Leonhard Euler (1707-1783)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): **- (2005)**

Heft -: **100 Jahre SAV = 100 ans ASA = 100 years SAA : Aktuare in Helvetiens Landen : 8 x 4 Porträts : Jubiläumsheft 2005**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

«Grundlegende Beiträge zur Lebensversicherungsmathematik»

Leonhard Euler (1707–1783)

«Während in vielen Wissenszweigen mit Stolz auf die Beiträge Eulers hingewiesen wird, hat man in Versicherungskreisen manchmal das Gefühl, man schäme sich fast der Tatsache, dass der geniale Basler auch hier grundlegende Beiträge geleistet hat, vor allem was den Aufbau der Theorie der Lebensversicherungsmathematik anbelangt» [1]. – Zu diesen theoretischen Grundlagen der Lebensversicherung zählt man in der Regel vier Arbeiten von Euler. L.G. Du Pasquier hat sie im siebten Band der *Opera omnia* 1923 zusammen mit Eulers Beiträgen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, zur Fehlertheorie und zur mathematischen Statistik bearbeitet, einlässlich kommentiert und herausgegeben [2]. Er hat von ihnen auch ausführliche, wiederum kommentierte Inhaltsangaben publiziert [3]; [4]; kürzere Übersichten sind u.a. 1957 von T. Sofonea [5] und 1984 von H. Loeffel [6] gegeben worden. Im Folgenden soll versucht werden, die vier Arbeiten Eulers zu skizzieren.

«Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain»

Euler zieht es vor, diese beiden Probleme in der allgemeinsten Form zu behandeln, ohne sofort auf konkrete Geburts- oder Todesregister Bezug zu nehmen. Für die Behandlung der Sterblichkeit geht er von N Neugeborenen aus; mit (1)N, (2)N, ..., (n)N bezeichnet er die Anzahl der Überlebenden am Ende des ersten, zweiten, ..., n-ten Jahres, also unsere Folge der l_x, $x = 0, 1, 2, ..., \omega$. Somit stellen die Symbole (1), (2), ..., (n) die Wahrscheinlichkeit der Neugeborenen dar, nach 1, 2, ..., n Jahren am Leben zu sein, was wir heute mit $p_0, {}_2p_0, {}_3p_0, \ldots, {}_np_0$ bezeichnen; die Gesamtheit der so dargestellten Zahlen bildet nach Euler die «Sterblichkeitshypothese». Anschliessend werden fundamentale Aufgaben gelöst, die inzwischen klassisch geworden sind; sie führen zu denselben Lösungen wie die heutigen Berechnungen. Wir beschränken uns auf einige Beispiele:

Wie viele von M gleichaltrigen, m-jährigen Personen werden nach n Jahren noch am Leben sein? Mit den Klammersymbolen von Euler sind es M · (m+n)/(m) Personen; modern geschrieben $l_{m+n} = l_m \cdot {}_np_m$
Weiter wird z.B. die Wahrscheinlichkeit angegeben (wieder mit den Klammersymbolen), dass eine m-jährige Person noch n Jahre leben wird und dann im darauf folgenden Jahr stirbt: [(n)–(n+1)] : (m), also ${}_np_m \cdot q_{m+n}$
Als «wahrscheinliche Lebensdauer» einer m-jährigen Person gilt die Frist bis zu jenem Zeitpunkt, da die ursprüngliche Anzahl der m-Jährigen auf die Hälfte gesunken sein wird.

Leonhard Euler
1707–1783

Es wird u.a. auch der Betrag einer nachschüssigen Leibrente berechnet, die gerechterweise als Entgelt für die Bareinlage a einer Person im Alter von m Jahren zu zahlen ist. Euler geht dazu von einer Gruppe von M Personen aus und nimmt an, dass jede der M Personen den Betrag x bis zu ihrem Tode erhält; den Aufzinsungsfaktor bezeichnet er mit λ. Mit den oben definierten Klammersymbolen führt dies auf die folgende Gleichung für x:

$$a = \frac{x}{(m)} \left\{ \frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \cdots \right\}$$

