{cases} \\ &\mathrm{d}\,\vartheta = \frac{-2\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi}{\cos\vartheta} = \frac{-2\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{1-\cos^4\varphi}} \\ &\quad = \frac{-2\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}\cdot\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = \frac{-2\cos\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)}}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

womit das Integral (5) in

$$J = 2r^{\frac{3}{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\frac{-2\cos\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = r^{\frac{3}{2}}\frac{4}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} \tag{16}$$

übergeht.

Zur Auswertung des nunmehr elliptischen Integrals rechts wird in üblicher Weise $\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}$ in die Binominalreihe entwickelt, und nach gliedweiser Multiplikation mit $\cos^4\varphi\,d\,\varphi$ ergibt sich:

$$J = r^{\frac{3}{2}}\frac{4}{\sqrt{2}}\left[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^1}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1}{2^2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^4\varphi\,d\,\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{1}{2^3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\cos^4\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi + \ldots\text{ etc.}\right] \tag{17}$$

Durch wiederholte Anwendung von $p-2 = m-2$ bis $p-2 = 0$ der Rekursionsformel $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{p-1}{p+4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$ erhält man für die in obiger Formel auftretenden Einzelintegrale vom Typus $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\varphi\cos^4\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$, allgemein ($m$ = Gerade):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{(m-1)\ (m-3)\ (m-5) \ldots 1}{(m+4)\ (m-2+4)\ (m-4+4) \ldots (2+4)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} \tag{18}$$

Damit gelangen wir für das gesuchte Wurzelintegral zum Schlussausdruck:

$$J = r^{\frac{3}{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} \left[1\,(1)^2 \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2^1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{6 \cdot 8} + \frac{1}{2^3} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{1}{8 \cdot 10} \text{etc.} \right] 3 \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

Nachstehend die numerische Ausrechnung. Die höheren Glieder klingen rasch ab, da jedes Glied der Grenze $\frac{1}{3}$ des vorangehenden Gliedes zustrebt, und ein Restansatz ist überflüssig.

0tes Glied	$= 1\,(1)^2 \frac{1}{2 \cdot 4}$		$= 0{,}125'000'0$
1tes »	$= \frac{1}{2^1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4 \cdot 6}$		$= 0{,}005'208'3$
2tes »	$= \frac{1}{2^2} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{6 \cdot 8}$		$= 0{,}000'732'5$
3tes »	$= \frac{1}{2^3} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{1}{8 \cdot 10}$		$= 0{,}000'152'6$
4tes »	$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$		$= 0{,}000'038'9$
5tes »	$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$		$= 0{,}000'011'3$
6tes »	$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$		$= 0{,}000'003'5$
7tes »	$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$		$= 0{,}000'001{,}2$
8tes »	$= \frac{1}{2^8} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 16}\right)^2 \frac{1}{18 \cdot 20}$		$= 0{,}000'000'4$
Summe	$=$		$= 0{,}131'148'7$

Somit gesuchtes Wurzelintegral:

$$J = \int_{-1}^{+1} \sqrt{y} \, dx = r^{\frac{3}{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} 0{,}131'149 \cdot 3 \frac{\pi}{2} = \underline{1{,}748'054 \cdot r^{\frac{3}{3}}},$$

in guter Uebereinstimmung mit dem aus der algebraischen Reihe gewonnenen Wert. Der Wert aus der elliptischen Reihe ist offensichtlich der genauere *). Die unabhängige Bestimmung des Wurzelintegrals auf 2 verschiedenen Wegen war aber für die erstmalige Berechnung eine willkommene Kontrolle.

*) Die Abweichung rührt von der auch nur angenäherten Formel (13) für den Restansatz der algebraischen Reihe her.

2. *Radial-Quadratwurzelplanimeter.*

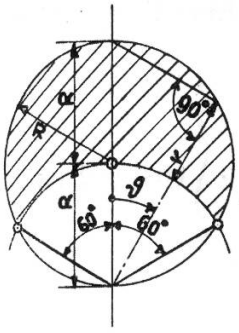

Abb. 15.