«Alle diese Fragen», schreibt Euler, «sind leicht zu lösen, sobald die Werte der Brüche (1), (2), (3), ... bekannt sind. Diese Werte variieren mit dem Klima und der Lebensweise; es wurde sogar festgestellt, dass sie für beide Geschlechter verschieden sind und daher kann allgemein nichts Bestimmtes gesagt werden.» Dann bringt er eine Sterblichkeitstafel; den eben erwähnten Brüchen legt er Werte zugrunde, die er den Beobachtungen des holländischen Statistikers Willem Kersseboom (1691–1761) entnimmt.
Im zweiten Teil seiner Abhandlung untersucht Euler nun das Bevölkerungswachstum. Er weiss, dass die demographischen Erscheinungen sehr verwickelt sind. Um eine einfache Grundlage zu erhalten, macht er folgende drei Annahmen:

- Die betrachtete Bevölkerung bildet eine abgeschlossene Gesamtheit; es gibt also keine Auswanderungen, keine Einwanderungen.
- Das Sterblichkeitsgesetz ist unveränderlich im Laufe der Jahre.
- Es besteht eine direkte Proportionalität zwischen der Gesamtzahl der Lebenden und der jährlichen Geburtenzahl.

Nach der Behandlung einiger vorbereitender Aufgaben zeigt er, wie aus seinen Annahmen nun unmittelbar eine Sterblichkeitstafel entwickelt werden kann, sobald die Ergebnisse einer Volkszählung und die Liste der Toten des auf die Volkszählung folgenden Jahres vorliegen. Allerdings liegt der Berechnungsmethode die Annahme zugrunde, dass die Veränderungen der Einwohnerzahl eine geometrische Folge bilden, was jedoch den Beobachtungen nicht entspricht (vgl. L.G. Du Pasquier [3], [4]).

«Sur les rentes viagères»

Diese Arbeit über die Leibrenten wird von Euler als Fortsetzung der eben besprochenen Abhandlung bezeichnet. Er weist zuerst auf die zwei Rechnungsgrundlagen hin, die hier von besonderer Bedeutung sind, nämlich auf die Sterblichkeitstafel und den Zinsfuss. Bezüglich der Sterblichkeitstafel stellt er fest, *«qu'on a raison de considérer les rentiers comme une espèce plus robuste»:* Wer schwächlich ist oder auch nur glaubt, er werde nicht sehr lange leben, wird ja in der Regel keine Leibrente kaufen. Was den Zinsfuss anbelangt, empfiehlt Euler dem Versicherer, die beste Anlagemöglichkeit zu wählen, sonst «wird er nur eine mittelmässige Rente anbieten können, die niemand erwerben will». Für seine Berechnungen wählt er einen Zinsfuss von 5%. Sein Gedankengang zur Berechnung des Wertes einer Leibrente beruht auf drei inzwischen ebenfalls klassisch gewordenen Prinzipien. Er nimmt an:

- dass sich nicht eine einzelne Person, sondern eine fingierte Gesellschaft von gleichaltrigen Personen versichert;
- dass die Summe der Leistungen der einzelnen Personen barwertmässig gleich der Summe der zukünftigen Leistungen des Versicherers sein muss;
- dass der Barwert der beiden Leistungen auf den gleichen Zeitpunkt hin berechnet wird.

Er kommt dabei auch dem Begriff der «diskontierten Zahl der Lebenden» recht nahe. Die Erkenntnis der Wichtigkeit solcher Kommutationszahlen und die Einführung von entsprechenden speziellen Bezeichnungen geht indessen auf die englische Schule zurück, auf unserem Kontinent auf den Dänen J.-N. Tetens (1763–1807), der 1785 eine «Anleitung zur Berechnung von Leibrenten und Anwartschaften» veröffentlicht hat [3].

Euler bemerkt weiter, dass die so berechnete Nettoprämie nicht ausreichend ist. Sie muss erhöht werden, um die Verwaltungskosten und um die *«dépenses particulières qu'un tel établissement exige»* zu decken, aber auch um eine Schwankungsreserve zu haben für die *«oscillations plus ou moins considérables que l'institution doit être en état de supporter»*.