Als praktisch für die Justierung des Planimeters hat sich ein über einem Nullkreis vom Radius R als Basis beschriebener Halbkreis von gleich grossem Radius (Mondsichel) erwiesen (Abb. 15). Die Integrationsgrenzen sind offenbar $\vartheta = \pm 60^0 = \pm \frac{\pi}{3}$

Mit:

$$r = 2R \cos\vartheta - R = R \cdot (2\cos\vartheta - 1) = R \cdot \left(1 - 4\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

wird das Quadratwurzelintegral

$$J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \sqrt{r} \cdot d\vartheta = \sqrt{R} \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta = \sqrt{R} \cdot 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{+\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - 4\sin^2\varphi}\, d\varphi;\ \varphi = \frac{\vartheta}{2} \quad (20)$$

Dies ist ein reines elliptisches Integral 2. Gattung, aber vom Modul 2 ($k^2 = 4$, $k = 2$), so dass die Legendresche Normalentwicklung ihre Gültigkeit ($k \leqq 1$) verliert. Es ist also eine andere Form des Integrals, welche eine konvergierende Reihenentwicklung zulässt, zu benutzen. Dafür setzen wir:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\psi \qquad \left\{\begin{array}{l}\vartheta = +\frac{\pi}{3};\ \psi = +\frac{\pi}{2} \\ \vartheta = -\frac{\pi}{3};\ \psi = -\frac{\pi}{2}\end{array}\right\} \sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \cos\psi \\ d\vartheta = \dfrac{\cos\psi\, d\psi}{\cos\frac{\vartheta}{2}} = \dfrac{\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}} = \dfrac{\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2\psi}} \end{array}\right\} (21)$$

so dass das Wurzelintegral sich nunmehr

$$J = \sqrt{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2\psi}} = \sqrt{R}\, 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2\psi}} \quad . \quad . \quad (22)$$

schreiben lässt.

Die Binominalreihe ist jetzt unbedingt konvergierend. Durch Entwicklung und gliedweise Integration entsteht:

$$J = \sqrt{R} \cdot 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi \cos^2\psi\, d + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{1}{2^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\psi \cos^2\psi\, d\psi \right.$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{1}{2^6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\psi \cos^2\psi\, d\psi + \ldots \text{ etc.} \right] \quad (23)$$

Für das allgemeine, in vorstehender Reihe vorkommende Einzelintegral gilt, ähnlich wie (18): (für m gerade)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \psi \cos^2 \mathrm{d}\psi = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 1}{(m+2)(m-2+2)(m-4+2)\ldots(2+2)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \, \mathrm{d}\psi ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \, \mathrm{d}\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Setzen wir diese Werte in (13) ein, so ergibt sich, zusammengezogen:

$$J = R\sqrt{R} \cdot 2 \left[1\,(1)^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2^4} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{6} + \frac{1}{2^6} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{1}{8} \text{ etc.} \right] \frac{\pi}{2}$$

Numerische Ausrechnung (ohne Restansatz):

0tes	Glied	=	0,500'000'00
1tes	»	=	0,015'625'00
2tes	»	=	0,001'464'84
3tes	»	=	0,000'190'73
4tes	»	=	0,000'029'21
5tes	»	=	0,000'004'93
6tes	»	=	0,000'000'89
7tes	»	=	0,000'000'17
8tes	»	=	0,000'000'03
Summe		=	0,517'315'80

Endwert des Wurzelintegrals:

$$J = \sqrt{R} \cdot 2 \left(0{,}517'315'8 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \underline{1{,}625'196 \cdot \sqrt{R}}$$

3. 3/2-Potenz-Planimeter.

Die Ableitung hat eine weitgehende Aehnlichkeit mit den Entwicklungen für das einfache Quadratwurzelplanimeter, mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt an Stelle des Bruches ½, seiner Vielfachen und Potenzen, der Bruch ⅔ und seine entsprechenden Umwandlungen auftreten. Wir können uns daher ziemlich kurz fassen.

Darstellung durch eine algebraische Reihe:

Für den positiven Halbkreis (Abb. 14) gilt, ähnlich wie (10),

$$J = \int_{-r}^{+r} y^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x = r^{\frac{5}{2}} \cdot 2 \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{3}{4}} \cdot \mathrm{d}\xi \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Nach Reihenentwicklung und gliedweiser Integration finden wir, ähnlich (11):

$$J = r^{\frac{5}{2}} 2 \left[\xi - 3 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1!} \frac{\xi^3}{3} - 3 \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2!} \frac{\xi^5}{5} - 3 \frac{1 \cdot 5}{4^3} \cdot \frac{1}{3!} \frac{\xi^7}{7} - 3 \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4^4} \cdot \frac{1}{4!} \frac{\xi^9}{9} \text{ etc.} \right]_0^1 \quad (25)$$

Angenäherter Grenzwert des n^{ten} Gliedes (n gross) für ein höheres n als die Ordnungszahl k des Gliedes, bei welchem die Reihe aufhört, entsprechend (12):

$$G_n \cong G_k \frac{k^{\frac{11}{4}}}{n^{\frac{11}{4}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

und mithin Rest der beim k^{ten} Gliede abgebrochenen Reihe, annähernd, ähnlich (13):

$$R \cong G_k \frac{4}{7} k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Numerische Berechnung:

0tes Glied	=	1
1tes »	=	— 0,250'000
2tes »	=	— 0,018'750
3tes »	=	— 0,005'580
4tes »	=	— 0,002'441
5tes »	=	— 0,001'298
6tes »	=	— 0,000'778
7tes »	=	— 0,000'506
8tes »	=	— 0,000'349
Rest	$= G_8 \cdot \frac{4}{7} 8 = -0{,}000'349 \cdot \frac{4}{7} 8$	= — 0,001'597
Summe	$= \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{3}{4}} \, d\xi$	= 1 — 0,281'299
		= 0,718'701

Somit Wurzelintegral:

$$J = \int_{-r}^{+r} y^{\frac{3}{2}} \, dx = r^{\frac{5}{2}} \cdot 2 \cdot 0{,}718'701$$

$$= \underline{1{,}437'402 \cdot r^{\frac{5}{2}}}.$$

Darstellung durch eine trigonometrische Reihe:

In polarer Darstellung, $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ (Abb. 14) ist, ähnlich (14):

$$\int_{-r}^{+r} y^{\frac{3}{2}} \, dx = 2r^{\frac{5}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Mittels der Substitution (15): $\sin \vartheta = \cos^2 \varphi$ wird (28) in ein elliptisches Integral transformiert, entsprechend (16) und (17).

$$J = r^{\frac{5}{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

$$=r^{\frac{5}{2}}\frac{4}{\sqrt{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^6\varphi\,d\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^6\varphi\,d\varphi+\text{etc.}\right] \tag{30}$$

Allgemeiner Ausdruck des Einzelintegrals, ähnlich wie (18), (für m gerade):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\varphi\cos^6\varphi\,d\varphi=\frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 1}{(m+6)(m-2+6)(m-4+6)\ldots(2+6)}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi=\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots \tag{31}$$

In (30) eingesetzt, ergibt die Schlussformel:

$$J=r^{\frac{5}{2}}\frac{4}{\sqrt{2}}\left[1\,(1)^2\,\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{2^1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{6\cdot 8\cdot 10}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^3}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{1}{8\cdot 10\cdot 12}\ldots\text{ etc.}\right]15\frac{\pi}{2}. \quad \ldots\ldots \tag{32}$$

Numerische Berechnung (ohne Restansatz):

0tes	Glied	=	0,020'833'33
1tes	»	=	0,000'651'04
2tes	»	=	0,000'073'24
3tes	»	=	0,000'012'72
4tes	»	=	0,000'002'78
5tes	»	=	0,000'000'70
6tes	»	=	0,000'000'20
7tes	»	=	0,000'000'06
8tes	»	=	0,000'000'02
Summe		=	0,021'574'09

Endwert des 3/2-Potenz-Integrals:

$$J=r^{\frac{5}{2}}\frac{4}{\sqrt{2}}\left(0{,}021'574'09.15\frac{\pi}{2}\right)=\underline{1{,}437'769\cdot r^{\frac{5}{2}}.}$$

Dieser letzte trigonometrische Wert ist der genauere. Die zweifache Bestimmung auf unabhängigen Wegen (25) und (32) war aber als gegenseitige Kontrolle willkommen.