Er wendet sich dann noch der aufgeschobenen Leibrente zu, «deren Ankaufspreis viel geringer zu stehen kommt, welche also beim Publikum viel mehr Anklang finden könnte; ich meine solche Leibrenten, deren Bezug erst nach Ablauf von 10 oder gar von 20 Jahren beginnt». Er beweist anschliessend die Formel, welche es gestattet, für ein beliebiges Alter m eine solche n Jahre aufgeschobene Leibrente zu berechnen, und gibt auch hier – wie an vielen anderen Stellen – wieder einige Kunstgriffe an, durch die man sich die Rechnung erleichtern kann. Dann berechnet er zwei Tabellen, um den Barwert einer 10 bzw. 20 Jahre aufgeschobenen Rente zu finden, wenn im Zeitpunkt der einmaligen Einlage das Alter des Rentenbezügers 0, 5, 10, 15,..., 80 Jahre beträgt (wieder mit dem Zinsfuss von 5% und der Sterbetafel von W. Kersseboom). «Es wäre gewiss eine schöne Einrichtung, durch einmalige Zahlung von 3500 Gulden bei der Geburt eines Kindes, diesem eine feste, lebenslängliche Jahresrente von 1000 Gulden zu sichern, obgleich sie erst ausbezahlt würde, nachdem das Kind das Alter von 20 Jahren erreicht hätte», schreibt Euler in diesem Zusammenhang.

«Eclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts ...»

Diese «Aufklärungen über die öffentlichen Institute zugunsten sowohl der Witwen als der Verstorbenen, mit der Beschreibung einer neuen Art von Tontine, ebenso vorteilhaft für das Publikum als nützlich für den Staat» – französisch geschrieben – stellen das Hauptwerk Eulers auf dem Gebiete des Versicherungswesens dar. «Dieses äusserst interessante, in seinem dritten Teil sehr merkwürdige Werk bildet ein in sich abgeschlossenes Ganzes und ist auch für Leser, die nicht Fachleute sind, leicht verständlich, denn die Darstellungsweise zeichnet sich, wie ja auch sonst bei Euler, durch grösste Klarheit aus», schreibt G.L Du Pasquier [4].

Der erste Teil handelt von den Witwenrenten: Ein Ehemann, dessen Alter mit a bezeichnet werde, möchte seiner b-jährigen Frau eine Witwenrente von p Rubel sichern. Er will dafür sofort eine einmalige Summe x bezahlen und überdies noch jährlich die Prämie z bis zu seinem Tode. Von seinem Tode an soll seine Witwe bis an ihr Lebensende die Jahresrente p erhalten. Wenn der Mann seine Frau überlebt, so verfallen alle seine geleisteten Einzahlungen der Versicherung, und die Versicherung ist dem Witwer gegenüber zu keinen Leistungen verpflichtet.

Eulers Ansatz gestattet, mehrere Aufgaben in einer einzigen Formel zusammenzufassen – eine Vereinfachung, die er immer gerne anstrebt. Setzt man nämlich in seiner Formel nachträglich z=0, so zahlt der Mann einfach die Einmalprämie x für die Witwenrente, und x ist dann auch der Barwert dieser Rente. Setzt man hingegen x = 0, so wird mit der Lösungsformel der Wert der nachschüssigen Jahresprämie berechnet, die ein jetzt a-jähriger bis zu seinem Tode bezahlen muss, damit die jetzt b-jährige Frau nach dem Ableben des Mannes die Jahresrente p bis an ihr Lebensende erhält; für x = z erhält man schliesslich die vorschüssige Jahresprämie.

Euler nimmt wiederum an, dass sich eine grosse Zahl von a-jährigen Ehemännern, deren Frauen alle b Jahre alt sind, an denselben Versicherer mit demselben Begehren wenden. Nun sind die beiden Grössen x und z so zu bestimmen, dass die gesamte Summe der zu erwartenden Einnahmen des Versicherers, jede einzelne auf den gegenwärtigen Zeitpunkt diskontiert, gleich ist der Summe aller Renten, welche der Versicherer voraussichtlich an die hinterbliebenen Witwen zu zahlen haben wird, selbstverständlich wieder jeder Betrag auf den gegenwärtigen Zeitpunkt diskontiert. Er legt dann mit grosser Klarheit dar, wie durch Anwendung dieses grundlegenden Äquivalenzprinzips die Zahlungen berechnet werden können, und zwar eben so, dass «das Versicherungsinstitut mit den Regeln der strengsten Gerechtigkeit in vollkommenem Einklang steht». Den Bedürfnissen der Praxis kommt Euler weitgehend entgegen: Er berechnet umfangreiche Tabellen, erläutert Kunstgriffe, die die Rechnung vereinfachen, und erteilt praktische Ratschläge.

Der zweite Teil dieses Hauptwerkes trägt den Titel *«Sur l'établissement d'une caisse pour les morts»*. Hier geht es um die Gründung von Sterbekassen. Euler erläutert die weit verbreiteten Hauptfehler bestehender Sterbekassen und zeigt, wie man vorzugehen hat, damit Leistung und Gegenleistung einander wirklich entsprechen. – Im dritten Teil, *«Plan d'une nouvelle espèce de Tontine, aussi favorable au Public qu'utile à l'Etat»*, stellt er dar, wie die gegen Ende des 17. Jh. durch den italienischen Arzt Lorenzo Tonti vorgeschlagenen Staatsanleihen – die «Tontinen» – mit denen grosse Nachteile verbunden sind, vernünftig umgestaltet werden könnten, um zu einer Institution zu kommen, die «beim Publikum einen grossen Anklang» finden und «für den Staat eine nie versiegende Quelle von Einkünften bilden» würde! Wir müssen hier auf die Arbeiten von L.G. Du Pasquier [4] verweisen.
In der lateinisch geschriebenen vierten Arbeit Eulers, die ebenfalls noch zur Versicherungsmathematik gehört, wird eine Rentenversicherung auf zwei Leben behandelt – als «Lösung einer Frage, die zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört». Sie ist vom Göttinger Mathematiker und Mathematikhistoriker A.G. Kästner (1719–1800) frei ins Deutsche übersetzt worden [7].

* * * * *

Leonhard Euler wurde 1707 in Basel geboren; seine Kindheit verbrachte er in der Nähe der Stadt Basel, in Riehen, wo sein Vater als Pfarrer tätig war. Von seinem Vater, der bei Jakob I Bernoulli (1654–1705) Mathematik studiert hatte, bekam er den ersten Mathematikunterricht. 1720 ist er an der philosophischen Fakultät der Universität Basel immatrikuliert worden, 1723 an der theologischen. Er hatte die Chance, bei Johann I Bernoulli (1667–1748), damals einer der grössten Mathematiker, ein mathematisches Privatissimum absolvieren zu dürfen. 1727 folgte er dessen Söhnen Daniel I und Nikolaus II nach Petersburg an die von Zar Peter I. 1724 gegründete Akademie, wo er 1731 Professor für Physik, 1733 für Mathematik wurde. 1741 nahm er eine Berufung an die Berliner Akademie an. Differenzen zwischen ihm und dem preussischen König Friedrich II. bewogen ihn, 1766 nach St. Petersburg zurückzukehren, bis zu seinem Tode (1783) weiterhin unermüdlich wissenschaftlich tätig, obwohl er kurz nach seiner Ankunft erblindet war. – Er hat in allen mathematischen Disziplinen gearbeitet und glänzende Resultate erzielt; er prägte die Mathematik des 18. Jh. Seine rein mathematischen Werke betreffen Zahlentheorie, Algebra, Grundlagen der Analysis, Infinitesimalrechnung, unendliche Reihen, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Geometrie, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie; er hat sich aber auch mit Mechanik und Hydromechanik, Astronomie, Ballistik, Schiffswesen und Musiktheorie beschäftigt. Seine Überlegungen hat er in zahlreichen Abhandlungen in den «Petersburger Kommentaren», den «Memoiren» der Berliner Akademie und in seiner Korrespondenz niedergelegt, vor allem aber auch in umfangreichen Lehrbüchern, die sich durch einen vorbildlichen, exemplarisch gewordenen Aufbau auszeichnen. – «Der produktivste Mathematiker der Menschheitsgeschichte [...] einer der grössten Gelehrten aller Zeiten» (E. A. Fellmann [8]).

R. Ineichen

Bibliographie

[1] Kupper, J., Versicherungsmathematik und schweizerische Hochschulen, Mitteilungen SAV 1/1998

[2] Leonhardi Euleri Opera omnia, series prima, vol. septimum. Edidit L.G. Du Pasquier, B.G. Teubner, Leipzig 1923

[3] Du Pasquier, L.G., Préface de l'éditeur. In: [2]

[4] Du Pasquier, L.G., Leonhard Eulers Verdienste um das Versicherungswesen, Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 54/1
– Les travaux de Léonard Euler concernant l'assurance, Mitteilungen VSVM 1910

[5] Sofonea, T., Leonhard Euler und seine Schriften über die Versicherung, Het Verzekerings-Archief 34, 1957

[6] Loeffel, H., Leonhard Euler – Zum 200.Todestag am 18. September 1983, Mitteilungen VSVM 1984.

[7] Kästner, A.G., Des Herrn Leonhard Eulers nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwenkasse (1770) In: [2]

[8] Fellmann, E.A., Leonhard Euler, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Hamburg 1995